Gestion et allocation du capital

Mars 2025

Table des matières

1. Introduction et définitions

Ce document propose de traiter de réflexions et de méthodologies permettant d'approfondir les exigences réglementaires pour une meilleure connaissance, maîtrise et allocation du capital, ainsi que de permettre un pilotage du SCR plus intuitif.

L'évaluation du SCR intègre la notion de diversification entre les risques agrégés qui le composent. Ces risques sont directement liés à l'activité des organismes soumis à Solvabilité 2.

En proposant des garanties similaires à de nombreux acteurs indépendants, les organismes d'assurance peuvent mutualiser les risques. Cela leur permet de couvrir des risques qui seraient considérés trop élevés à un échelon individuel.

De plus, les contrats distribués par les organismes d'assurance concernent des évènements de natures différentes générant plusieurs types de risques (risque de marché, risque de défaut, risque de mortalité, ...). Ces risques sont peu susceptibles de survenir en même temps.

Ces possibilités de mutualisation et de diversification font que l'agrégat de risques pris par une compagnie d'assurance sera moins risqué que la somme des risques pris séparément. Cette propriété de « sous-additivité » génère des bénéfices de diversification dont la formule standard permet la prise en compte par le biais de matrices de corrélation. Mais cela rend parfois difficilement interprétable l'apport d'un risque dans le capital règlementaire et la formule du SCR peut ainsi donner l'effet d'une « boîte-noire ». Une des principales difficultés pour mesurer la performance de différentes activités est que leurs contributions à la consommation de capital du groupe ne sont pas sommables. Il peut alors être délicat de déterminer la contribution réelle de chaque activité au niveau du capital total de la compagnie.

La maîtrise des effets de diversification peut donc être utile dans le cadre du pilotage de l'activité d'un organisme d'assurance. En effet, en maximisant les effets de diversification on diminue le risque global, et par suite les exigences de capitaux économiques. Une meilleure appréhension des effets de diversification peut ainsi permettre soit d'accroître la rentabilité à risque constant, soit de diminuer le niveau de risque à rentabilité constante. Il est de plus indispensable de comprendre les évolutions du SCR et pouvoir les expliquer plus simplement aux instances dirigeantes.

Plusieurs méthodes peuvent permettre d'estimer le SCR de manière linéarisée en réalisant par exemple une allocation du capital par module et/ou sous-module de risque ou encore de descendre à un niveau plus fin (contrats, produits, …). Il s'agit de faire apparaitre les contributions réelles de chacun des risques dans le SCR. L'allocation des bénéfices de diversification consiste à « rendre sommable les risques », ce qui revient à répartir les effets des non-linéarités dans la mesure du capital économique entre différents sous- périmètres d'activités. Cette identification des contributions « sommables » de chaque activité au risque global de la compagnie après prise en compte des effets de diversification permet de mieux appréhender l'impact de chaque activité de la compagnie sur le niveau de risque global, ce qui peut aider lors de prises de décisions stratégiques.

Les principales méthodes d'allocations sont présentées dans ce document, accompagnées de recommandations, d'analyses quant à leurs avantages et inconvénients.

Pour une mise en place opérationnelle, la méthode développée passe par plusieurs étapes.

La première étape consiste à mettre en évidence une « maille d'allocation », c'est-à-dire de décomposer la compagnie en segments correspondant aux différentes activités, par référence à la maille utilisée dans le cadre du pilotage de l'entreprise.

La seconde étape correspond au choix du niveau auquel l'allocation doit être réalisée : on peut par exemple conduire l'analyse au niveau des facteurs de risques (risque action, risque de taux, risque de mortalité, ...) ou directement au niveau du risque de chaque segment (SCR de chaque filiale sans regarder la décomposition par facteur de risque).

Dans un troisième temps, il est nécessaire de choisir une technique mathématique permettant de réaliser l'allocation. La littérature disponible met en évidence un grand nombre de techniques possibles et ces dernières conduisent à des résultats différents. Il s'agira de choisir quelle méthode appliquer en fonction de ses objectifs et des limites de chacune d'elles. Ainsi, chaque entreprise souhaitant réaliser ce type de travaux est donc conduite à sélectionner la méthodologie correspondant le mieux à ses objectifs de gestion. Pour ce faire, elle pourra s'interroger sur les caractéristiques à mettre en avant dans le processus d'allocation pour choisir l'option la plus appropriée.

En complément de l'illustration de ce choix « théorique », nous mettons en évidence les difficultés opérationnelles lors de l'implémentation de ces travaux dans le cadre de la formule standard. En particulier, nous proposons une manière de traiter l'absorption des risques par les impôts et par les passifs d'assurance.

Des représentations graphiques permettent de visualiser les effets des diversifications et mieux se figurer ce qui se passe dans la formule « boite noire » du SCR.

2. Applications

L'allocation du capital peut avoir de multiples applications.

2.1 SCR par facteur de risque

Le premier résultat de l'allocation du capital est la décomposition du besoin en capital par risque et par ligne d'activité.

On obtient ainsi un tableau à double entrée qui fait apparaître les contributions par risque X ligne d'activité. L'addition de toutes les cases formant alors le BSCR net :

Activité X Risque	Risque 1	…	Risque N	Contribution par activité
Activité 1				Contribution activité 1
…				…
Activité N				Contribution activité N
Contribution par risque	Contribution risque 1	…	Contribution risque N	Total = BSCR net

On peut prolonger l'exercice sur le SCR opérationnel et les ajustements par les impôts différés. Il est préférable d'allouer directement le BSCR net des ajustements par les provisions techniques.

Cet exercice nécessite de segmenter les placements en face des fonds propres vs ceux en face des provisions techniques, et de les allouer ensuite par ligne d'activité au prorata des réserves, voire en fonction de leur duration.

L'allocation du SCR net par risque et par activité permet ensuite d'aller plus loin dans la gestion du capital.

2.2 Rentabilité et Tarification (métier, segment, produit ou traité)

Lors de la tarification des différents produits, il est possible d'injecter le coût du capital dans le modèle. En effet, le fait de détenir du capital économique en lien avec l'offre de ces produits engendre un coût qui peut être pris en compte lors de leur tarification.

Le capital économique détenu pour un produit ne pourra pas être investi dans d'autres activités. L'introduction du coût de détention de ce capital économique dans la tarification du produit permet d'obtenir un rendement sur le capital économique détenu.

2.3 Appétence aux risques et stratégie commerciale

Avec une méthodologie d'allocation, de nombreux indicateurs de pilotage peuvent être évalués suivant différentes dimensions de risque : résultat, valeur et solvabilité de l'entreprise.

L'allocation du capital peut éclairer la prise de décision en matière de développement d'un portefeuille, de lancement de nouveaux produits, ou encore de choix d'investissements. La prise en compte d'un capital alloué dans le calcul d'indicateurs de rentabilité est une aide à la prise de décisions stratégiques, permettant d'arbitrer par exemple entre solvabilité et rentabilité. L'allocation du capital permet d'identifier les produits les plus consommateurs de capital ainsi que ceux peu gourmands en capital et de confronter cette information à leur rentabilité.

Dans le cadre d'une stratégie commerciale il sera intéressant d'analyser les contributions marginales de chaque risque.

La commercialisation de nouveaux contrats peut conduire à déformer le profil de risque d'une compagnie, en modifiant la pondération entre les différents facteurs de risque. Par suite, cela va avoir des effets sur les bénéfices de diversification et donc la mesure du niveau de risque global. La décision de commercialiser ou non un produit va en partie dépendre de la manière dont il fait évoluer le risque global auquel la compagnie est exposée.

L'analyse des contributions marginales de chaque facteur de risque peut être utilisée pour mettre en place des abaques permettant d'approximer l'impact d'un nouveau produit de manière simplifiée. On peut également utiliser cette analyse pour identifier les facteurs de risques dont un accroissement améliore sensiblement les bénéfices de diversification : les produits liés à ces types de risques pourront être privilégiés, dans la mesure où ils auront un impact faible sur la consommation de capital, avec éventuellement un avantage concurrentiel par rapport à des organismes moins diversifiés qui doivent immobiliser davantage de capital.

L'allocation du capital peut permettre la détermination de limites de risque, mais également de niveaux cibles de prise de risque correspondant à des budgets de risques. Elle trouve un rôle important dans le cadre du dispositif de l'ORSA, permettant d'avoir un indicateur du risque pour piloter l'activité à venir suivant sa tolérance au risque et d'en moduler son appétence. Il est possible d'allouer les risques par preneur et ainsi d'avoir un pilotage de l'activité permettant d'identifier les limites et cibles d'activité par preneur.

2.4 Optimisation du capital (Réassurance, Atténuation, Couverture financière)

La réassurance :

La réassurance peut être utilisée pour une meilleure gestion du capital. Des solutions permettent de maximiser la diversification, d'équilibrer les risques entre les filiales, et de centraliser les risques auprès d'une entité et assurer la fongibilité du capital.

Il est intéressant de voir quels sont les leviers d'allègement du SCR grâce aux cessions d'activités ciblées ; une compréhension plus fine des sources de besoin en capital permet de céder des activités coûteuses en SCR pour la cédante, pour un coût du capital plus faible transféré au réassureur. Faire apparaître les contributions réelles de chaque risque de la cédante nettes de diversification permet ainsi d'optimiser les plans de réassurance Solvabilité 2.

La gestion d'actifs :

L'allocation du capital aide à optimiser les stratégies d'investissements et l'utilisation des ressources financières. En affectant le capital là où il est le plus nécessaire, les entreprises peuvent maximiser leur rendement en augmentant ou en réduisant leur exposition à certains types de placements ou passifs à duration longue.

2.5 Ajustement du SCR au titre de l'impôt différé

Pour rappel, le Scénario Équivalent permet de déterminer des combinaisons de chocs qui appliqués simultanément conduisent à un niveau de perte comparable au SCR total. Cette combinaison de chocs peut être déterminée de différentes manières : par exemple, sur base d'avis d'experts ou si applicable, en utilisant une méthode d'allocation des sous-modules de risques (ex : méthodes proportionnelle, marginale, la décomposition d'Euler ou encore la méthode de Shapley), voir « Impôts Différés sous Solvabilité 2 » du GT impôts différés)

En règle générale, la réalisation de pertes par une entreprise lors d'un exercice lui donne droit à un crédit d'impôts, qui viendra réduire les futurs montants d'impôts en cas de bénéfices futurs. Le SCR calculé en comparant les actifs et les BE avant et après choc (tels que le SCR de taux, Immobilier…) ne tient pas compte de cette capacité pour l'entreprise de réduire sa perte par un effet fiscal. Le module « ajustement par les Impôts Différés » permet de tenir compte de cet effet.

L'Article 207 du règlement délégué (UE) 2015/35 propose d'attribuer la perte aux risques couverts par le BSCR—ajustement_PT + SCR opérationnel. Le paragraphe 5. fait référence aux « contributions des modules et sous-modules de risques », il faut donc faire appel aux techniques d'allocation du capital.

5. Lorsqu'il est nécessaire d'attribuer la perte visée au paragraphe 1 à ses causes afin de calculer l'ajustement visant à tenir compte de la capacité d'absorption de pertes des impôts différés, les entreprises d'assurance ou de réassurance attribuent cette perte aux risques couverts par le capital de solvabilité requis de base et par l'exigence de fonds propres pour risque opérationnel. Cette attribution est cohérente avec la contribution des modules et sous-modules de la formule standard du capital de solvabilité requis de base. Lorsqu'une entreprise d'assurance ou de réassurance utilise un modèle interne partiel dans les cas où l'ajustement de la capacité d'absorption de pertes des provisions techniques et des impôts différés n'entre pas dans le champ du modèle, l'attribution est cohérente avec la contribution des modules et sous-modules de la formule standard qui sont en dehors du champ du modèle au capital de solvabilité requis de base.

Les textes de la révision 2018 sont venus préciser les actes délégués via l'insertion de la sous partie suivante (Article 207).

§2 bis. Dans le cas où la perte visée au paragraphe 1 se traduirait par une augmentation du montant des actifs d'impôts différés, les entreprises d'assurance et de réassurance n'utilisent cette augmentation aux fins de l'ajustement visé audit paragraphe que si elles sont en mesure de démontrer, à la satisfaction de l'autorité de contrôle, qu'il est probable qu'un bénéfice imposable, sur lequel cette augmentation pourra être imputée, sera disponible à l'avenir (...)

Ainsi, la réglementation impose que la reconnaissance des impôts différés notionnels soit conditionnée à la capacité de l'assureur à démontrer qu'il sera en mesure de faire des bénéfices suffisants dans le futur pour recouvrer ce crédit d'impôt, voir le document « Impôts Différés sous Solvabilité 2 » du GT impôts différés pour plus de précisions sur le test de recouvrabilité.

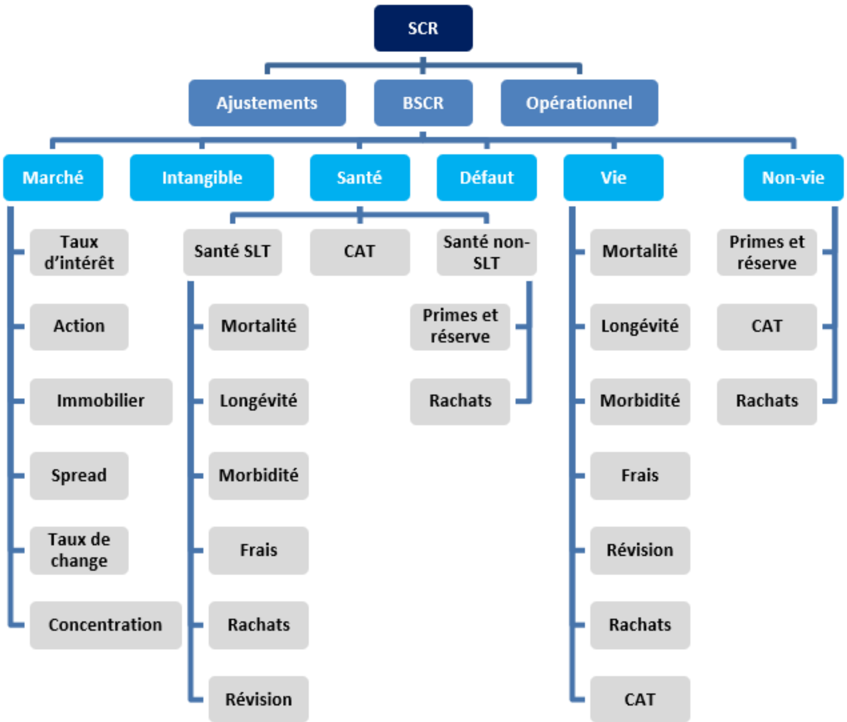
Pour les organismes qui retiendraient un ajustement par les impôts différés égal aux Impôts Différés Passif (IDP) nets, il convient alors de vérifier si l'application des chocs absorbent au maximum l'intégralité des IDP au bilan ou de démontrer la recouvrabilité dans le cas contraire.

3. Rappel sur l'agrégation des risques, méthode standard, modèle interne

L'agrégation des risques permet d'obtenir un capital consolidé à partir de risques élémentaires. Nous nous intéresserons seulement à l'agrégation dans le cadre de Formule Standard définie par Solvabilité 2.

3.1 Le SCR dans la Formule Standard

Dans la directive Solvabilité 2, l'EIOPA donne une architecture des risques par module :



Formule Standard : architecture des risques

Cette hiérarchie permet de prendre en compte des sous-modules de risques relatifs à la branche concernée. En fonction des produits proposés, les organismes assurantiels peuvent être exposés à différentes branches.

Le calcul du SCR global se fait par la Formule Standard. Il s'agit du mode de calcul par défaut où les paramètres de calcul sont calibrés uniformément sur le marché européen.

La détermination du SCR se fait par étapes successives :

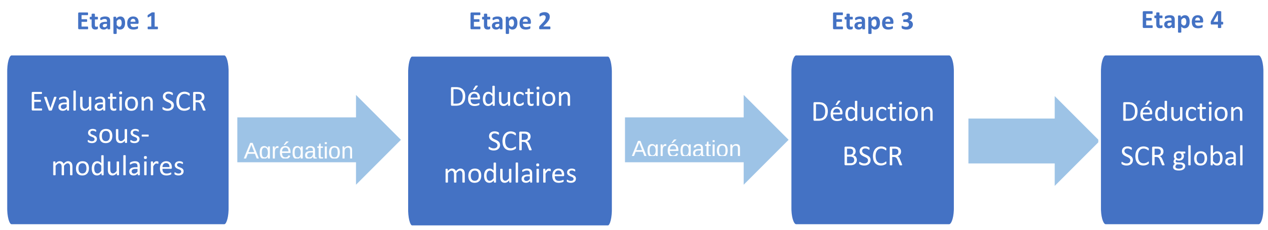


Figure 3.1 - Détermination du SCR global

Le calcul du SCR comprend ainsi deux phases d'agrégation. On parlera d'agrégation intra-modulaire et d'agrégation modulaire.

Etape 1 : Evaluation des SCR sous-modulaires

Chaque sous-module de risque fait l'objet d'un calcul de besoin en capital à l'aide de chocs instantanés.

Etape 2 : Déduction des SCR modulaires

Les besoins en capital d'un même module de risque sont agrégés afin d'obtenir les SCR modulaires, on parle d'agrégation intra-modulaire. Le principe d'agrégation des risques découle de la prise en compte de la dépendance entre les différents segments. Ainsi, le capital consolidé est inférieur à la somme des capitaux élémentaires lorsque les risques se diversifient : on parle de bénéfice de diversification.

La formule d'agrégation, décrite dans la Formule Standard, prend donc en compte les corrélations entre les différents risques à l'aide de matrices fournies dans le Règlement Délégué.

Définition 2.5 (Formule d'agrégation des risques sous-modulaires dans la Formule Standard).

$$SCR_m = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j}.SCR_{mi}\,.SCR_{mj}}$$

Où :

- $Corr(i,j)$ représente le niveau de corrélation entre les sous-modules de risque *i* et *j*
- SCR_{mi} représente le Capital de Solvabilité Requis au titre du risque *i* composant le module *m*

Etape 3 : Déduction du BSCR

Les SCR modulaires sont ensuite eux-mêmes agrégés entre eux, afin d'obtenir le SCR de base, noté BSCR.

Définition 2.6 (Calcul BSCR : formule d'agrégation des risques modulaires dans la Formule Standard).

La formule d'agrégation est la suivante :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j}.SCR_i\,.SCR_j}$$

Où :

- $Corr_{i,j}$ représente le niveau de corrélation entre les modules de risque *i* et *j*
- SCR_i représente le Capital de Solvabilité Requis au titre du module de risque *i* (marché, défaut, vie, santé, non-vie, intangible)

Etape 4 : Déduction du SCR global

Le SCR global correspond au SCR de base et au SCR relatif au risque opérationnel auxquels est retranché l'ajustement symétrique pour capacité d'absorption des pertes :

Définition 2.7 (Calcul SCR global dans la Formule Standard).

$$SCR = BSCR + Op - Adj$$

3.2 Interprétation graphique

Sous les hypothèses Solvabilité 2, une interprétation graphique de l'agrégation de deux SCR peut être tirée du théorème d'Al-Kashi (ou théorème de Pythagore généralisé).

On rappelle que pour deux risques A et B, la formule d'agrégation sous la Formule standard s'écrit :

$$SCR_{A+B} = \sqrt{SCR_A^2 + SCR_B^2 + 2 \times SCR_A \times SCR_B \times Corr_{AB}}$$

Le théorème d'Al-Kashi montre que cette formule permet d'interpréter SCR_{A+B} comme la longueur du côté d'un triangle dont les deux autres côtés sont de longueurs SCR_A et SCR_B et forment un angle de cosinus égal à $-Corr_{AB}$.

Théorème 2.1 (Théorème d'Al-Kashi).

Soit ABC un triangle quelconque, avec d'une part α, β et γ les angles et, d'autre part, a, b et c les longueurs des côtés respectivement opposés à ces angles. Par le théorème d'Al Kashi, on a :

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases}$$

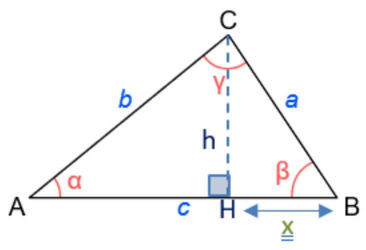


Figure 3.2 - Théorème d'Al-Kashi

Démonstration

Soit h la hauteur du triangle ABC, issue du sommet C.

On considère le triangle rectangle ACH. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$b^2 = h^2 + (c - x)^2.$$

On considère le triangle rectangle CBH. D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$a^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - x^2.$$

Par définition, $\cos\beta = \frac{x}{a}$ donc $x = a\cos\beta$.

En remplaçant h^2 dans la 1ère égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} & b^2 = a^2 - x^2 + (c-x)^2 \\ \Leftrightarrow\ & b^2 = a^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \\ \Leftrightarrow\ & b^2 = a^2 + c^2 - 2cx \end{aligned}$$

En remplaçant x par $a\cos\beta$, on a bien

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

On démontre les 2 autres résultats de manière analogue en considérant les autres hauteurs.

Remarque

Dans le cas d'un triangle rectangle, on a $\gamma = 90° \Leftrightarrow \cos\gamma = 0$. L'égalité devient donc :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ce résultat correspond bien à la formule du théorème de Pythagore.

En posant $SCR_{A+B} = c$, $SCR_A = a$, $SCR_B = b$ et $Corr_{AB} = -\cos\gamma$, on remarque que l'expression mathématique correspond à l'expression géométrique.

Ainsi, la corrélation définit l'angle formé entre les côtés a et b du triangle :

$$Corr_{AB} = -\cos\gamma \Leftrightarrow \cos\gamma = -Corr_{AB} \Leftrightarrow \boxed{\gamma = \cos^{-1}(-Corr_{AB})}$$

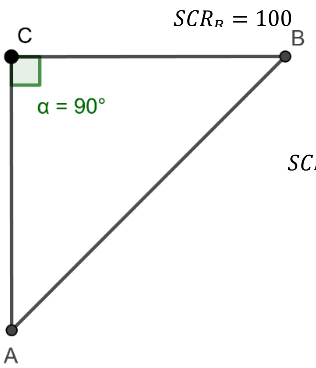
Les corrélations réglementaires prennent seulement leurs valeurs parmi : 0%, 25%, 50%, 75%, 100% et -25%. Nous pouvons donc faire les correspondances suivantes :

Corrélation (en %)	Angle γ (en degré)
0%	90°
25%	104,48°
50%	120°
75%	138,59°
100%	180°
-25%	75,52°

Figure 3.3 - Tableau des correspondances corrélation/angle

Par exemple, pour **deux risques non corrélés (0%)**, l'agrégation se représente sous la forme d'un triangle rectangle. Cela revient à appliquer le théorème de Pythagore.

$SCR_A = 100$



$$SCR_{A+B} = \sqrt{100^2 + 100^2 + 2 \times 0 \times (100 \times 100)} = 141{,}42$$

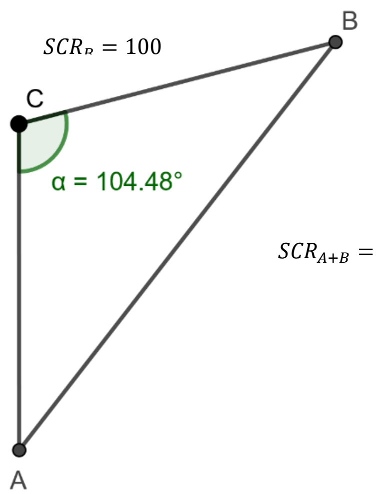
Agrégation de deux risques non corrélés

La différence entre la somme des SCR pris séparément $SCR_A + SCR_B = 100 + 100 = 200$ et l'agrégat des deux, $SCR_{A+B} = 141{,}42$, correspond au bénéfice de diversification.

Dans notre cas, il est égal à 200 – 141 = 59.

Si on augmente la corrélation, l'angle augmente également. Ainsi, pour une **corrélation de 25%**, l'angle formé entre les 2 SCR est de 104,48° et on a la représentation suivante :

$SCR_A = 100$



$$SCR_{A+B} = \sqrt{100^2 + 100^2 + 2 \times 0{,}25 \times (100 \times 100)} = 158{,}114$$

Agrégation de deux risques corrélés (25%)

On constate que l'agrégat des deux risques augmente, et que le bénéfice de diversification, environ égal à 42, diminue. On en conclut donc que pour deux risques plus la corrélation est élevée, plus l'agrégat est important et le bénéfice de diversification faible.

Plus la corrélation est forte, plus l'angle est ouvert et moins le bénéfice de diversification est important.

NB : dans le cas où la corrélation serait de 100%, on retrouve une addition sans bénéfice de diversification.

4. Les principales méthodes : la théorie et la mise en œuvre opérationnelle

L'objet de cette section est de rappeler les principales méthodologies d'allocation du capital, dans une vision plutôt académique, puis de préciser les principes de mise en œuvre dans le cadre de la formule standard.

4.1 Principes généraux

Une opération d'allocation du capital consiste à allouer un montant global de capital à différents segments sur la base des risques associés à ceux-ci.

La notion de segment peut ici prendre des formes variées : modules de risques (SCR), périmètres d'activité, etc.

Pour toute la suite, on note :

- K : le montant de capital à allouer,
- N : l'ensemble des n segments sur lesquels le capital doit être alloué,
- X_i : la variable aléatoire réelle modélisant le risque associé au segment $i \in N$,
- K_i : le montant de capital alloué au segment $i \in N$.

Plus généralement, on note X_S la variable aléatoire réelle modélisant le risque associé au sous-ensemble S de segments de N. Le risque global X_N pourra également être noté simplement X.

Les méthodologies présentées ci-après reposent sur l'hypothèse que le risque associé à tout sous-ensemble est égal à la somme des risques individuels :

Hypothèse d'allocation du risque

$$\forall\, S \subset N, \qquad X_S = \sum_{i \in S} X_i$$

Les **méthodologies d'allocation** présentées dans la suite s'organisent autour du choix :

- d'une **mesure de risque**,
- d'une **méthode d'allocation**, qui associe une allocation à chaque mesure de risque.

Elles conduisent à déterminer une **clé d'allocation** pour chaque segment, à savoir un réel ω_i, puis à définir le capital alloué au segment i par la formule : $K_i = \omega_i . K$.

Les deux sections suivantes sont consacrées respectivement aux mesures de risque et aux méthodes d'allocation.

4.2 Mesure de risque

4.2.1 Définition

L'allocation du capital étant basée sur les risques associés aux segments, les méthodologies d'allocation nécessitent de quantifier le niveau de risque de ces segments, et plus précisément des variables aléatoires qui les modélisent. C'est l'objet des mesures de risques.

Notons $\mathcal{VA}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles (sur un espace probabilisé quelconque). Une mesure de risque ρ est une application $\rho : \mathcal{VA} \to \mathbb{R}$. Pour que ce concept soit intéressant en pratique, il est souhaitable qu'une mesure de risque vérifie certaines propriétés.

4.2.2 Propriétés d'une mesure de risques

Propriétés Soit une mesure de risque $\rho : \mathcal{VA} \to \mathbb{R}$.

1. **Monotonie** $\forall\, X, Y \in \mathcal{VA}, \quad \mathrm{X} \leq \mathrm{Y}\ \mathrm{p.s.} \;\Rightarrow\; \rho(X) \leq \rho(Y).$

2. **Invariance par translation :** si un montant constant c est ajouté à la variable aléatoire X, alors la mesure de risque doit augmenter de c : $\forall\, X \in \mathcal{VA},\ \forall\, c \in \mathbb{R},\ \rho(X + c) = \rho(X) + c.$

3. **Homogénéité positive** $\forall\, X \in \mathcal{VA},\ \forall\, c \in \mathbb{R}^{+},\ \rho(c.X) = \mathrm{c}.\rho(X).$

4. **Sous-additivité** $\forall\, X, Y \in \mathcal{VA}, \quad \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$

Une mesure de risque vérifiant ces quatre propriétés est dite **cohérente**.

La monotonie traduit l'idée que si un risque est plus important qu'un autre (au sens où la variable aléatoire qui le modélise est presque sûrement supérieur), sa mesure de risque doit également être plus importante. Cela permettra d'assurer qu'un segment plus risqué se voit allouer un montant de capital plus important qu'un segment moins risqué.

L'invariance par translation traduit l'idée que l'augmentation d'un risque par une valeur certaine augmente la mesure de risque de cette même valeur.

L'homogénéité formalise le principe selon lequel la mesure du risque varie dans les mêmes proportions que le risque lui-même.

La sous-additivité traduit l'effet de diversification. Il permettra d'assurer que le capital alloué à deux risques agrégés ne soit pas supérieur à la somme des capitaux alloués à chaque risque séparément.

4.2.3 Exemples de mesures de risque

1. Ecart-type

L'écart type est une mesure de risque positivement homogène et sous-additive, mais ni monotone, ni invariante par translation.

Sur ce dernier point, l'écart type est en fait plutôt « insensible » aux translations (par des nombres réels) :

$$\forall\, X \in \mathcal{VA},\ \ \forall\, c \in \mathbb{R},\ \ \sigma(X+c) = \sigma(X)$$

Un exemple illustrant la non-monotonie de l'écart-type serait de considérer les portefeuilles A et B suivants :

- Portefeuille A : perte X de 10 avec probabilité de 50 % et de 30 avec probabilité de 50 %,
- Portefeuille B : perte Y de 50 avec probabilité de 100 %.

La perte du portefeuille A est toujours inférieure à celle du portefeuille B ($\mathrm{X} \leq \mathrm{Y}$), mais son écart-type est supérieur : $\rho(X) = 10\sqrt{2}\ >\ 0 = \rho(Y)$.

2. VaR (quantile)

La VaR (ou le quantile) de niveau $\alpha\ (0\ \leq \alpha\ \leq 1)$ de la variable réelle X est définie par :

$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(X)\ =\ Inf\{x \in \mathbb{R} / \mathrm{P}(\mathrm{X}\ \leq \mathrm{x}) \geq \alpha\}$$

La VaR est une mesure de risque, monotone, invariante par translation et positivement homogène, mais non sous-additive. Elle est toutefois sous-additive sur les variables aléatoires de lois elliptiques (e.g. de loi gaussienne).

Une illustration de non sous-additivité de la VaR peut être fournie par deux portefeuilles dont les pertes sont modélisées par des variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli indépendantes :

- Portefeuille A : perte de 100 avec une probabilité de 4 % et 0 avec une probabilité de 96 %
- Portefeuille B : perte de 100 avec une probabilité de 4 % et 0 avec une probabilité de 96 %

Les deux portefeuilles ont chacun une VaR à 95 % de 0.

Les pertes possibles pour le portefeuille (A+B) sont :

- 0 avec une probabilité de 92,16%,
- -100 avec une probabilité de 7,68%,
- -200 avec une probabilité de 0,16%

La VaR à 95% pour (A+B) est donc de 100.

Cet exemple montre que la VaR n'est pas sous-additive, car la VaR du portefeuille combiné (A+B) est supérieure à la somme des VaR des actifs individuels A et B.

3. TVaR

La TVaR de niveau α $(0 \leq \alpha \leq 1)$ de la variable réelle X est l'espérance conditionnelle de la variable sachant que celle-ci dépasse la VaR niveau α :

$$\mathrm{TVaR}_\alpha(X) = E(X \mid X > \mathrm{VaR}_\alpha(X)).$$

La TVaR satisfait les axiomes de cohérence des mesures de risque, tels que la monotonie, la translation invariante, l'homogénéité positive et la sous-additivité. Ces propriétés assurent que la TVaR est une mesure de risque cohérente, indépendamment de la nature discrète ou continue de la distribution.

4.2.4 Notion d'impact marginal

Étant donné une mesure de risque, la notion d'impact marginal permet d'évaluer la contribution au risque global d'un segment particulier.

L'impact marginal du segment $i \in N$ sur un ensemble de segments $S \subset N$ contenant i, est défini (pour h réel compris entre 0 et 1) par la formule suivante :

$$I_i(h, S) = \frac{\rho(X_S) - \rho(X_S - hX_i)}{h}$$

Il s'agit donc du taux de variation de la mesure de risque porté par l'ensemble de segments S résultant de la diminution d'une fraction h du risque porté par le segment i. L'impact marginal permet, par exemple, en considérant l'ensemble des segments N, d'évaluer la contribution au risque global d'un segment particulier.

Lorsque les segments sont fractionnables, h sera pris infiniment petit. Dans le cas de segments atomiques, l'impact marginal est utilisé avec h = 1.

4.2.5 RORAC (Return On Risk Adjusted Capital)

Le RORAC (Return on Risk-Adjusted Capital) est une mesure financière utilisée dans le secteur financier pour évaluer la rentabilité d'une activité ou d'un projet en tenant en compte du niveau de risque associé.

Cette notion est discutée plus en détail en section 6.1.

Dans le contexte du présent chapitre, le RORAC global et le RORAC du segment *i* sont définis respectivement par :

$$RORAC(X) = \frac{E[X]}{\rho(X)} \qquad RORAC(X_i) = \frac{E[X_i]}{\rho(X_i)}$$

Le RORAC est utilisé dans la section suivante, dédiée aux méthodes d'allocation, pour définir une des propriétés souhaitables de celles-ci.

4.3 Méthode d'allocation

4.3.1 Définition

De façon informelle, une méthode d'allocation associe à chaque mesure de risque la contribution au risque de chacun des segments.

Notons $\mathcal{MR}$ l'ensemble des mesures de risque. Une méthode d'allocation du capital est une application $\Lambda : \mathcal{MR} \to \mathbb{R}^n$, associant à une mesure de risque ρ le n-uplet $\Lambda(\rho)$, noté dans la suite $(\rho^\Lambda(X_i/X))_{i \in N}$, des contributions au risque de chaque segment.

À partir des contributions au risque de chaque segment sont définies les clés d'allocation ω_i correspondantes, par :

$$\omega_i = \frac{\rho^{\Lambda}(X_i/X)}{\rho(X)}$$

De ces clés d'allocation se déduisent les montants de capital alloué au segment i : $K_i = \omega_i . K$.

Pour qu'une méthode d'allocation donne des résultats pertinents, il est souhaitable qu'elle vérifie certaines propriétés.

4.3.2 Propriétés d'une méthodologie d'allocation

Cette section présente certaines propriétés susceptibles d'être vérifiées par une méthodologie d'allocation.

En préalable, précisons qu'étant donnée une méthodologie d'allocation $\Lambda(\rho)$, le RORAC post-allocation du segment *i* est défini à partir de la contribution au risque de ce segment :

$$RORAC(X_i/X) = \frac{E[X_i]}{\rho^{\Lambda}(X_i/X)}$$

Une méthodologie d'allocation vérifiant les cinq propriétés ci-après est dite **cohérente**.

Propriétés Soit une méthodologie d'allocation $\Lambda(\rho)$.

1. **Allocation complète** $\sum_{i \in N} \rho^{\Lambda}(X_i/X) = \rho(X)$.
2. **Symétrie** $\forall\, i,j\, N,\ si\ \forall\, S\ tel\ que\ i,j \in S,\ I_i(h,S) = I_j(\mathrm{h},\mathrm{S})\quad alors\quad \rho^{\Lambda}(X_i/X) = \rho^{\Lambda}(X_j/X)$
3. **Allocation sans risque** L'allocation du capital à un segment non risqué est nulle.
4. **No undercut** $\forall\, S \subset N,\ \sum_{i\, \in\, S} \rho^{\Lambda}(X_i/X) \leq \rho(X_S)$.
5. **Compatibilité RORAC**

   $\forall\, i \in N$, si $RORAC(X_i/X) > RORAC(X)$ alors $\exists\, \varepsilon_i > 0,\ \forall\, h \in [0; \varepsilon_i],\ RORAC(X + hX_i) > RORAC(X)$.

La propriété d'allocation complète (« full allocation ») garantit une allocation totale du risque global entre les différents segments. Notons que l'introduction des clés d'allocation, après calcul des contributions, conserve la propriété d'allocation complète : la totalité du capital consolidé est alloué aux différents segments.

La propriété de symétrie demande que deux segments ayant le même impact marginal par rapport à tout sous-ensemble de segments aient la même contribution au risque.

La propriété « No undercut » stipule que l'allocation tient compte d'un bénéfice de diversification pour tout sous-ensemble : la somme des capitaux alloués à un ensemble de segments est inférieure au risque global supporté par ces segments. En particulier, il sera alloué à un segment donné un capital plus faible que son capital stand-alone. Cette propriété est cruciale pour assurer la stabilité et l'équité dans l'allocation du capital. Elle empêche de former des sous-groupes pour obtenir des avantages supplémentaires, ce qui pourrait déstabiliser le système global d'allocation.

Exemple : supposons une entreprise avec trois lignes d'activité (A, B, et C) qui doivent se partager un capital total. Si la propriété "no undercut" est respectée, aucun sous-ensemble de ces lignes d'activité (par exemple, A et B) ne devrait être capable de se séparer et obtenir une allocation de capital plus avantageuse que celle qu'il recevrait en restant avec C.

La compatibilité RORAC est définie par la propriété suivante : lorsque la rentabilité définie post-allocation d'un segment i est supérieure à la rentabilité globale, il est possible d'améliorer de manière certaine la rentabilité globale en ajoutant une part h suffisamment petite du segment i. L'allocation du capital réalisée à l'aide d'une méthode d'allocation RORAC compatible permet donc d'analyser les capitaux alloués en termes de profitabilité. Il est possible, lorsque la méthode d'allocation satisfait la propriété RORAC compatible, de piloter l'activité à partir de cet indicateur.

4.4 Les méthodes d'allocation classiques

Cette section présente les quatre méthodes d'allocation les plus classiques.

4.4.1 La méthode proportionnelle

La méthode proportionnelle définit la contribution au risque par :

$$\rho^{\mathrm{Prop}}(X_i/X) = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j\,\in N}\rho(X_j)}\,\rho(X_N)$$

La clé d'allocation correspondante s'écrit :

$$\omega_i = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j\,\in N}\rho(X_j)}$$

Cette méthode, facile à mettre en œuvre, vérifie la propriété d'allocation complète en redistribuant le bénéfice de diversification mais elle ne prend pas en compte la dépendance entre les risques.

4.4.2 La méthode marginale

La méthode marginale, parfois appelée méthode incrémentale, permet d'allouer le risque global selon l'impact marginal (4.2.4) de chacun des segments.

La contribution au risque définie par la méthode marginale est donnée par :

$$\rho^{\mathrm{Marg}}(X_i/X) = \frac{\rho(X_N)-\rho(X_{N\setminus\{i\}})}{\sum_{j\,\in N}\big(\rho(X_N)-\rho(X_{N\setminus\{j\}})\big)}\,\rho(X_N) = \frac{I_i(1,N)}{\sum_{j\,\in N}I_j(1,N)}\,\rho(X_N)$$

La clé d'allocation correspondante s'écrit :

$$\omega_i = \frac{\rho(X_N)-\rho(X_{N\setminus\{i\}})}{\sum_{j\,\in N}\big(\rho(X_N)-\rho(X_{N\setminus\{j\}})\big)}$$

Cette méthode présente l'inconvénient de ne prendre en compte l'impact marginal des segments que sur l'ensemble du portefeuille, et non sur des sous-ensembles. La vérification de la propriété "no undercut" dépend de la spécificité de la méthode marginale utilisée et du contexte dans lequel elle est appliquée. Il est donc important de considérer les détails de chaque situation pour déterminer si cette propriété est respectée.

4.4.3 La méthode de Shapley

La méthode de Shapley, basée sur la théorie des jeux coopératifs, permet également la résolution d'un problème d'allocation d'un risque global entre segments. Elle améliore la méthode marginale en cela qu'elle prend en compte une vision marginale par rapport à tous les sous-ensembles contenant chaque segment.

La contribution au risque définie par la méthode de Shapley est donnée par :

$$\rho^{\mathrm{Sh}}(X_i/X) = \sum_{S \in D_i} \frac{(s-1)!\,(n-1)!}{n!} \left(\rho(X_S) - \rho(X_{S\setminus\{i\}})\right) = \sum_{S \in D_i} \frac{(s-1)!\,(n-1)!}{n!} I_i(1,S)$$

où $D_i = \{S \subset N \;/\; \mathrm{i} \in S\}$.

Cette méthode considère toutes les permutations possibles et attribue une valeur basée sur la contribution moyenne, ce qui permet de mieux capturer les synergies entre les risques. Elle est souvent considérée comme plus équitable car elle prend en compte les contributions de chaque ligne d'activité dans tous les contextes possibles, assurant ainsi une allocation plus juste.

Dans des situations où les interactions entre les segments sont complexes et non linéaires, la méthode de Shapley peut fournir une allocation plus précise et représentative des contributions réelles de chaque segment.

La méthode de Shapley vérifie les propriétés d'allocation complète, de symétrie et d'allocation sans risque. En revanche, elle n'est en général pas RORAC compatible et ne vérifie pas la propriété « No undercut ».

L'application de la méthode de Shapley nécessite l'évaluation du risque pour les $\mathbf{2^n - 1}$ coalitions possibles entre segments, ce qui peut impliquer des temps de calculs importants.

4.4.4 La méthode d'Euler

La méthode d'Euler alloue le risque global selon l'impact marginal infinitésimal de chaque segment.

La description de la méthode d'Euler utilise les notations suivantes :

La fonction est supposée continument différentiable.

La contribution au risque définie par la méthode d'Euler est donnée par :

$$\rho^{\mathrm{Eu}}(X_i/X) = \lim_{h \to 0} \frac{\rho(X_N) - \rho(X_N - hX_i)}{h} = \lim_{h \to 0} I_i(h,N)$$

La méthode d'Euler vérifie en général tous les critères de cohérence, cf. 6.1.

Le tableau suivant explicite la contribution au risque fourni par la méthode d'Euler pour certaines mesures de risque classiques. En pratique, ce type de calcul est délicat à mettre en œuvre, excepté dans le cas gaussien, pour lequel une approximation linéaire est possible.

La méthode Euler TVaR (Tail Value at Risk) est une variante qui utilise la TVaR comme mesure de risque. La TVaR, ou valeur en risque conditionnelle, prend en compte non seulement la probabilité de pertes extrêmes mais aussi leur ampleur moyenne au-delà d'un certain seuil. Cette méthode est particulièrement utile pour les risques avec des distributions de pertes asymétriques ou avec des queues lourdes.

Méthode d'Euler	Formule des contributions au risque	Formule explicite dans le cas gaussien
Mesure de risque Ecart-type	$\sigma^{Euler}(X_i/X) = \theta \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X}$	
Mesure de risque VaR_α	$VaR^{Euler}(X_i/X) = E[X_i \mid X = VaR_\alpha(X)]$	$VaR^{Euler}(X_i/X) = \mu_i + \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2}(VaR_\alpha(X) - \mu_X)$
Mesure de risque $TVaR_\alpha$	$TVaR^{Euler}(X_i/X) = E[X_i \mid X > VaR_\alpha(X)]$	$TVaR^{Euler}(X_i/X) = \mu_i + \frac{1}{1-\alpha}.cov(X_i, X).f_X(VaR_\alpha(X))$

4.5 Formulation dans le cas du SCR calculé par la formule standard

Dans le cas particulier de la formule standard[1], la dérivée partielle peut se simplifier par une formule très réduite. La méthode d'Euler est très facile à mettre en place pour les covariances simples :

$$\frac{\delta BSCR}{\delta SCR_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} corr_{ij} \times SCR_j}{BSCR}$$

Soit encore la formule suivante pour chaque SCR_i :

$$VaR^{Euler}(SCR_i|BSCR) = \frac{SCR_i}{BSCR} \times \left(SCR_i + \sum_{j \neq i}^{n} corr_{ij} \times SCR_j \right)$$

Exemple pour trois risques

$$\begin{aligned} SCR^2 = \; & SCR_a^2 + corr_{ab} \times SCR_a \times SCR_b + corr_{ac} \times SCR_a \times SCR_c && \rightarrow contribution\ du\ SCR_a \\ & + SCR_b^2 + corr_{ab} \times SCR_a \times SCR_b + corr_{bc} \times SCR_b \times SCR_c && \rightarrow contribution\ du\ SCR_b \\ & + SCR_c^2 + corr_{ac} \times SCR_a \times SCR_c + corr_{bc} \times SCR_b \times SCR_c && \rightarrow contribution\ du\ SCR_c \end{aligned}$$

$$contribution\ SCR_i(\%) = \frac{\rho(SCR_i)}{SCR} = \frac{\left({SCR_i}^2 + \sum_{i,j \neq i}^{n} corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j \right)}{SCR^2}$$

On vérifie facilement la propriété de « full allocation » :

$$\sum_{i}^{n} \rho(SCR_i) = \frac{\sum_i^n SCR_i^2 + 2 \times \sum_{i,j \neq i}^{n} corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j}{SCR} = \frac{SCR^2}{SCR} = SCR$$

- Interprétation graphique de la méthode d'Euler

Graphiquement, on peut représenter l'allocation de deux risques par la méthode d'Euler à l'aide de la hauteur issue de l'angle formé par les deux SCR, exemple pour 2 risques $SCR_A = 4$ et $SCR_B = 3$ non corrélés :

Le SCR agrégé est égal à :

$$SCR_{A+B} = \sqrt{SCR_A^2 + SCR_B^2 + 2 \times SCR_A \times SCR_B \times Corr_{AB}} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2 \times 4 \times 3 \times 0} = \sqrt{25} = 5$$

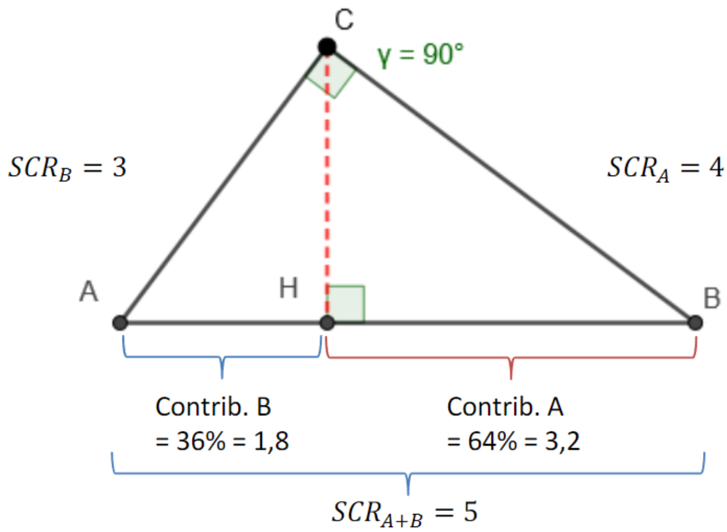
Les calculs de la contribution avec la méthode d'Euler sont les suivants :

$$VaR^{Euler}(SCR_A|SCR_{A+B}) = \frac{SCR_A}{SCR_{A+B}} \times (SCR_A + corr_{AB} \times SCR_B) = \frac{4}{5} \times (4 + 0 \times 3) = \frac{16}{5} = \mathbf{3,2}$$

$$VaR^{Euler}(SCR_B|SCR_{A+B}) = \frac{SCR_B}{SCR_{A+B}} \times (SCR_B + corr_{AB} \times SCR_A) = \frac{3}{5} \times (3 + 0 \times 3) = \frac{9}{5} = \mathbf{1,8}$$

Graphiquement, la hauteur issue du point C (angle formé selon la corrélation entre les 2 risques) sectionne le SCR en 2 contributions :

[1] Mémoire de Lucas Grandperrin « Allocation de capital : théorie et pratique de la méthode d'Euler »



Le principe peut être également appliqué pour 2 risques $SCR_A = 4$ et $SCR_B = 3$ corrélés par exemple à 25% :

Le SCR agrégé est égal à :

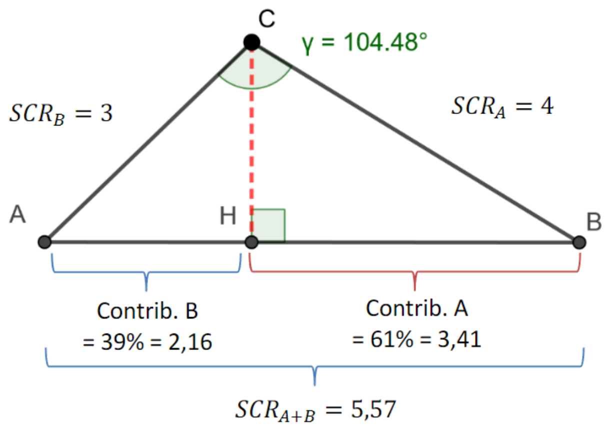
$$SCR_{A+B} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2 \times 4 \times 3 \times 25\%} = \sqrt{31} \cong 5{,}57$$

La formule de calcul donne les allocations suivantes :

$$VaR^{Euler}(SCR_A|SCR_{A+B}) = \frac{SCR_A}{SCR_{A+B}} \times (SCR_A + corr_{AB} \times SCR_B) = \frac{4}{5{,}57} \times (4 + 25\% \times 3) \cong \mathbf{3,41}$$

$$VaR^{Euler}(SCR_B|SCR_{A+B}) = \frac{SCR_B}{SCR_{A+B}} \times (SCR_B + corr_{AB} \times SCR_A) = \frac{3}{5{,}57} \times (3 + 25\% \times 4) \cong \mathbf{2,16}$$

Graphiquement, l'allocation par la méthode d'Euler s'interprète comme une projection orthogonale :



L'exercice peut être étendu à 3 risques $SCR_A = 7$, $SCR_B = 6$ et $SCR_C = 5$ non corrélés :

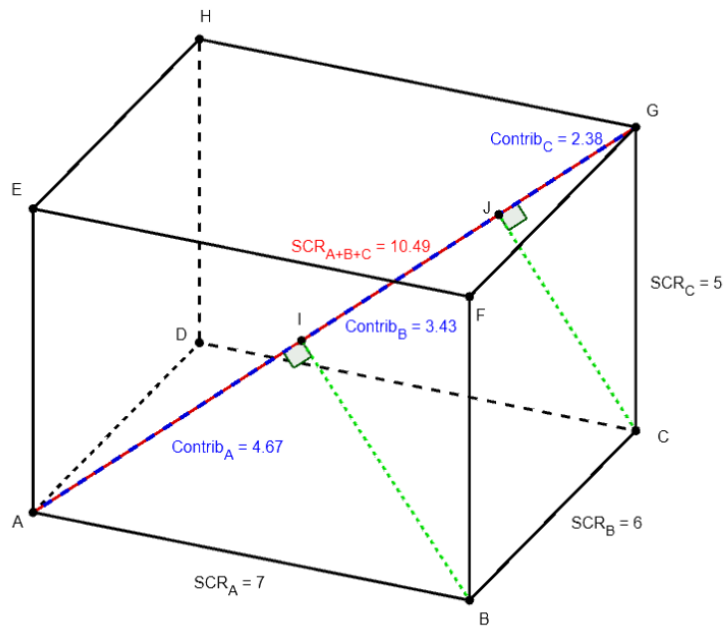
L'agrégation des 3 risques non corrélés est égale à :

$$SCR(A+B+C) = \sqrt{{SCR_A}^2 + {SCR_B}^2 + {SCR_C}^2} = \sqrt{7^2+6^2+5^2} = \sqrt{110} = 10{,}49$$

Les formules nous donnent l'allocation suivante :

$$VaR^{Euler}(SCR_A|SCR_{A+B+C}) = \frac{SCR_A^2}{SCR_{A+B+C}} = \frac{7^2}{10{,}49} \cong \mathbf{4,67}$$
$$VaR^{Euler}(SCR_B|SCR_{A+B+C}) = \frac{SCR_B^2}{SCR_{A+B+C}} = \frac{6^2}{10{,}49} \cong \mathbf{3,43}$$
$$VaR^{Euler}(SCR_C|SCR_{A+B+C}) = \frac{SCR_C^2}{SCR_{A+B+C}} = \frac{5^2}{10{,}49} \cong \mathbf{2,38}$$

Soit la représentation graphique :



Dans le cas pratique du SCR santé, où le module Cat (C) est corrélé à 25% avec les modules SLT (A) et Non SLT (B), et les modules SLT et non SLT corrélés entre eux à 50% :

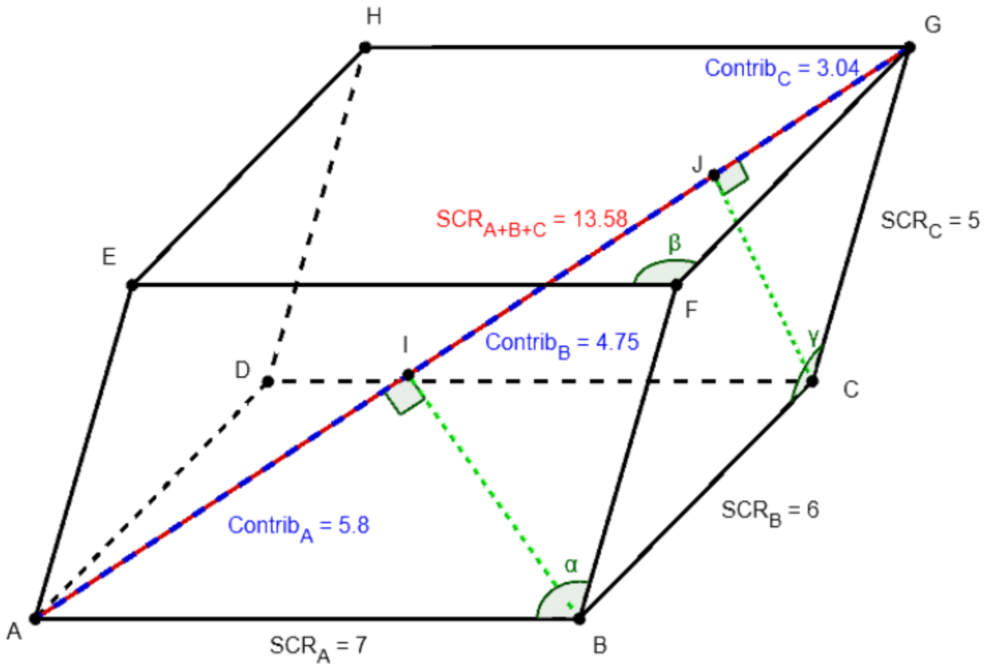
L'agrégation de ces risques sous la formule standard est la suivante :

$$SCR_{A+B+C} = \sqrt{6^2+7^2+5^2+2\times(50\%\times6\times7+25\%\times7\times5+25\%\times6\times5)} \cong 13{,}58$$

La formule d'allocation avec la méthode d'Euler nous donne les contributions pour chacun des risques :

$$VaR^{Euler}(SCR_A|SCR_{A+B+C}) = \frac{SCR_A}{SCR_{A+B+C}} \times (SCR_A + corr_{AB} \times SCR_B + corr_{AC} \times SCR_C)$$
$$= \frac{7}{13{,}58} \times (7 + 6 \times 50\% + 5 \times 25\%) \cong \mathbf{5{,}80}$$
$$VaR^{Euler}(SCR_B|SCR_{A+B+C}) = \frac{SCR_B}{SCR_{A+B+C}} \times (SCR_B + corr_{AB} \times SCR_A + corr_{BC} \times SCR_C)$$
$$= \frac{6}{13{,}58} \times (6 + 7 \times 50\% + 5 \times 25\%) \cong \mathbf{4{,}75}$$
$$VaR^{Euler}(SCR_C|SCR_{A+B+C}) = \frac{SCR_C}{SCR_{A+B+C}} \times (SCR_C + corr_{BC} \times SCR_B + corr_{AC} \times SCR_A)$$
$$= \frac{5}{13{,}58} \times (5 + 6 \times 25\% + 7 \times 25\%) \cong \mathbf{3{,}04}$$

Graphiquement, l'agrégation correspond à la distance entre les vecteurs ; l'allocation par la méthode d'Euler est issue des projections orthogonales des sommets caractérisant les corrélations des risques 2 à 2. Les angles sont calculés selon le tableau de correspondance paragraphe 3.2.



- Ratios d'allocation de la méthode d'Euler :

La méthode d'Euler étant une méthode marginale infinitésimale, les ratios d'allocation correspondent aux dérivées partielles premières.

$$BSCR = ra_{Marché} X SCR_{Marché} + ra_{Défaut} X SCR_{Défaut} + ra_{Santé} X SCR_{Santé} + ra_{Vie} X SCR_{Vie} + ra_{Non\ vie} X SCR_{non\ vie}$$

Grâce à la formule de Taylor, nous pouvons utiliser ces ratios d'allocation comme facteurs de sensibilité pour approximer l'impact d'un delta de SCR_i sur le BSCR net :

$$BSCR(SCR_i + \Delta_i) \cong BSCR(SCR_i) + \Delta_i \text{ X } ra_i$$

En pratique pour le BSCR, l'allocation du capital consiste à linéariser sa formule à l'aide des facteurs « ratios d'allocation », $ra_i < 1$:

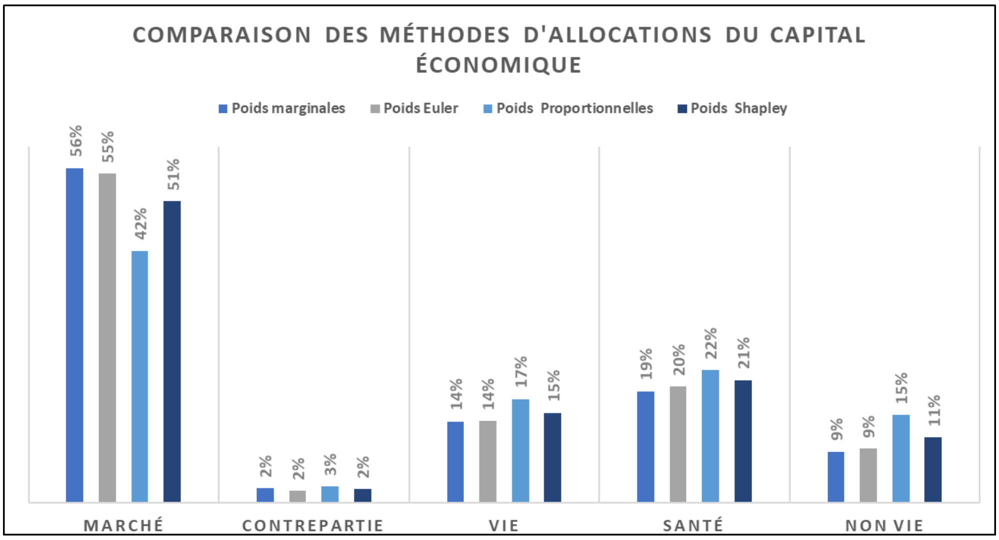
$$BSCR = ra_{Marché} XSCR_{Marché} + ra_{Défaut} XSCR_{Défaut} + ra_{Santé} XSCR_{Santé} + ra_{Vie} XSCR_{Vie} + ra_{Non\ vie} XSCR_{non\ vie}$$

5. Illustrations et résultats

5.1 Les différences d'allocation du SCR selon les méthodes retenues

Ci-dessous les résultats pour un profil d'organisme mixte type.

	SCR (M€)	Proportionnelle	Marginale	Shapley	Euler
BSCR	49,5	100%	100%	100%	100%
Marché	31,9	42%	56%	51%	55%
Défaut	2,1	3%	2%	2%	2%
Vie	13,1	17%	14%	15%	14%
Santé	16,8	22%	19%	21%	20%
Non vie	11,1	15%	9%	11%	9%



Les méthodes d'Euler et marginales présentent des résultats similaires.
Seule la méthode proportionnelle s'éloigne des autres méthodes, en sous-pondérant le risque majoritaire.

5.2 Application de la méthode marginale pour le calcul des indicateurs de rentabilité pour l'assurance vie

Impact des Affaires Nouvelles sur les indicateurs de capital[2]

Les affaires nouvelles de l'assurance vie ont un impact significatif sur les indicateurs de capital, notamment sur :

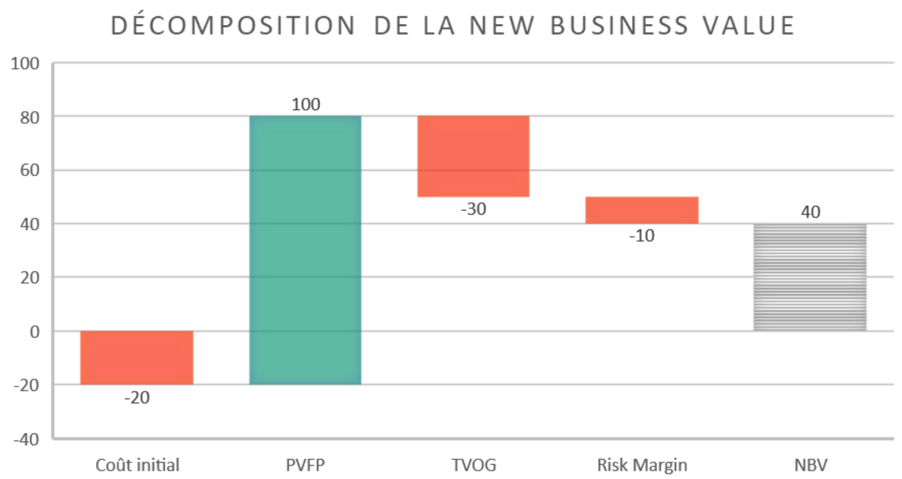
- Les fonds propres S2 (impact *Value In Force* (VIF) et *Risk Margin* (RM));
- Les SCR & Profils de risque.

La VIF représente, en assurance vie, la somme des flux futurs de résultats statutaires actualisés, calculée selon deux visions :

- **Vision déterministe (PVFP)** : calculée à partir d'un scénario central déterministe ;
- **Vision stochastique (VIF)** : moyenne des marges futures actualisées sur plusieurs scénarios.
  - ⇨ La différence entre ces deux visions est mesurée par la *Time Value of Options and Guarantees* (TVOG).

Quelques indicateurs de suivi de création de valeur des affaires nouvelles

La *New Business Value* (NBV) mesure la création de valeur d'une année de production nouvelle et indique la profitabilité des affaires nouvelles. Elle représente l'impact des affaires nouvelles sur les fonds propres S2 (~ VIF - RM).



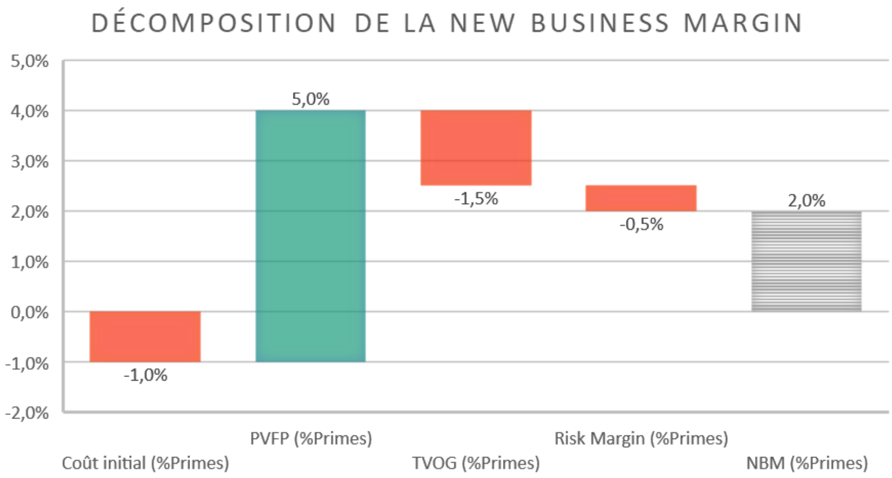
La NBV prend en compte :

- (-) Coût de l'investissement initial : commissions et frais d'acquisition nets des chargements sur primes
- (+) PVFP : sommes des marges futures actualisées des affaires nouvelles
- (-) TVOG : Coût des options et des garanties associées aux affaires nouvelles
- (-) *Risk Margin* : impact des affaires novelles sur la *Risk margin*

---

[2] Cette section se concentre sur l'assurance vie, mais l'assurance non vie pourrait également utiliser des indicateurs similaires.

La **New Business Margin (NBM)**, calculée en divisant la NBV par le volume de primes projetées actualisées (PVNBP), évalue la valeur actualisée des marges futures potentielles générées par 1€ d'affaires nouvelles.



Le SCR (NB) permet également de quantifier l'impact des affaires nouvelles sur le capital à immobiliser et sur le profil de risque (risque de rachat, mortalité, taux technique, ...).

D'autres indicateurs pourront être utilisés pour suivre la contribution des affaires nouvelles à la création de valeur (impact CSM en IFRS 17, ...).

Méthode de calcul des indicateurs de création de valeur des affaires nouvelles (NBV/SCR) : **méthode marginale**

La méthode standard utilisée pour le calcul des indicateurs de création de valeur des affaires nouvelles est la méthode marginale. Cette approche évalue la valeur comme la différence entre :

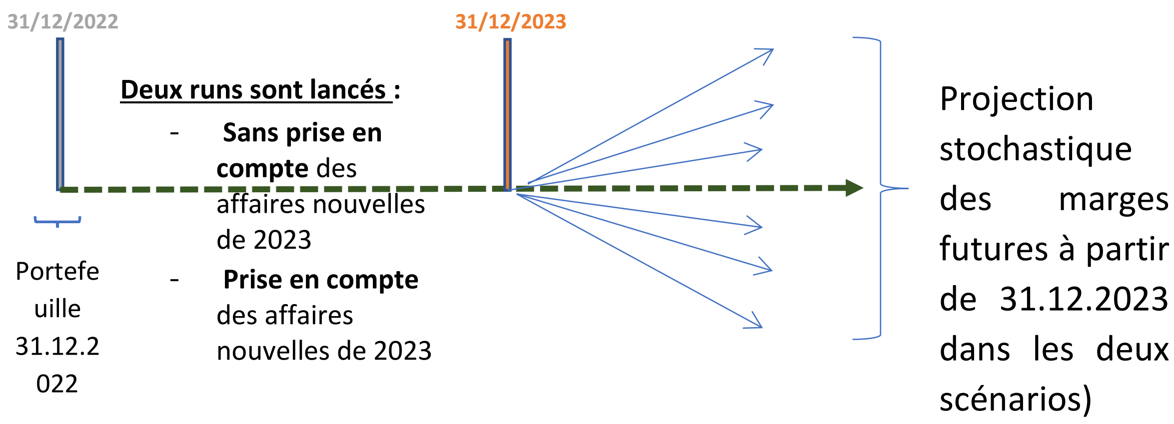
1. La valeur du portefeuille en intégrant une année d'affaires nouvelles (Stock + 1 année d'affaires nouvelles).
2. La valeur du portefeuille sans cette année d'affaires nouvelles (Stock).

$$VIF_{NB} = VIF_{Stock\ \&\ NB} - VIF_{Stock}$$

$$RM_{NB} = RM_{Stock\ \&\ NB} - RM_{Stock}$$

$$SCR_{NB} = SCR_{Stock\ \&\ NB} - SCR_{Stock}$$

Ainsi, cette méthode permet de mesurer à la fois la valeur intrinsèque du portefeuille de New Business et l'impact de celui-ci, lié à la mutualisation des richesses, sur la valeur totale du stock.



Deux projections sont utilisées pour le calcul de la valeur de NB :

- Projection actif /Passif à partir de 31.12.22, <u>sans prise</u> en compte des affaires nouvelles de 2023
- Projection actif /Passif à partir de 31.12.22, <u>avec prise</u> en compte des affaires nouvelles de 2023

Chaque nouvelle prime (AN/VL) qui entre sur le fond Euro est investie selon les conditions de marché.

<u>Conditions économiques et création de valeur des affaires nouvelles</u>

En assurance vie, l'impact des affaires nouvelles sur la création de valeur est fortement corrélé aux conditions économiques. En effet, chaque nouvelle prime (AN/VL) qui entre sur le fond Euro est investie selon les conditions économiques du moment et pourra avoir un impact positif ou négatif sur le rendement du stock.

Environnement de taux bas	**Environnement de taux haut**
- Les nouvelles primes sont investies sur des actifs de moindre rendement en comparaison du rendement du stock, qui bénéficie de la richesse passée. - Cela induit une dégradation du rendement du portefeuille année après année que l'on appelle « dilution », ce qui génère des pertes sur le stock, en particulier lorsque les taux garantis sur le stock sont élevés. - La NBV, avec la méthode marginale, représente donc les résultats des AN une fois prise en compte la dégradation générée sur le stock par cet effet dilution. - Le SCR se dégrade suite à la baisse des taux (se rapprocher de la garantie)	- Les nouvelles primes sont investies sur des actifs de rendement supérieur au rendement du stock. - Cela induit une amélioration du rendement du portefeuille, que l'on appelle « relution», ce qui génère un gain sur le stock, en particulier lorsque les taux garantis sur le stock sont élevés. - La NBV, avec la méthode marginale, représente donc les résultats des AN une fois prise en compte l'amélioration générée sur le stock par cet effet relution. - Le SCR s'améliore suite à la hausse des taux - Une hausse brutale des taux pourrait avoir un impact défavorable sur les métriques de capital (déclenchement des rachats)

6. Points d'attention

6.1 Les contrôles pour valider l'allocation (RORAC compatibilité)

Nous considérons les notations suivantes associées à une allocation du capital économique :

- X le portefeuille global considéré ;
- $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'ensemble des segments correspondant au portefeuille global X ;
- $\rho(X_\alpha)$ le risque associée à partir de la mesure ρ pour tout sous-ensemble $X_\alpha \subseteq X$;
- $\rho^\lambda(X_i/X)$ la contribution marginale du segment i au risque global, sous la méthode d'allocation λ et la mesure de risque ρ ;
- N l'ensemble des n segments sur lesquels le capital consolidé est alloué ;
- S un sous-ensemble de n segments sur lesquels le capital consolidé est alloué : $S \subseteq N$
- K le capital consolidé à allouer ;
- K_i le capital alloué au segment i : $K = \sum_{1 \leq i \leq n} K_i$.

Définition (ROE) : Le ROE, ou Return on Equity, est un indicateur financier qui mesure la rentabilité d'une entreprise par rapport à ses fonds propres :

$$ROE(X) = \frac{Résultat\ de\ l'activité\ X}{Fonds\ propres\ liés\ à\ l'activité\ X} = \frac{E[X]}{FP(X)}$$

Une compagnie d'assurance bénéficiant d'un certain montant de fonds propres sur lequel elle ne peut rien à l'instant t, elle cherche à maximiser son ROE. Cette compagnie d'assurance cherche donc à tendre vers un portefeuille optimal X_{opt} tel que :

$$ROE\left(X_{opt}\right) = max(ROE(X)|FP)$$

Afin de respecter son BGS, il existe $\alpha > 100\%$[3] tel que :

$$FP(X) = \alpha \times \rho(X)$$

Définition (RORAC) : Le RORAC, ou Return on Risk-Adjusted Capital, est une mesure financière utilisée dans le secteur financier pour évaluer la rentabilité d'une activité ou d'un projet en tenant en compte du niveau de risque associé.

Le RORAC lié au portefeuille X est alors calculé ainsi :

$$RORAC(X) = \frac{Résultat\ de\ l'activité\ X}{Risque\ relatif\ à\ l'activité\ X} = \frac{E[X]}{\rho(X)}$$

Le risque ρ relatif à une activité d'assurance peut alors être mesuré selon plusieurs mesures de risque : écart-type, VaR, TVaR, CTE...

En assurance, afin d'accepter des risques relatifs à une activité d'assurance, il faut immobiliser un certain montant de capital, permettant de prendre du risque tout en respectant le BGS et l'appétence aux risques d'une compagnie d'assurance. Ainsi, une entreprise d'assurance cherche à maximiser son RORAC afin de maximiser son résultat compte tenu du capital qu'elle possède pour exercer son activité d'assurance.

Parmi les cinq propriétés permettant de vérifier si une méthode d'allocation du capital économique est cohérente (cf. 4.3.2), la propriété la plus intéressante est la RORAC compatibilité. Si cette propriété est

[3] α correspondant par exemple au taux de couverture moyen cible de l'entreprise d'assurance.

respectée, cela veut dire que développer le segment X_i au sein du portefeuille global X permet d'augmenter le RORAC global, donc in fine le ROE, c'est-à-dire s'approcher du portefeuille optimal X_{opt}.

Les méthodes d'allocation du capital économique ne respectent généralement pas l'ensemble des propriétés d'une méthode d'allocation cohérente :

Méthode	Full allocation	RORAC compatibilité	Symétrie	No undercut	Riskless allocation
Proportionnelle	Oui (non naturel)	Non	Non	Non	Oui
Marginale	Oui (non naturel)	Non	Non	Non	Oui
Shapley	Oui	Non	Oui	Non	Oui
Euler – covariance	Oui	Sous conditions	Oui	Non	Oui
Euler – VaR	Oui	Sous conditions	Oui	Non	Oui
Euler – TVaR	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui

Il existe toutefois des cas particuliers où certaines propriétés d'une méthode d'allocation cohérente sont vérifiées. Par exemple, la propriété No undercut est vérifiée pour la méthode Euler – VaR si les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ suivent des lois normales ou log-normales. Cela provient du fait que la VaR devient une mesure de risque cohérente[4] lorsqu'elle est appliquée à un ensemble de variables aléatoires suivant des lois normales ou log-normales.

De même, bien qu'elles ne vérifient pas la propriété de RORAC compatibilité (impossible compte tenu que ces méthodes se basent sur des segments atomiques) donc que l'on ne peut pas garantir une solution X_{opt}, les méthodes marginale et de Shapley permettent d'améliorer malgré tout le RORAC du portefeuille global, car les corrélations sont prises en compte pour allouer le capital sur l'ensemble des segments sur lesquels ce capital peut être alloué.

Dans des contextes où les synergies et les interactions complexes entre les segments de risque ou les divisions sont importantes, la méthode de Shapley peut être mieux adaptée que la méthode d'Euler pour assurer une allocation de capital équitable et précise.

Des études ont permis de montrer empiriquement que l'allocation du capital économique selon les méthodes marginale et de Shapley ne variaient pas significativement de l'allocation du capital économique selon la méthode d'Euler, mais cela n'a jamais été démontré mathématiquement. Il convient donc d'être prudent lors de l'utilisation de ces méthodes.

[4] Cf. les quatre axiomes posés par Artzner, Delbaen, Eber et Heath sur les mesures de risques cohérentes.

6.2 Considérations sur les fonds propres et la marge de risque

- *Nature des fonds propres*

Un organisme d'assurances détient des fonds propres éligibles *(Eligible Own Funds)* qui peuvent être de différentes natures selon leur qualité (capacité à absorber des pertes et conditionnalité de mobilisation en cas de faillite) :

- Capital « Tier 1 » *(Tier_1)* qui se divise en 2 catégories :
    - Capital non restreint « Tier 1 » avec mécanismes d'absorption des pertes, composé essentiellement *(Unrestricted Tier 1 ou UT1)* :
        - du capital en actions, actions de préférence, certificats mutualistes ou paritaires etc. et la prime d'émission afférente, le fonds initial, cotisations des membres ou tout élément de fonds propres de base pour les mutuelles et institutions de prévoyance
        - de la réserve de réconciliation
        - des fonds excédentaires liés à la part éligible de provision pour participation aux excédents (depuis 2019)
    - Capital restreint « Tier 1 » *(RT1)* composé essentiellement de dettes subordonnées (intra-groupes ou externes) perpétuelles avec mécanisme d'absorption des pertes sur le principal ;
- Capital « Tier 2 » *(Tier_2)* composé essentiellement de dettes subordonnées (intra-groupes ou externes) datées d'au moins 10 ans de durée pouvant comporter des incitations limitées à rembourser après 10 ans
- Capital « Tier 3 » *(Tier_3)* composé de dettes subordonnées datées de moins de 5 ans pouvant comporter des incitations limitées à rembourser, de lettres de crédit, des impôts différés actifs nets etc.

Des règles spécifiques régissent sous Solvabilité 2 les proportions entre ces types de fonds propres. Elles visent à conserver une forte part de fonds propres « tangibles » et limiter la part de fonds propres pouvant être restreints en cas de faillite de l'organisme d'assurances et maximiser ceux pouvant in fine absorber des pertes éventuelles sans conditions.

Ainsi, les règles d'écrêtement pour déterminer les fonds propres éligibles mêlent des critères de ratio entre les fonds propres et le SCR ou le MCR, et des critères de proportion entre les types de fonds propres Tiers 1, 2 ou 3 :

- La dette subordonnée éligible en Tier 1 restreint (UT1) ne peut représenter plus de 20% du montant total des éléments de fonds classés en Tier 1 : RT1 <= 20% * (UT1 + RT1), donc en creux le capital non restreint UT1 doit être au moins égal à 80% de tous les fonds propres classés en Tier 1 ;
- Au moins 50% des fonds propres (éligibles pour couvrir le SCR ou séparément pour le MCR) doivent être classés en Tier 1 : Tier_1 = (UT1 + RT1) >= 50% * Fonds_Propres avec Fonds_Propres = Tier_1 + Tier_2 + Tier_3
- Le Tier 2 et le Tier 3 ne peuvent pas être ensemble supérieurs à 50% du SCR : Tier_2 + Tier_3 <= 50% * SCR, et donc en creux, le Tier 1 doit représenter au moins 50% du SCR ;

- Le Tier 3 ne peut excéder 15% du SCR : Tier_3 <= 15%* SCR, et donc en creux, le maximum de Tier 2 éligible est compris entre 35% et 50% du SCR suivant la taille du Tier 3 ;
- Le MCR doit être couvert par au moins 80% d'éléments Tier 1 : Tier_1 = (UT1+RT1) >= 80% * MCR
- Le Tier 3 n'est jamais éligible en fonds propres en regard de la couverture du MCR

L'application de ces règles peut rendre une partie des dettes subordonnées Tier 1 ou Tier 2, ou encore les impôts différés en Tier 3, non éligibles pour la couverture du SCR par écrêtement des catégories précédentes (puisque le remplissage de UT1 prime sur celui du RT1, lui-même sur le Tier 2 qui lui-même prévaut sur le Tier 3), par qualité de fonds propres décroissante. Il en est de même pour le MCR qui est traditionnellement alimenté par du Tier_1 et une partie du Tier_2, mais jamais de Tier 3 (non éligible).

En résumé, voici les ratios requis par la réglementation Solvabilité 2 :

(en pourcentage)	Seuil
Rapport RT1 / Tier_1	<=20%
Rapport Tier_1 / Fonds_Propres pour SCR	>=50%
Rapport (Tier_2 + Tier_3) / SCR	<=50%
Rapport Tier_3 / SCR	<=15%
Rapport Tier_1 / MCR	>=80%
Rapport Tier_1 / Fonds_Propres pour MCR	>=50%
Rapport Tier 3 / MCR	=0%

La présence d'autres éléments que les fonds propres non restreints Tier 1 (UT1), donc essentiellement les dettes subordonnées, une part de PPE éligible ou encore les impôts différés, va modifier le caractère approprié de l'analyse du rapport Résultat_net / Fonds_Propres puisque dans ce cas, les fonds propres mélangent des instruments avec des objectifs intrinsèquement différents : ceux de l'actionnaire ou équivalent qui détient des actions ou équivalents et va s'attendre à un retour sous la forme de dividendes et de plus-values à terme ; ceux du détenteur de dette subordonnée qui va s'attendre à recevoir son coupon (ni plus ni moins) et à être remboursé au terme prévu (ou à voir la dette demeurer perpétuelle ou être rachetée au pair) ; ceux des assurés via la PPE éligible qui veulent essentiellement maximiser le rendement financier et éviter la faillite de l'organisme d'assurances afin de garantir leurs droits futurs ; l'Etat en tant que préleveur d'impôts qui voudra maximiser le résultat net taxable sous contrainte de viabilité de l'organisme d'assurances, etc. En outre le résultat net lui-même va être affecté par des éléments ne relevant pas de l'activité ordinaire de l'organisme d'assurances, comme les coupons à payer sur les dettes subordonnées ou l'utilisation des impôts différés. Il peut donc être opportun de présenter deux ratios facilement calculables : Résultat_Net / RT1 et Résultat_Net / Fonds_Propres. Le premier vise à présenter le rendement annuel d'un actionnaire détenteur du capital en actions, sans impact au dénominateur du reste des éventuels autres éléments éligibles en fonds propres (mais avec maintien de leur impact – type coupons – au numérateur).

Dans le cadre de cette note, nous avons supposé que l'organisme d'assurances ne détenait que des fonds propres restreints RT1 (actions ou équivalents). Le numérateur Résultat_Net n'est donc pas impacté par la détention d'une dette subordonnée, l'existence d'impôts différés etc. Le dénominateur se focalise sur le capital apporté par l'actionnaire, l'*equity*. On peut donc l'appeler *Cost of Equity*, COE.

- *Marge de risque*

Les environnements *risk based* intègrent la notion de marge de risque dans les provisions techniques.

La Directive Solvabilité 2 définit cette marge comme une réserve de prudence visant à refléter le coût du capital immobilisé par les exigences de capital liées à la détention de risques d'assurance, jusqu'à leur extinction. Elle est calculée par la méthode du coût du capital :

- En projetant et actualisant les exigences de capital futures du portefeuille en situation de *run off*,
- Puis en les multipliant par un paramètre de coût en capital.

L'Article 38-1 du Règlement délégué 2015/35 impose un calcul global de la marge de risque :

$$RM = CoC \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{(1 + r(t+1))^{t+1}}$$

où:

(a) CoC représente le taux de coût du capital;

(b) la somme couvre tous les entiers relatifs, zéro compris;

(c) SCR(t) représente le capital de solvabilité requis visé à l'article 38, paragraphe 2, après t années;

(d) r(t + 1) représente le taux d'intérêt sans risque de base pour l'échéance t + 1 années.

Le taux d'intérêt sans risque de base r(t + 1) est choisi en fonction de la monnaie dans laquelle sont établis les états financiers de l'entreprise d'assurance ou de réassurance.

Le paragraphe 3 du même Article exige une répartition de cette marge par ligne d'activité, selon une méthode qui respecte les contributions de chacune de ces lignes :

3. Les entreprises d'assurance et de réassurance affectent la marge de risque pour le portefeuille global d'engagements d'assurance et de réassurance aux lignes d'activité visées à l'article 80 de la directive 2009/138/CE. Cette affectation reflète correctement les contributions des lignes d'activité au capital de solvabilité requis visé à l'article 38, paragraphe 2, sur la durée de vie du portefeuille global d'engagements d'assurance ou de réassurance.

Les méthodes d'allocation du SCR permettent d'adopter une méthodologie structurée qui reflète l'importance de chaque ligne d'affaires dans chaque SCR_t., pour ensuite reconstituer les contributions de chaque activité à la marge de risque.

6.3 Stabilité de l'allocation

La stabilité de l'allocation est cruciale pour le pilotage du capital. Une allocation stable permet aux organismes de planifier à moyen/long terme, en optimisant les coûts d'acquisition de portefeuilles et en sécurisant également la croissance économique. Par ailleurs, des changements stratégiques brusques peuvent déstabiliser les marchés : les investisseurs sont plus enclins à investir dans des environnements où l'allocation du capital est prévisible et stable.

On se place ici dans l'environnement Solvabilité 2, en formule standard.

Le SCR est calculé de la façon suivante :

$$SCR = BSCR + SCR_{Op} + Adj$$

Avec :

$$BSCR = f((SCR_i)_{1 \leq i \leq n})$$

Pour la méthode d'Euler, les segments sont supposés continus. Le ratio d'allocation lié à SCR_i correspondant donc à :

$$RA_{SCR_i} = \frac{\partial BSCR}{\partial SCR_i}$$

Remarque : compte tenu de la manière dont le SCR est calculé à partir du BSCR, le ratio d'allocation pourrait également correspondre à la dérivée partielle du SCR global.

Le ratio d'allocation peut varier :

- Si SCR_i varie ;
- Si $SCR_j, j \neq i$ varie.

Supposons que l'on ait la compagnie d'assurance vie ayant les caractéristiques suivantes :

En M€	SCR
BSCR	20
SCR Marché	15
SCR Vie	10

Le ratio d'allocation selon la méthode d'Euler s'obtient directement via la matrice de corrélation entre SCR Vie et SCR Marché :

En M€	SCR	Ratio d'allocation
BSCR	20	
SCR Marché	15	88%
SCR Vie	10	69%

La situation, si le SCR Marché passe à 20 millions d'euros, devient la suivante :

En M€	SCR	Ratio d'allocation
BSCR	24	
SCR Marché	20	92%
SCR Vie	10	61%

La situation de l'entreprise, si le SCR Vie passe à 15 millions d'euros, devient la suivante :

En M€	SCR	Ratio d'allocation
BSCR	24	
SCR Marché	15	79%
SCR Vie	15	79%

Ainsi, il faut étudier :

$$\forall\, 1 \leq i,j \leq n, \frac{\partial RA_{SCR_i}}{\partial SCR_j}$$

C'est-à-dire :

$$\forall\, 1 \leq i,j \leq n, \frac{\partial^2 BSCR}{\partial SCR_i\, \partial SCR_j}$$

Pour rappel :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j}$$

Pour calculer RA_{SCR_i}, on passe par le calcul de la dérivée partielle $\frac{\partial(BSCR^2)}{\partial SCR_i}$:

$$\frac{\partial BSCR}{\partial SCR_i} = \frac{\frac{\partial(BSCR^2)}{\partial SCR_i}}{2 \times BSCR}$$

Avec :

$$\frac{\partial(BSCR^2)}{\partial SCR_i} = \frac{\partial(SCR_i^2)}{\partial SCR_i} + 2\sum_{k\neq i} Corr_{i,k} \frac{\partial SCR_i}{\partial SCR_i} SCR_k = 2\left(SCR_i + \sum_{k\neq i} Corr_{i,k} SCR_k\right)$$

Ainsi :

$$RA_{SCR_i} = \frac{\partial BSCR}{\partial SCR_i} = \frac{SCR_i + \sum_{k\neq i} Corr_{i,k} SCR_k}{BSCR}$$

Compte tenu que $Corr_{i,i} = 1$, on peut écrire que :

$$\frac{\partial^2 BSCR}{\partial SCR_i\,\partial SCR_j} = \frac{Corr_{i,j}\frac{\partial SCR_j}{\partial SCR_j}BSCR - \left(SCR_i + \sum_{k\neq i} Corr_{i,k}SCR_k\right)\frac{\partial BSCR}{\partial SCR_j}}{BSCR^2}$$
$$= \frac{Corr_{i,j} \times BSCR - BSCR \times RA_{SCR_i} \times RA_{SCR_j}}{BSCR^2}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial RA_{SCR_i}}{\partial SCR_j} = \frac{Corr_{i,j} - RA_{SCR_i}RA_{SCR_j}}{BSCR}$$

Qui a pour cas particulier (i = j) :

$$\frac{\partial RA_{SCR_i}}{\partial SCR_i} = \frac{1 - RA^2_{SCR_i}}{BSCR}$$

En formule standard, la corrélation entre le SCR Marché et le SCR Vie est de 25%. Cela donne, sur notre situation précédente :

En m€	SCR	Ratio d'allocation	Dérivée seconde	
			SCR Marché	SCR Vie
BSCR	24			
SCR Marché	15	88%	0,012	-0,018
SCR Vie	10	69%	-0,018	0,026

Remarque : le signe de la dérivée partielle croisée, lorsque $j \neq i$, est intéressant à étudier :

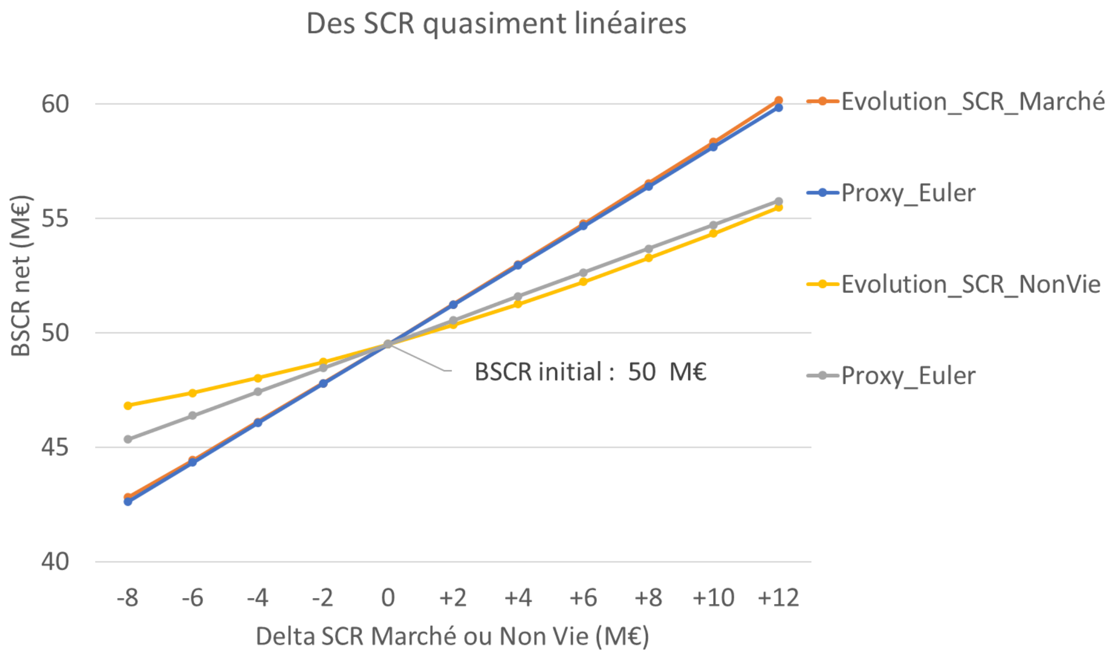
- S'il est positif, alors RA_{SCR_i} augmente lorsque SCR_j augmente, donc SCR_i prend davantage de poids dans le BSCR donc la diversification diminue ;
- S'il est négatif, alors RA_{SCR_i} diminue lorsque SCR_j augmente, donc SCR_i prend moins de poids dans le BSCR donc la diversification augmente.

Dans notre cas pratique, la dérivée croisée est négative, ce qui correspond parfaitement aux variations unitaires de 5 millions d'euros de SCR Marché et de SCR vie réalisées précédemment.

Plus le ratio d'allocation est élevé, plus l'allocation est stable.

En pratique, le SCR est quasiment linéaire tant qu'on s'éloigne relativement peu de la situation initiale.

Le graphe suivant compare l'évolution du SCR cf.5.1., en fonction d'un delta appliqué au SCR Marché (ratio d'allocation 86%) et au SCR Non Vie (ratio d'allocation 52%). Les proxys Euler correspondent à des tangentes au point initial avec pour coefficient directeur le ratio d'allocation.



On constate que l'impact d'une évolution du SCR Marché est très bien approximé par le ratio d'allocation Euler, même pour un écart de +10M€ par rapport au SCR Marché initial de 32M€.

En revanche, l'approximation pour le SCR Non Vie n'est pas fiable pour de fortes variations à la baisse (-4M€ par rapport au SCR Non Vie initial de 11M€).

Plus le ratio d'allocation est élevé, meilleur est le proxy Euler.

Illustration : analyse des évolutions de SCR d’un inventaire à l’autre.

Le tableau ci-dessous compare les SCR de l’année N à ceux de l’année N+1.

Pour simplifier, seuls les SCR marché et non vie ont évolué, entraînant une hausse du SCR net de 1,6 M€.

Il est possible d’approximer la ventilation de cette hausse entre les SCR marché (+1,16 M€) et non vie (+0,45 M€) à l’aide des ratios d’allocation d’Euler :

M€	SCR N	SCR N+1	Var N+1 / N (Δ)	ratios d'allocation N (ra)	Proxy Euler sur le BSCR = (Δ) X (ra)
marché	31,9	33,2	+1,3	86%	+1,16
contrepartie	2,1	2,1	-	47%	-
vie	13,1	13,1	-	52%	-
santé	16,8	16,8	-	58%	-
non vie	11,1	12,2	+1,1	41%	+0,45
Capital requis avant div.	75,0	77,5	+2,5		
Diversification	25,5	26,4	+0,8		
BSCR	49,5	51,1	+1,6		+1,61

En revanche, les proxys perdent en pertinence à mesure qu’on descend dans la « pieuvre » et que les ratios d’allocation diminuent. Par exemple si les deltas s’appliquent sur les SCR concentration ou risques de primes/réserves et cat non-vie, on explique 1,5 M€ de variation sur 1,6 M€.

A noter qu’il est intéressant de pouvoir expliquer une variation du SCR marché à la hausse alors que la somme des SCR sous-jacents a globalement diminué avant effets de diversification (le SCR action a augmenté de 2 M€, le SCR concentration a diminué de 3 M€, mais le SCR marché a augmenté de 1,3 M€).

M€	SCR N	SCR N+1	Var N+1 / N	ratios d'allocation N	Proxy Euler sur le BSCR = (Δ) X (ra)
taux	1,0	1,0	-	48%	-
action	15,0	17,0	+2,0	79%	+1,58
immo	16,0	16,0	-	78%	-
spread	2,0	2,0	-	59%	-
FX	0,6	0,6	-	25%	-
conc.	7,0	4,0	-3,0	19%	-0,57
Capital requis avant div.	41,6	40,6	**-1,0**		
Diversification	9,7	7,4	-2,3		
SCR marché	31,9	33,2	+1,3		
Contribution au BSCR					+1,01

M€	SCR N	SCR N+1	Var N+1 / N	ratios d'allocation N	Proxy Euler sur le BSCR = (Δ) X (ra)
Risque de primes / réserves	10,0	11,0	+1,0	39%	+0,39
Risque CAT	3,0	3,3	+0,3	20%	+0,06
Capital requis avant div.	13,0	14,3	+1,3		
Diversification	1,9	2,1	+0,2		
SCR non-vie	11,1	12,2	+1,1		
Contribution au BSCR					+0,45

6.4 Impact sur la gouvernance de l'organisme

Les outils d'allocation du capital servent de support aux prises de décision stratégiques et tactiques. Ils doivent donc être en cohérence avec les objectifs des organismes, qu'ils fassent partie de l'économie sociale ou des sociétés capitalistiques. Même si la question de la rentabilité sur capital est moins prégnante chez les mutuelles, l'utilisation de leur fonds propres fait partie de leur stratégie. Des arbitrages doivent être faits entre les risques, notamment entre les risques de marché et les risques de souscription.

Les organismes peuvent privilégier leur cœur de métier, et donc choisir une méthode qui alloue moins de capital sur leurs segments prioritaires.

7. Groupes et filiales

7.1 Préambule

La notion de filiale et de groupe est à définir. Par la suite, nous considérons qu'une filiale est une entreprise pour laquelle le groupe possède une participation. La participation n'est pas nécessairement égale à 100%, et ni même nécessairement supérieure ou égale à 50%. Le groupe peut ensuite se considérer comme acteur de la vie de la filiale, ou comme simple investisseur.

La relation entre groupe et filiale est fondamentale dans l'élaboration d'un calcul d'allocation du capital économique :

- Une filiale peut réaliser un calcul d'allocation du capital économique pour sa gestion en interne, tandis qu'un groupe peut ne pas réaliser de calcul de capital économique ;
- Un groupe peut réaliser un calcul d'allocation du capital économique sans pour autant imposer un calcul d'allocation du capital économique à ses filiales :
  - Soit aucune filiale ne calcule d'allocation du capital économique :
    - Les filiales doivent être sensibilisées au concept d'allocation du capital économique et de la gouvernance mise en place par le groupe autour de l'allocation
  - Soit une filiale calcule une allocation du capital économique :
    - La méthode de calcul d'allocation du capital économique de la filiale doit-elle être la même que celle du calcul d'allocation du capital économique du groupe ? Ou devra-t-elle réaliser deux calculs d'allocation du capital économique, l'une pour la gestion du groupe et l'autre pour la gestion de la filiale ?
    - Quid d'une filiale détenue par plusieurs groupes, utilisant des méthodes de calcul d'allocation du capital économique différentes ? La filiale devrait-elle à ce moment-là conserver plusieurs méthodes d'allocation de calcul du capital économique, pour plusieurs groupes ?
- Un groupe peut réaliser un calcul d'allocation du capital économique, et demande à ses filiales de décliner le calcul de l'allocation du capital économique lié à chacune des filiales.

Il existe des interrelations évidentes entre calcul du capital économique et calcul de l'allocation du capital économique au sein d'un groupe, mais la politique du calcul d'un capital économique et celle du calcul de l'allocation du capital économique peuvent présenter des différences.

L'une des difficultés principales réside dans la définition même de capital économique. Celui-ci peut être calculé via Solvabilité 2, Swiss Solvency Test, sur base IFRS, ou peut même faire l'objet d'un calcul interne.

Une filiale peut, par exemple, calculer son capital économique via Solvabilité 2, tandis que le groupe calcule son capital économique via SST. Ces différences normatives impactent fortement la relation groupe – filiale, et doivent être définies en amont.

Pour cette partie, adoptons les notations suivantes :

- G le groupe, constitué de n filiales. Par extension, G désignera également le portefeuille global du groupe ;
- $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'ensemble des n filiales du groupe, F_i étant la i-ème filiale du groupe. Par extension, F_i désignera également le portefeuille de la i-ème filiale, ou le segment relatif à la i-ème filiale ;
- $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'ensemble des parts des n filiales appartenant au groupe, α_i étant la part du groupe relative à la i-ème filiale ;
- K_G le capital économique du groupe ;
- $\left(K_{F_i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ l'ensemble des capitaux économiques alloués aux n filiales appartenant au groupe, K_{F_i} étant le capital économique lié à la i-ème filiale ;
- R_G le résultat du groupe ;
- $\left(R_{F_i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ l'ensemble des résultats des n filiales appartenant au groupe, R_{F_i} étant le résultat lié à la i-ème filiale.

Il a été dit plus haut que le capital économique peut être calculé selon des normes différentes au niveau groupe et au niveau filiale. C'est également le cas du résultat. Afin d'assurer une relation saine entre le groupe et ses filiales, il faut donc que la métrique de résultat soit correctement définie. Les métriques peuvent être multiples :

- Résultat local GAAP du groupe ;
- Résultat IFRS ;
- Résultat « maison » (fonds propres Solvabilité 2, etc)…

Généralement, cela correspondra à l'une des deux premières métriques, qui ont l'avantage d'être comprises et transparentes pour l'ensemble des filiales.

Une métrique autre que le résultat peut être également considérée (ex. hausse possible de chiffre d'affaires), mais nous considérerons par la suite l'appréciation de la performance par le RORAC, donc par le résultat.

7.2 Application au BSCR

Dans cette sous-partie, nous nous plaçons dans le cas d'un groupe d'assurance, que l'on suppose soumis à Solvabilité 2, constitué exclusivement de filiales d'assureurs (ou assimilés : réassureurs, instituts de prévoyance, mutuelles…).

Cette sous-partie ne prévoit donc pas la gestion des bancassureurs.

Chaque filiale ne réalise pas nécessairement un calcul de SCR, car toute filiale n'est pas nécessairement soumise à Solvabilité 2 (fonds de pension, ou filiales en-dehors de l'Union européenne).

7.2.1 Généralités

Tout comme une entreprise d'assurance unique, un groupe réalise une allocation du capital économique afin d'optimiser son ROE (cf. partie 4.1). L'optimisation du capital économique d'un groupe peut permettre, en plus d'une allocation du capital économique d'une entreprise :

- Des décisions de remontées de dividendes, ou au contraire de recapitalisation, au sein d'une filiale ;
- Des décisions d'acquisition ou de cession de parts d'une filiale déjà présente au sein du groupe ;
- Des décisions d'acquisition de parts d'une filiale non présente au sein du groupe. Cela pose des problématiques différentes du cadre d'acquisition de parts d'une filiale déjà présente au sein du groupe, car les informations qui seront disponibles seront plus faibles ;
- Des décisions de prise de réassurance au niveau groupe, en supposant que chaque filiale doit passer par le groupe pour gérer sa réassurance.

7.2.2 Capital économique groupe et capital économique filiales

Cadre de travail théorique

Nous nous plaçons ici dans le cadre où le groupe calcule un capital économique pour chacune de ses filiales, sans pour autant entrer dans le calcul d'allocation du capital économique des filiales.

D'après la partie 4.1, chaque méthode d'allocation du capital économique vérifie la propriété Full allocation, à savoir :

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(X_i/X) = \rho(X)$$

Une filiale peut être vue comme étant un segment pour le groupe, d'où la vision suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(F_i/G) = \rho(G)$$

Déclinée en capital économique, cette égalité donne :

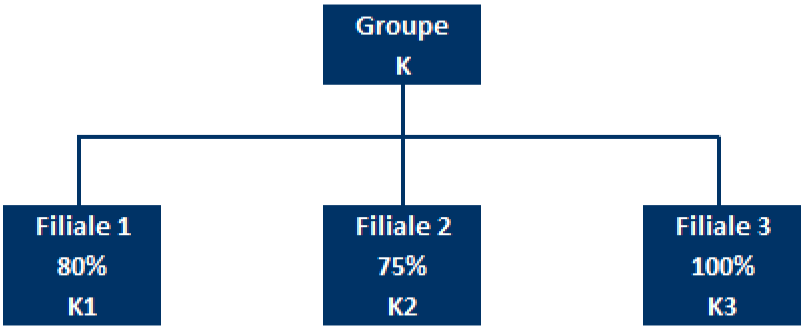
$$BSCR_G = K_G = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i K_{F_i}$$

On suppose donc qu'il sera attribué à chaque filiale i un montant de capital économique K_{F_i}, qu'il soit calculé ou non au sein de la filiale.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de considérer une mesure de risque pour laquelle $\rho(\alpha X) = \alpha\, \rho(X)$. Il suffit d'appliquer directement la propriété au portefeuille $\alpha_i F_i$ et non pas à F_i. Toutefois, cette propriété est vérifiée lorsque la méthode d'Euler (covariance, VaR ou TVaR) est utilisée, mais elle ne l'est pas lorsque la méthode proportionnelle, marginale ou de Shapley est utilisée.

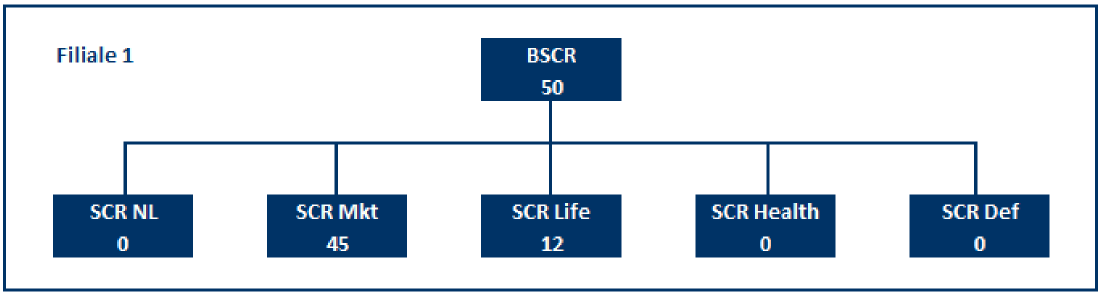
Cadre de travail applicatif

Soit un groupe possédant trois filiales, nommées par la suite « filiale 1 », « filiale 2 » et « filiale 3 », avec les parts suivantes :

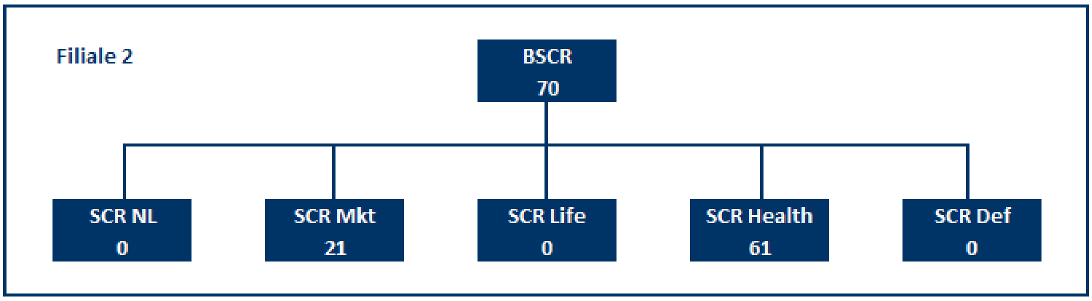


Chaque filiale a ses caractéristiques :

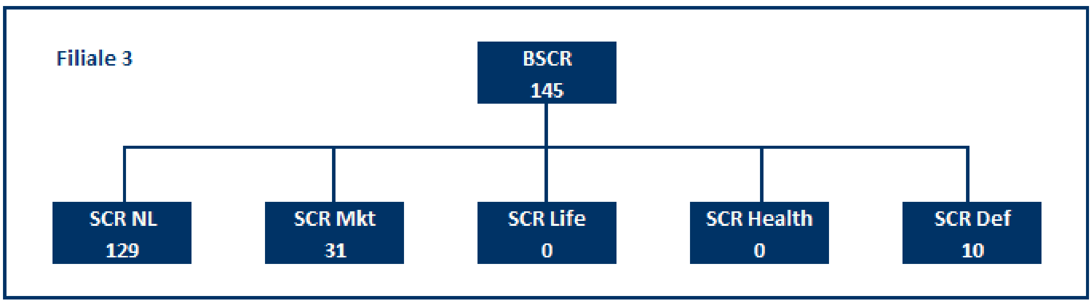
- Filiale 1 est une filiale d'assurance orientée vie / épargne ayant le profil de risque suivant :



- Filiale 2 est une filiale d'assurance orientée santé / prévoyance ayant le profil de risque suivant :



- Filiale 3 est une filiale de réassurance orientée non-vie, et spécialisée dans le risque CAT, ayant le profil de risque suivant :

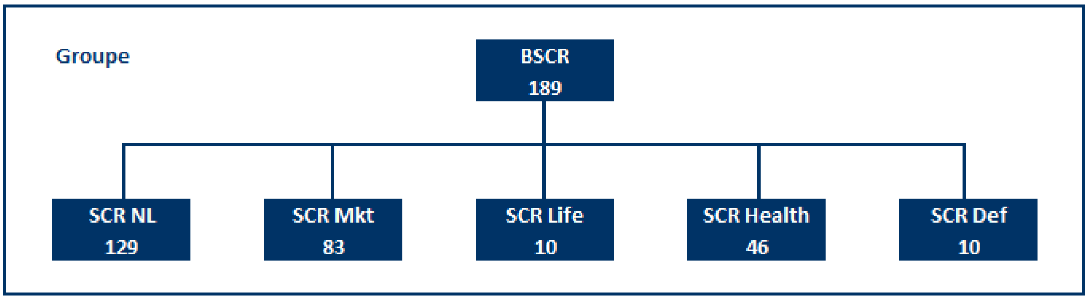


Pour simplifier, on fait l'hypothèse que le les risques relatifs à chacune des trois filiales sont indépendants, autrement dit que tous les SCR élémentaires du groupe sont calculés ainsi :

$$SCR_G^e = \alpha_1 \times SCR_{F_1}^e + \alpha_2 \times SCR_{F_2}^e + \alpha_3 \times SCR_3^e$$

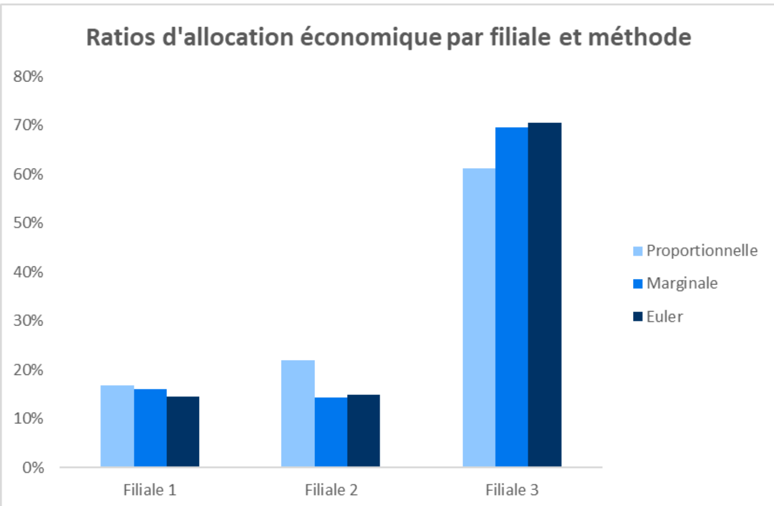
Cette hypothèse permet de simplifier les calculs dans le cadre de cette note, mais n'est pas structurante dans les conclusions par la suite.

Cela donne le profil de risque suivant pour le groupe :



L'application des méthodes proportionnelle, marginale et d'Euler (covariance) donnent les ratios d'allocation économique suivants :

Filiale	Méthode	Ratio	Cap éco
Filiale 1	Proportionnelle	17%	32
Filiale 2	Proportionnelle	22%	41
Filiale 3	Proportionnelle	61%	116
Filiale 1	Marginale	16%	30
Filiale 2	Marginale	14%	27
Filiale 3	Marginale	70%	131
Filiale 1	Euler	15%	27
Filiale 2	Euler	15%	28
Filiale 3	Euler	71%	133



La méthode proportionnelle ne peut pas être considérée comme un outil de gestion du capital, donc elle ne sera pas retenue par la suite.

Pour calculer les ratios d'allocation du capital économique relatifs à la méthode d'Euler, il a été retenu une hypothèse de diminution de la part de 1% du groupe dans chaque filiale.

Les méthodes marginale et d'Euler donnent des résultats proches sur ces portefeuilles. Attention toutefois à ne pas en inférer une quasi-équivalence de résultats, bien que cela fonctionne dans de nombreux cas cette quasi-équivalence ne peut pas être garantie.

Lorsque celle-ci est applicable, la méthode d'Euler sera retenue, car elle est reconnue comme étant plus complète.

Application n°1 : possibilité d'acquérir des parts supplémentaires dans une filiale

Pour rappel, le RORAC lié à un portefeuille X est calculé ainsi :

$$RORAC(X) = \frac{E[X]}{\rho(X)}$$

Compte tenu de la formule de calcul du RORAC, il n'existe pas de relation claire entre le RORAC d'un ensemble de portefeuilles, et les RORAC distincts de chaque portefeuille.

Supposons la structure de portefeuille suivante :

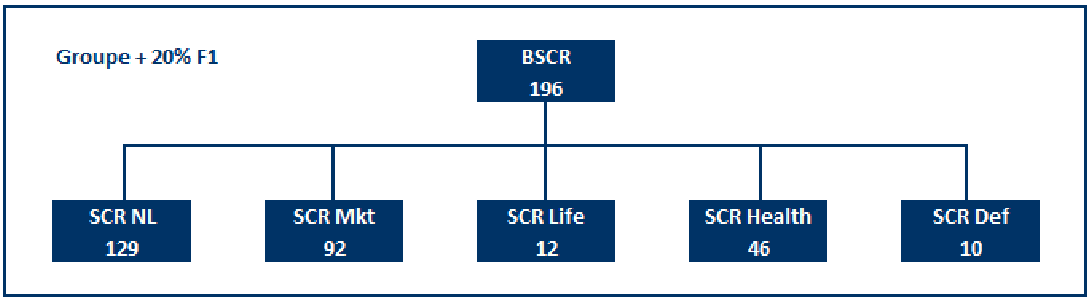
Entité considérée	Part	Résultat (part groupe)	Capital économique (part groupe)	RORAC
Filiale 1	80%	1.2	27	4.369%
Filiale 2	75%	1.5	28	5,334%
Filiale 3	100%	5.0	133	3.757%
Groupe		7.7	189	4.081%

Le groupe a la possibilité d'acquérir la filiale 1 à 100%, et se demande si cette opportunité est intéressante en termes de RORAC.

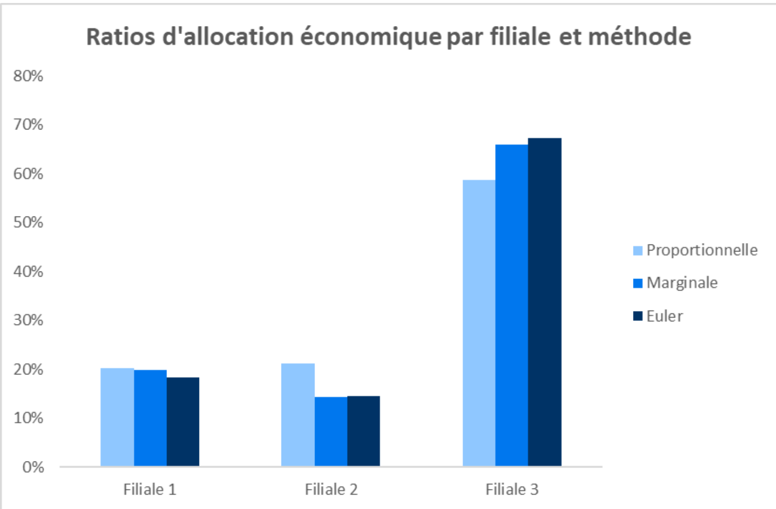
La mesure de risque liée à la méthode d'Euler n'est pas RORAC compatible, car la mesure de risque utilisée n'est pas la TVaR mais la covariance.

Si le groupe choisit de faire l'hypothèse que son calcul d'allocation du capital économique est RORAC compatible sans aucune garantie qu'elle le soit vraiment, alors le groupe pourra envisager d'acquérir la filiale 1, lui permettant d'augmenter son RORAC, soit son ratio résultat / risque.

Si le groupe choisit de ne pas réaliser cette hypothèse, alors un calcul du capital économique en intégrant 100% de la filiale 1 doit être réalisé. Les mêmes calculs que précédemment sont donc effectués :



Filiale	Méthode	Ratio	Cap éco
Filiale 1	Proportionnelle	20%	39
Filiale 2	Proportionnelle	21%	41
Filiale 3	Proportionnelle	59%	115
Filiale 1	Marginale	20%	39
Filiale 2	Marginale	14%	28
Filiale 3	Marginale	66%	129
Filiale 1	Euler	18%	36
Filiale 2	Euler	15%	29
Filiale 3	Euler	67%	131



Ce qui donne le tableau suivant :

Entité considérée	Part	Résultat (part groupe)	Capital économique (part groupe)	RORAC
Filiale 1	100%	1.5	36	4.209%
Filiale 2	75%	1.5	29	5,257%
Filiale 3	100%	5.0	131	3.803%
Groupe + 20% F1		8.0	196	4,089%

Le RORAC Groupe passe de 4.081% à 4.089%, donc l'investissement proposé ne fait pas varier significativement le RORAC bien que celui-ci soit en augmentation.

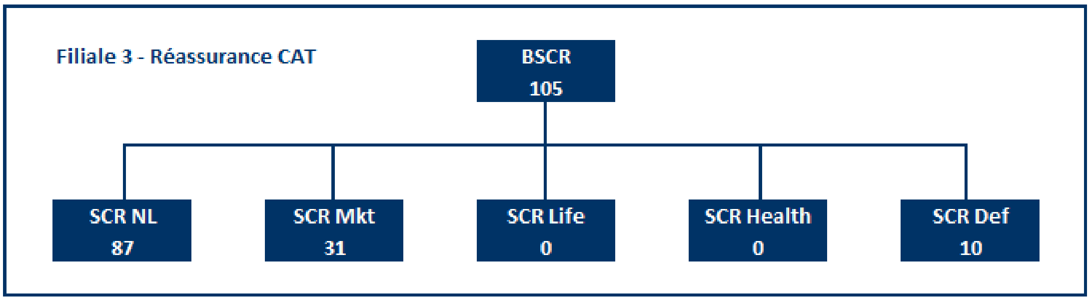
Le groupe peut faire de même sur la filiale 2, sur lequel les résultats seront plus probants.

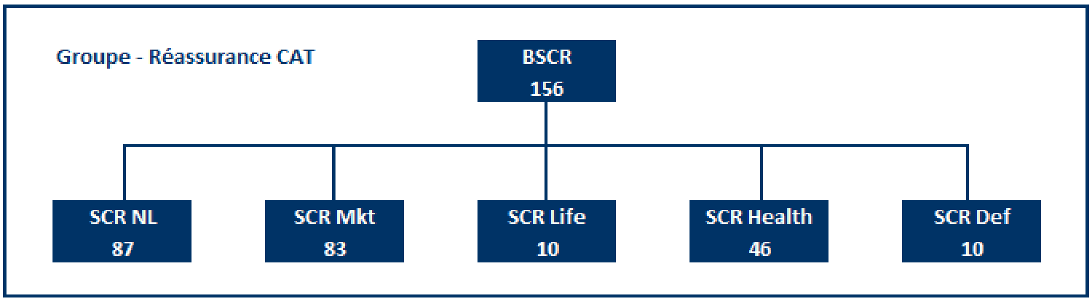
Application n°2 : acquisition d'une couverture de réassurance

Le groupe souhaite réduire son exposition catastrophe non-vie par arbitrage réglementaire. Le groupe envisage de souscrire à une cession non-proportionnelle sur son risque catastrophe non-vie. Cette couverture aurait pour impact la diminution du SCR CAT de 50%, toutes choses égales par ailleurs.

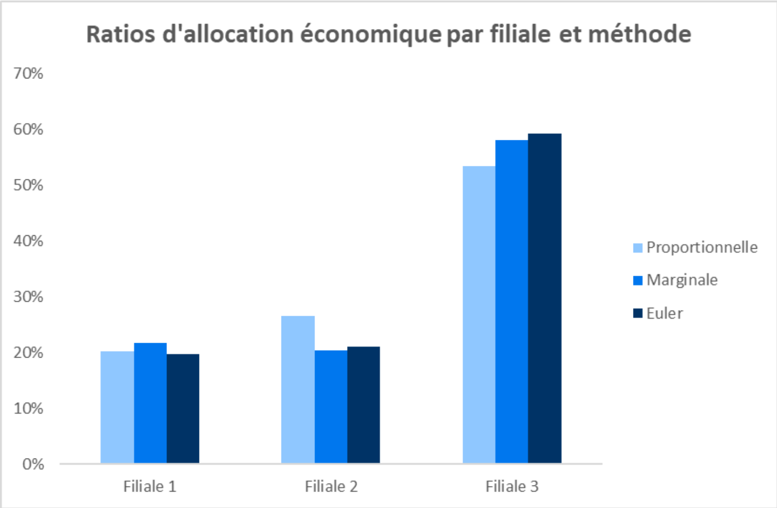
Le groupe souhaite toujours optimiser son RORAC, et souhaite connaître la prime associée à ce contrat permettant de conserver une égalité du RORAC groupe, à savoir 4.081% avant acquisition de la couverture de réassurance.

Les mêmes calculs que précédemment sont réalisés :





Filiale	Méthode	Ratio	Cap éco
Filiale 1	Proportionnelle	20%	32
Filiale 2	Proportionnelle	26%	41
Filiale 3	Proportionnelle	53%	83
Filiale 1	Marginale	22%	34
Filiale 2	Marginale	20%	32
Filiale 3	Marginale	58%	91
Filiale 1	Euler	20%	31
Filiale 2	Euler	21%	33
Filiale 3	Euler	59%	93



Ce qui donne le tableau suivant :

Entité considérée	Part	Résultat (part groupe)	Capital économique (part groupe)	RORAC
Filiale 1	80%	1.2	31	3,904%
Filiale 2	75%	1.5	33	4,557%
Filiale 3	100%	5.0 – P + E[S]	93	
Groupe		7,7 – P + E[S]	156	

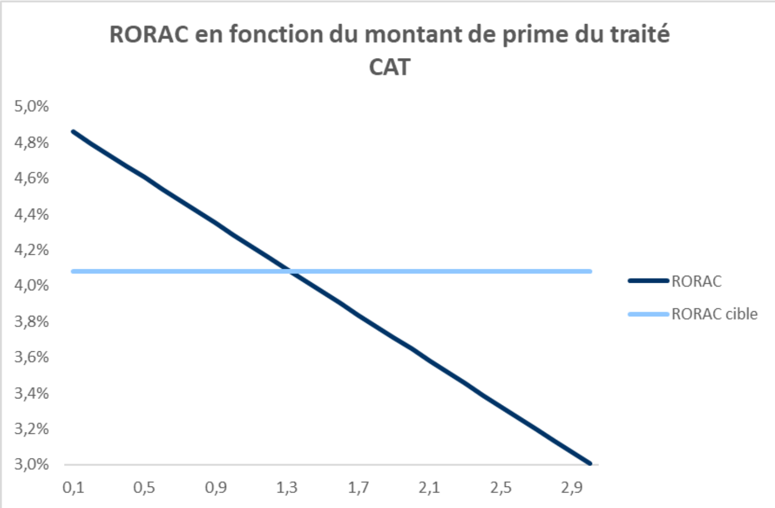
Si la couverture est réalisée uniquement sous l'objectif d'un arbitrage réglementaire, à RORAC constant l'entreprise pourrait donc payer en net :

$$\frac{7{,}7 - \ P + E[S]}{156} \geq 4.081\%$$

Ce qui aboutit à :

$$P - E[S] \leq 1.317$$

Soit la tendance globale suivante :



Une couverture à ce prix précis, donnerait la situation suivante :

Entité considérée	Part	Résultat (part groupe)	Capital économique (part groupe)	RORAC
Filiale 1	80%	1.2	31	3,904%
Filiale 2	75%	1.5	33	4,557%
Filiale 3	100%	3.382	93	3.971%
Groupe		6,382	156	4.081%

Remarque : Dans le cas précédent, à RORAC global égal au scénario central :

- Le RORAC associé à la filiale 3 augmente
- Cette augmentation se fait au détriment de la diminution des RORAC associés aux filiales 1 et 2.

Ainsi, il faut accorder une attention particulière à la notion d'interprétabilité du RORAC des filiales, et des effets de bord que cela peut provoquer au sein du groupe. Si, par exemple, l'étude d'acquisition de 100% de la filiale 1 se faisait après étude de la couverture, celle-ci aurait fait diminuer le RORAC du groupe.

Cela montre bien une limitation liée à l'étude de l'allocation du capital économique : l'approche par sensibilité, utilisée régulièrement pour Solvabilité 2 ne vaut pas, et il faut privilégier des approches par scénarios englobant plusieurs transformations en simultané.

7.2.3 Interprétabilité de l'allocation du capital économique par filiale

Dans la partie 7.2.2, nous avons démontré, via deux scénarios, que le capital économique alloué à chaque filiale change dès lors qu'une décision est prise auprès d'une filiale :

- Le RORAC de la filiale, calculé par le groupe, correspond à **la performance individuelle de la filiale placée dans la structure de risque du groupe** ;
- Le RORAC de la filiale, calculé par la filiale elle-même, correspond à **la performance individuelle de la filiale placée dans sa propre structure de risque, sans interaction avec les structures de risque des autres filiales du groupe**.

Compte tenu qu'une décision prise par une filiale impacte le RORAC d'une autre filiale dans la vision groupe, il est clair que **l'analyse de la performance d'une filiale ne peut pas se résumer au RORAC de la filiale,**

calculé par le groupe. En particulier, les responsables d'une filiale n'étant pas responsables d'autres filiales, ils peuvent difficilement être tenus pour responsables d'une baisse de leur RORAC au sein du groupe, sauf s'il y a eu une communication en amont des actions menées chez d'autres filiales, et que la filiale a le temps et la latitude suffisants de mener des actions pour améliorer son RORAC vision groupe.

Ce distinguo est particulièrement complexe à expliquer au top management, et doit donc être rappelé afin d'éviter le biais de mécompréhension dans la prise de décision. Afin d'éviter ce biais, il est intéressant de présenter les deux calculs, en faisant le distinguo entre structure de risque groupe et structure de risque filiale.

Toutefois, ce n'est pas pour autant que l'interprétabilité du RORAC d'une filiale dans une structure de groupe est inintéressant. Cet indicateur montre toujours la pertinence de la filiale au niveau groupe.

7.2.4 Cohérence entre calculs d'allocation groupe et filiales

Dans la partie 7.1, nous avons envisagé plusieurs cas de figure entre calcul d'une allocation du capital économique groupe, et calcul d'une allocation du capital économique filiale.

Ratio d'allocation du capital économique par filiale

De la même manière qu'il existe un ratio d'allocation pour chaque sous-SCR au sein d'une entreprise, on peut calculer un ratio d'allocation du capital économique pour une filiale

Définition (Ratio d'allocation du capital économique pour une filiale) : le ratio d'allocation du capital économique pour une filiale F_i est défini de la manière suivante :

$$R_{F_i}^G = \frac{\partial BSCR(G)}{\partial BSCR(\alpha_i F_i)}$$

.

Contrairement aux sous-SCR, il n'existe pas de matrice de corrélation entre les différentes filiales d'un groupe, et cela ne ferait pas réellement sens de surcroît car la structure d'agrégation des risques change systématiquement d'une période à l'autre.

Afin de calculer ce ratio, on utilise donc l'approximation suivante :

$$R_{F_i}^G \simeq \frac{\delta BSCR(G)}{\delta BSCR(\alpha_i F_i)} = \frac{K_{F_i}}{BSCR(F_i)}$$

Ainsi :

$$BSCR(G) = \sum_{i=1}^{n} R_{F_i}^G \times BSCR(F_i)$$

Dans le scénario central donné en 7.2.2, les ratios d'allocation du capital économique sont les suivants :

Entité	BSCR	Capital économique (vision groupe - Euler)	Ratio d'allocation
Filiale 1	40	27	69%
Filiale 2	52	28	54%
Filiale 3	145	133	92%

Le groupe n'impose pas aux filiales un calcul d'allocation du capital économique

Si le groupe souhaite aller plus loin qu'un calcul d'allocation du capital économique par filiale mais ne souhaite pas imposer de calcul d'allocation du capital économique à ses filiales, un groupe peut faire son calcul comme une entreprise unique.

Si le groupe souhaite par la suite retrouver les contributions par filiale, passer par une règle d'allocation du capital économique des SCR élémentaires ne sera pas possible pour certains types de risque :

- L'allocation du SCR Concentration du groupe par filiale est difficilement réalisable en pratique ;
- L'allocation du SCR Primes & Provisions NL et NSLTH, de par le calcul des écarts-types, est également difficilement réalisable en pratique.

Deux méthodologies peuvent alors se dégager :

- **Méthodologie n°1 – Calcul par filiale, puis groupe :**
    - Le groupe réalise l'ensemble des calculs d'allocation du capital économique pour chaque filiale ;
    - Le groupe consolide l'allocation du capital économique par la suite en utilisant les ratios d'allocation du capital économique calculés pour chaque filiale.

  Cette méthodologie permet donc de réaliser un calcul d'allocation du capital économique par filiale dans la structure de risque de la filiale, puis réalise l'agrégation des filiales au niveau groupe.
- **Méthodologie n°2 – Calcul groupe, puis filiale :**
    - Le groupe réalise l'ensemble des calculs d'allocation du capital économique, comme entreprise unique, jusqu'à allouer un capital économique par contrat souscrit ;
    - L'agrégation de capital économique se fait ensuite en sommant les capitaux économiques alloués par contrat.

  Cette méthodologie permet donc de réaliser un calcul d'allocation du capital économique de filiales dans la structure de risque du groupe.

Le groupe impose aux filiales un calcul d'allocation du capital économique

Le système dégagé est donc similaire à la méthodologie n°1 définie ci-dessus.

Afin de garantir une allocation cohérente, une politique d'allocation du capital économique groupe doit être construite :

- En prenant en compte les spécificités de chaque filiale :
    - Données disponibles ;
    - Structure de risque liée à chaque filiale ;
    - Capacité à mener des calculs d'allocation du capital économique ;
    - Etc.
- En utilisant la même méthode d'allocation du capital économique dans la mesure du possible.

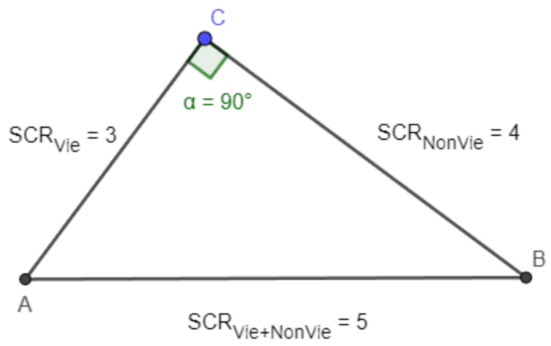
8. Communication, interprétabilité

Ce paragraphe montre qu'il est possible d'utiliser des outils graphiques pour analyser les effets de diversification. Les allocations ainsi obtenues peuvent expliquer les variations de SCR d'un inventaire à l'autre, et dans une vision prospective : devenir des supports de prises de décision.

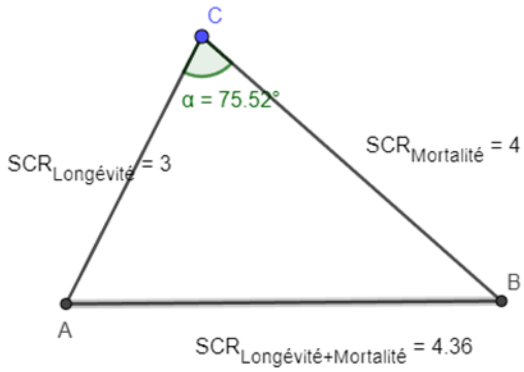
8.1 Comment expliquer l'agrégation des risques en formule standard ?

La formule standard pour l'agrégation de 2 risques correspond au théorème de Pythagore généralisé, cf. 3.2.

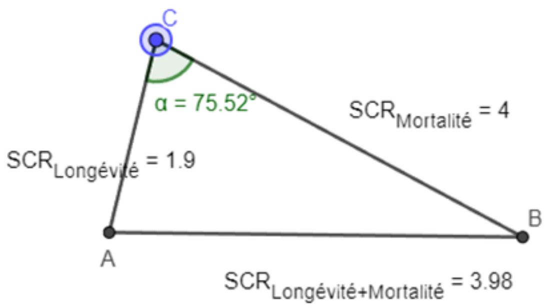
On peut ainsi représenter l'agrégation de 2 risques à l'aide d'un triangle. Soit par exemple un SCR vie de 3 et un SCR non vie de 4 : les deux risques sont non corrélés, ils sont orthogonaux, le SCR agrégé correspond à l'hypoténuse :



Dans le cas particulier de la longévité et la mortalité, la corrélation négative de -25% correspond à un angle de 75° :

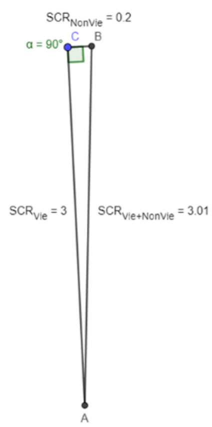


Il est donc possible en théorie de réduire le SCR mortalité + longévité si l'un des 2 pèse moins de la moitié du SCR de l'autre :

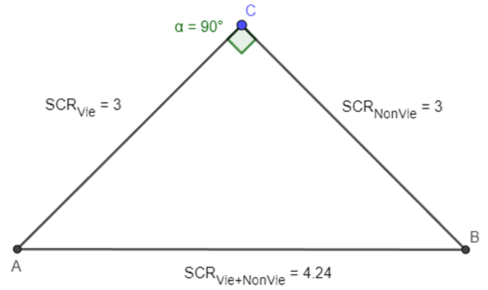


En pratique, il faut tenir compte également des autres SCR (Cat, Frais du module vie, Marché sur les placements en représentation des provisions techniques, Opérationnel, etc.).

La visualisation en triangle permet de comprendre pourquoi un petit risque agrégé à un plus gros n'aura pas un impact matériel sur le SCR final :



Réciproquement, la diversification optimale entre 2 risques s'obtient quand les SCR sont identiques :



Démonstration pour minimiser l'expression $SCR_A^2 + SCR_B^2 + 2Corr_{AxB}X\ SCR_A X\ SCR_B$ sous la contrainte $SCR_A + SCR_B$=1

1. Formule de la contrainte : $SCR_A + SCR_B$=1
   2. Expression à minimiser : $SCR_A^2 + SCR_B^2 + 2Corr_{AxB}X\ SCR_A X\ SCR_B$

   Étapes :

   1. Substituer la contrainte :
      - $SCR_B = 1 - SCR_A$
   2. Réécrire l'expression :

   $SCR_A^2 + SCR_B^2 + 2Corr_{AxB}X\ SCR_A X\ SCR_B\ = SCR_A^2 + (1 - SCR_A)^2 + 2Corr_{AxB}X\ SCR_A X\ (1 - SCR_A)$
      - =$(2 - 2Corr_{AxB})X\ \ SCR_A^2 + 2(Corr_{AxB} - 1)X\ SCR_A + 1$
   3. Minimiser l'expression quadratique :
      - f(SCR_A)= $(2 - 2Corr_{AxB})X\ \ SCR_A^2 + 2(Corr_{AxB} - 1)X\ SCR_A + 1$

Pour trouver le minimum, nous pouvons dériver cette fonction par rapport à SCR_A et trouver les points critiques :

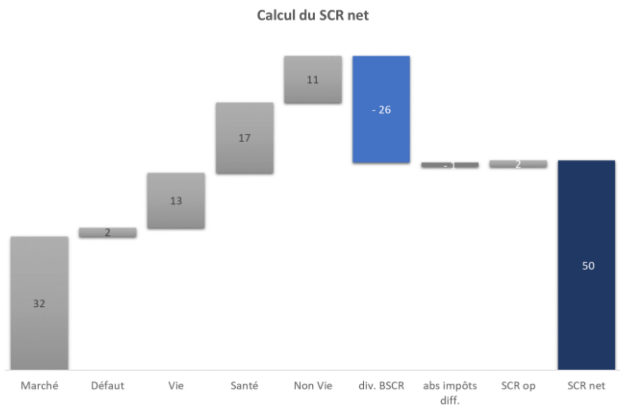
   4. Dérivée de f(SCR_A) :
      - f'(SCR_A)= $2(2 - 2Corr_{AxB})X\ \ SCR_A + 2(Corr_{AxB} - 1)$
      - $= 4(1 - Corr_{AxB})X\ \ SCR_A + 2(Corr_{AxB} - 1)$
   5. Trouver les points critiques :
      - f'(SCR_A)=0
      - $4(1 - Corr_{AxB})X\ \ SCR_A + 2(Corr_{AxB} - 1)$ =0
      - $4(1 - Corr_{AxB})X\ \ SCR_A = 2(1 - Corr_{AxB})$
      - SCR_A=1/2

   Soit SCR_A=SCR_B

8.2 Comment présenter la décomposition d'un SCR ?

La représentation traditionnelle du SCR en cascade peut se dérouler jusqu'aux contributions nettes des effets de diversification grâce à l'allocation du capital :

Exemple par la méthode d'Euler :



Les effets de diversification compris dans le BSCR peuvent se ventiler selon les sources par risque :

Effets de diversification (26) =

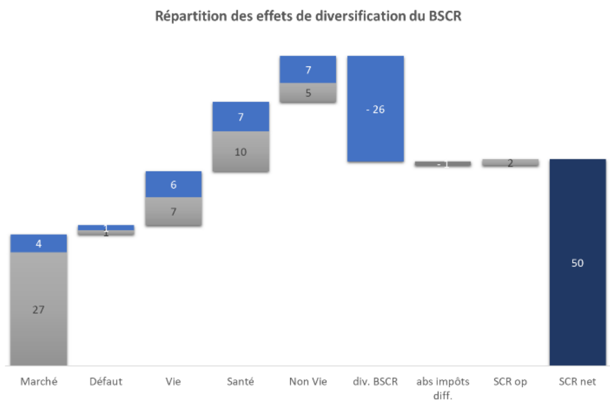
4 (Marché)

+ 1 (Défaut)

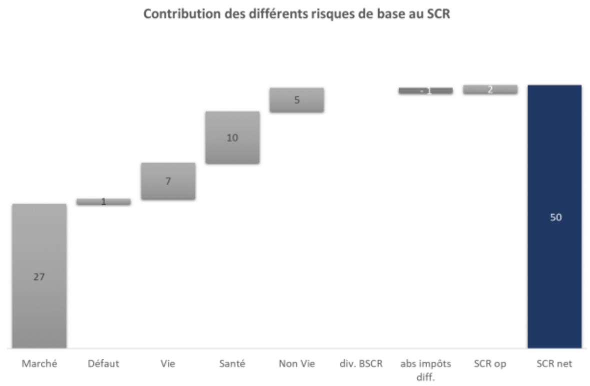
+ 6 (Vie)

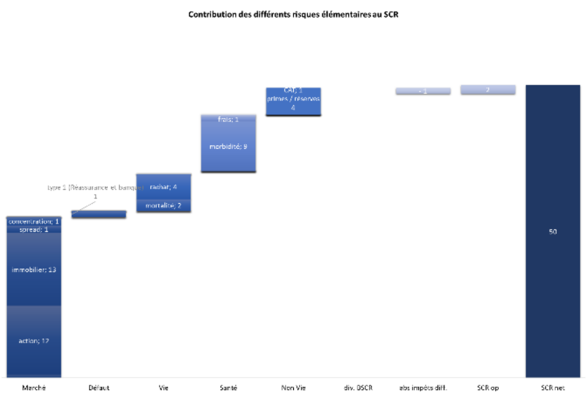
+ 7 (Santé)

+ 7 (Non Vie)



En gommant ces effets, on fait apparaître les contributions nettes de chaque risque au SCR.





On peut réitérer l'exercice pour faire apparaître les contributions de chaque sous-risque.

Le SCR peut donc être décomposé en contributions de chaque sous-risque, jusqu'à faire intervenir les assiettes (primes, réserves, expositions d'actifs, créances etc.).

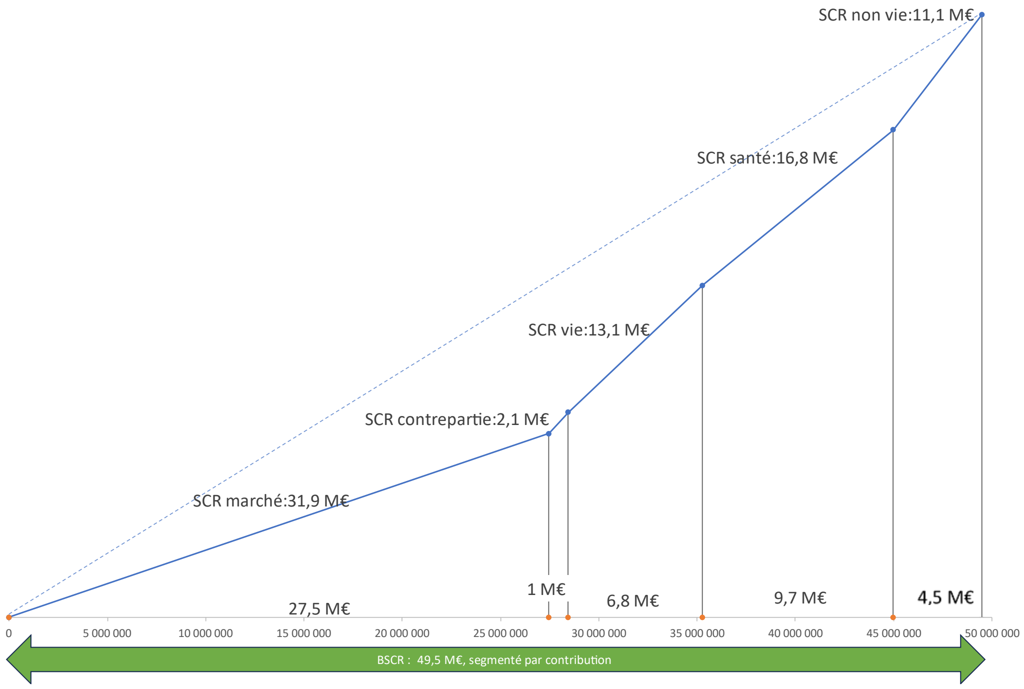
Puis l'exercice peut se prolonger en allouant le SCR par ligne d'activité via les assiettes. On obtient alors un tableau à double entrée qui fait apparaître les contributions par risque X ligne d'activité. L'addition de toutes les cases formant alors le BSCR net, cf. 2.1. :

Activité X Risque	Risque 1	…	Risque N	Contribution par activité
Activité 1				Contribution activité 1
…				…
Activité N				Contribution activité N
Contribution par risque	Contribution risque 1	…	Contribution risque N	Total = BSCR net

8.3 Comment visualiser les effets de diversification ?

Le tableau suivant peut se traduire par une représentation graphique en utilisant les projections orthogonales.

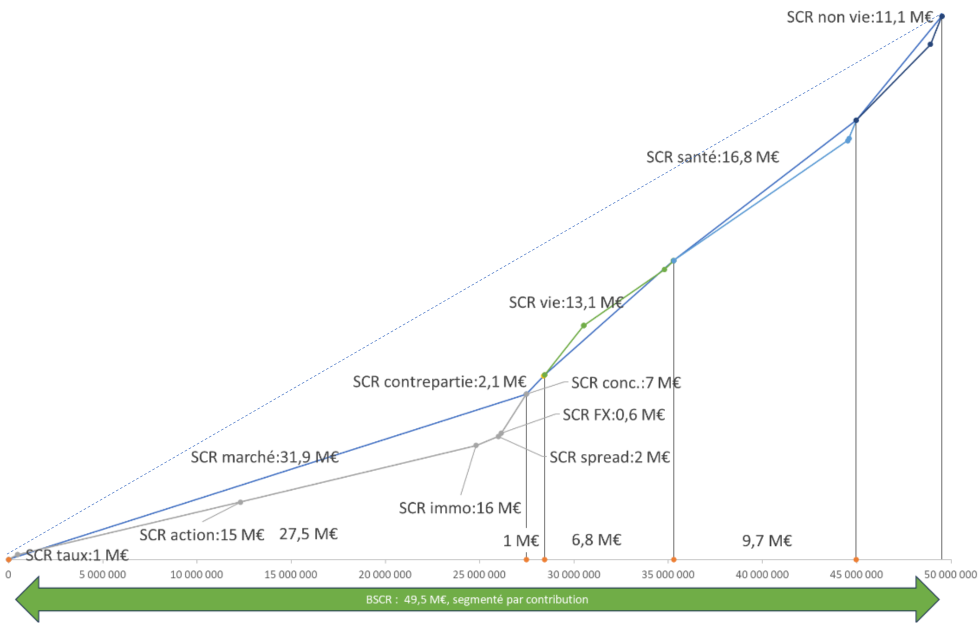
M€	SCR	Contributions nettes diversification	Ratio d'allocation
BSCR	49,5	49,5	
marché	31,9	27,5	86%
contrepartie	2,1	1,0	47%
vie	13,1	6,8	52%
santé	16,8	9,7	58%
non vie	11,1	4,5	41%



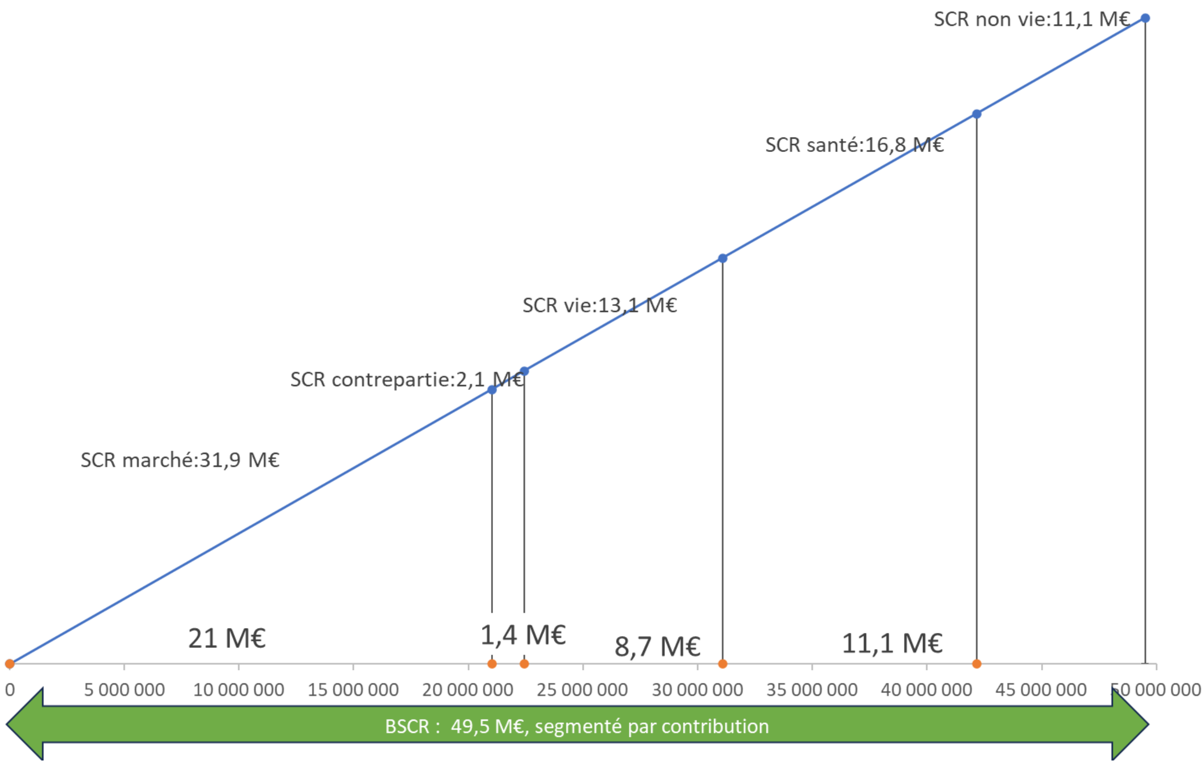
La longueur de chaque segment correspond au SCR ; sa projection orthogonale sur l'axe des abscisses représente la contribution de chaque risque.

Plus la pente est forte, plus le risque apporte de la diversification.

Il est possible également de réitérer l'exercice à chaque niveau d'agrégation, afin de décomposer le SCR à la manière de fractales.



Remarque : cette représentation graphique peut être utilisée avec toutes les méthodes d'allocation. La méthode proportionnelle par exemple donnerait une pente identique à tous les SCR, le graphe ne présente donc pas de solution pour optimiser les effets de diversification.



8.4 L'optimisation et la mesure des effets de diversification

La pente moyenne qui apparaît sur les graphes précédents représente ainsi la diversification intra BSCR : plus la pente est forte, plus le BSCR est diversifié.

Son ratio BSCR / longueur du segment (cosinus de l'angle) est un indicateur de diversification. La méthode d'Euler est particulièrement indiquée dans cet exercice, car tout risque dont le ratio d'allocation est inférieur contribue à améliorer la diversification.

Par exemple : dans le tableau ci-dessous, le ratio d'allocation moyen est de 68%, seul le risque de marché a un ratio plus élevé. Pour optimiser la diversification, il faut réduire ce ratio, soit :

- Diminuer le SCR marché,
- Ou réciproquement, augmenter l'exposition de tous les risques du BSCR dont le ratio d'allocation est inférieur au ratio d'allocation moyen.

M€	SCR	Contributions nettes diversification	Ratio d'allocation
BSCR	49,5	49,5	68%
marché	31,9	27,5	86%
contrepartie	2,1	1,0	47%
vie	13,1	6,8	52%
santé	16,8	9,7	58%
non vie	11,1	4,5	41%

Les stratégies d'optimisation du capital peuvent donc être mesurées par l'évolution du ratio d'allocation moyen : plus il est réduit, plus la pente des graphes est importante, et plus la diversification est forte.

Exemple d'optimisation : le SCR Santé

La matrice de corrélation du SCR Santé n'est pas symétrique. En effet, le SCR Cat est corrélé à 25% avec les SCR Santé SLT et Non SLT, alors que les SCR Santé SLT et Non SLT sont corrélés à 50% entre eux.

La diversification optimale n'est donc pas obtenue quand les 3 SCR sont égaux, mais quand les ratios d'allocation Euler sont identiques.

Dans notre cas, le SCR Cat étant moins corrélé aux autres, cet optimum est atteint en lui accordant un poids plus important.

M€	SCR	Contributions nettes diversification	Total effet diversification	Ratio d'allocation
SCR santé	74	74	0	
Risque Santé SLT	30	22	8	74%
Risque Santé non-SLT	30	22	8	74%
Risque CAT	40	30	10	74%

En pratique, il n'est souvent pas réaliste de tendre vers un SCR Cat supérieur aux SCR SLT et non SLT. En revanche, il peut être intéressant d'équilibrer les SCR SLT et non SLT.

8.5 Management actions

L'allocation de capital joue un rôle essentiel dans la décomposition du *Solvability Capital Requirement* (SCR) par facteur de risque, permettant ainsi d'identifier la contribution de chaque facteur au risque global.

Cette analyse détaillée est cruciale pour la mise en œuvre de stratégies d'atténuation des risques, telles que les couvertures financières et les traités de réassurance.

8.5.1 Couvertures financières

Si le SCR lié aux actions est particulièrement élevé, il devient impératif de déployer des stratégies de couverture telles que des options sur actions pour limiter l'exposition au risque.

En effet, en cas de baisse de la valeur des actions, la valorisation de ces couvertures (telles que les options PUT) compense cette perte, d'où l'importance de calibrer judicieusement le strike et la maturité des options pour optimiser l'efficacité de la couverture.

De même, lorsque le SCR lié aux taux d'intérêt se révèle significatif, des solutions telles que des *swaptions* ou des *bonds forwards* peuvent être mises en œuvre pour atténuer ce risque, tout en veillant à un réajustement adéquat du gap de duration entre les actifs et les passifs. Cette approche proactive permet non seulement de gérer efficacement les risques, mais aussi de maintenir la stabilité financière dans un environnement économique volatile.

8.5.2 Réassurance

En cédant des risques, les assureurs peuvent réduire les exigences de capital réglementaire et permettre une meilleure utilisation du capital disponible.

Par exemple, une des plus grandes exigences en capital pour les assureurs vie provient du risque de résiliation massive « mass lapse ». Ce type de traité fixe un point d'attachement et un point de détachement. Le réassureur intervient dès que le taux de chutes est compris dans cette fourchette. Par exemple, le traité peut être structuré avec une priorité de 20%, et une limite à 40%, le traité prend progressivement en charge les pertes, permettant un allègement du besoin en capital dans le scénario mass lapse et une meilleure diversification des risques nets.

BIBLIOGRAPHIE

Textes règlementaires

Règlement délégué (UE) 2015/35 de la Commission du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II)

Mémoires :

Décupère, Sophie, *Agrégation des risques et allocation de capital sous Solvabilité II*, 2011

George, Yann, *Gestion des risques et effets de diversification*, 2014

Grandperrin, Lucas, *Allocation du capital : théorie et pratique de la méthode d'Euler*, 2018

Mouhajir, Safae, *Agrégation et allocation su SCR au sein d'un modèle interne partiel à l'aide des copules*, 2022

Travaux des commissions techniques de l'Institut des Actuaires

Groupe de travail Impôts Différés, *Impôts différés sous Solvabilité II*, 2022

ANNEXE : exemple code VBA

Les annexes suivantes contiennent des extraits de code VBA (Visual Basic for Applications) illustratifs. Chaque annexe est accompagnée d'une brève description de ses étapes. Nous espérons que ces exemples démontrent la facilité d'implémentation des méthodes les plus courantes.

Méthode proportionnelle

```
Function Proportionnelle(SCR_i As Range, mat_SCR As Range) As Double
    ' Calcul pourcentage
    Proportionnelle = SCR_i / WorksheetFunction.Sum(mat_SCR)
End Function
```

Méthode marginale

```
Function InitialisationMarginal(SCR_i As Range, mat_SCR As Range, mat_cor As Range) As Double
    Dim i As Integer, j As Integer
    Dim somme As Double
    Dim resultat As Double
    Dim newbase() As Double
    Dim vecteur As Variant
    Dim matrice As Variant

    ' Lecture des valeurs de la plage des SCR et celles de la matrice des corrélations
    vecteur = mat_SCR.Value
    matrice = mat_cor.Value

    ' Initialisation d'un tableau dynamique avec les différents agrégat
    ReDim newbase(1 To mat_SCR.Rows.count)
    For i = 1 To mat_SCR.Rows.count
        newbase(i) = vecteur(i, 1)
    Next i

    ' Remplacement par zéro, l'agrégat concerné par l'allocation
    If Not Intersect(mat_SCR, SCR_i) Is Nothing Then
        newbase(cellule.Row - plage.Row + 1) = 0
    Else
        MsgBox "La cellule spécifique n'est pas dans la mat_SCR.", vbExclamation
        Exit Function
    End If

    ' Agrégation par la FS
    somme = 0
    For i = 1 To UBound(newbase)
        For j = 1 To UBound(newbase)
            somme = somme + newbase(i) * matrice(i, j) * newbase(j)
        Next j
    Next i
    resultat = Sqr(somme)

    ' Résultat
    InitialisationMarginal = resultat 'Ce résultat correspond au scr avec l'absence d'un de ses éléments constitutifs
End Function
```

```
Function Marginale(SCR_i As Range, mat_SCR As Range, SCR_agr As Double, mat_cor As Range) As Double

    Dim result() As Double
    Dim ratios() As Double
    Dim i As Integer
    Dim totalSum As Double
    Dim SCR_iPosition As Integer

    ' Construction de la table des résultats
    ReDim result(1 To mat_SCR.Rows.count)

    For i = 1 To mat_SCR.Rows.count

        ' Appel de la fonction InitialisationMarginal
        result(i) = InitialisationMarginal(mat_SCR, mat_cor, mat_SCR.Cells(i, 1)) - SCR_agr
    Next i

    ' Calcul des poids
    totalSum = Application.WorksheetFunction.Sum(result)
    ReDim ratios(1 To mat_SCR.Rows.count)

    For i = 1 To mat_SCR.Rows.count
        ratios(i) = result(i) / totalSum
    Next i

    ' Récupération des positions des différents SCR_i
    SCR_iPosition = SCR_i.Row - mat_SCR.Row + 1

    ' Résultat
    Marginale = ratios(SCR_iPosition)
End Function
```

Méthode d'Euler

```
Function Agreg(mat1 As Range, mat2 As Range) As Double
    Dim prod As Variant
    Dim transp As Variant
    Dim prod2 As Variant

    ' Calcul du produit matriciel
    prod = Application.WorksheetFunction.MMult(mat2, mat1)

    ' Transposition de mat1
    transp = Application.WorksheetFunction.Transpose(mat1)

    ' Calcul du produit matriciel transposé
    prod2 = Evaluate(Application.WorksheetFunction.MMult(transp, prod))

    ' Calcul de la racine carrée du résultat
    Agreg = Sqr(prod2)
End Function
Function Euler(SCR_i As Range, mat_SCR As Range, mat_cor As Range) As Double
    Dim col As Long
    Dim scr As Double
    Dim nombre As Long
    Dim corr As Double
    Dim contrib As Double
    Dim i As Long

    ' Récupération position du SCR_i
    col = SCR_i.Row - mat_SCR.Row + 1

    ' Récupération nombre de SCR_i
    nombre = Application.WorksheetFunction.CountA(mat_SCR)

    ' Calcul du SCR total
    scr = Agreg(mat_SCR, mat_cor)

    If scr = 0 Then
        Euler = 0
    Else
        ' Initialisation calcul
        corr = 0
        For i = 1 To nombre
            If mat_cor(i, col) <> 1 Then
                corr = corr + mat_cor(i, col) * mat_SCR(i)
            End If
        Next i
        contrib = (SCR_i.Value / scr) * (SCR_i.Value + corr)

        ' Calcul pourcentage
        Euler = contrib / scr
    End If
    End Function
```

Méthode de Shapley

```
' Fonction pour appliquer factoriels: 1/(FACT(A)/(FACT(A-B)*FACT(B-1)))
Function ApplyFactorial(A As Integer, B As Integer) As Double
    ApplyFactorial = 1 / (Application.WorksheetFunction.Fact(A) / (Application.WorksheetFunction.Fact(A - B) * _
    Application.WorksheetFunction.Fact(B - 1)))
End Function
```

```
' Fonction pour compter les valeurs non nulles en colonne 2 d'index différent de zéro en colonne 1
Function CountNonZero(outputArray As Variant, numRows As Integer) As Integer
    Dim i As Integer
    Dim count As Integer
    count = 0

    For i = 1 To numRows
        If outputArray(i, 1) <> 0 And outputArray(i, 2) <> 0 Then
            count = count + 1
        End If
    Next i

    CountNonZero = count
End Function
```

```
' Généreration des combinaisons de zéros
Function GenerateZeroCombinations(numRows As Integer, numZeros As Integer) As Collection
    Dim combinations As Collection
    Dim currentCombination() As Integer
    Dim i As Integer

    Set combinations = New Collection
    ReDim currentCombination(1 To numZeros)

    Call RecursiveGenerate(1, numZeros, 1, numRows, currentCombination, combinations)
    Set GenerateZeroCombinations = combinations
End Function
```

```
' Fonction récursive pour générer les combinaisons liées au triangle de Pascal
Sub RecursiveGenerate(pos As Integer, numZeros As Integer, start As Integer, numRows As Integer, _
                      currentCombination() As Integer, combinations As Collection)
    Dim i As Integer

    If pos > numZeros Then
        ' Ajoute de la combinaison courante à la collection
        combinations.Add Application.WorksheetFunction.Transpose(currentCombination)
        Exit Sub
    End If

    For i = start To numRows - (numZeros - pos)
        currentCombination(pos) = i
        Call RecursiveGenerate(pos + 1, numZeros, i + 1, numRows, currentCombination, combinations)
    Next i
End Sub
```

```vba
' Agrégation par la Formule Standard
Function Aggregation(mat_SCR As Variant, mat_cor As Variant, numRows As Integer) As Double
    Dim i As Integer, j As Integer
    Dim sumProduct As Double
    sumProduct = 0

    ' Somme des produits des valeurs du tableau et de la matrice de corrélation
    For i = 1 To numRows
        For j = 1 To numRows
            sumProduct = sumProduct + mat_SCR(i, 1) * mat_cor(i, j) * mat_SCR(j, 1)
        Next j
    Next i

    Aggregation = Sqr(sumProduct)
End Function

Function Marginale1(SCR_i As Range, mat_SCR As Variant, scr As Double, mat_cor As Variant) As Double
    Dim result() As Double
    Dim ratios() As Double
    Dim i As Integer, j As Integer
    Dim totalSum As Double
    Dim SCR_iPosition As Integer

    ReDim result(1 To UBound(mat_SCR, 1))

    ' Calcul des SCR après suppression d'un composant
    For i = 1 To UBound(mat_SCR, 1)
        result(i) = InitialisationMarginal(mat_SCR, mat_cor, i) - scr
    Next i


    totalSum = Application.WorksheetFunction.Sum(result)
    ReDim ratios(1 To UBound(mat_SCR, 1))

    For i = 1 To UBound(mat_SCR, 1)
        ratios(i) = -result(i)
    Next i

    ' Indexation des SCR_i de la matrice entrée en paramtre de la fonction pour designer la SCR_i à allouer
    SCR_iPosition = -1
    For i = 1 To UBound(mat_SCR, 1)
        If mat_SCR(i, 1) = SCR_i.Value Then
            SCR_iPosition = i
            Exit For
        End If
    Next i

    ' Resultat équivalent à la variable designée dans la mat_SCR des données entrées en paramètres
    If SCR_iPosition <> -1 Then
        Marginale1 = ratios(SCR_iPosition)
    Else
        Marginale1 = 0 ' Si la SCR_i n'est pas trouvé, retourne 0
    End If
End Function
```

```
Function Shapley(SCR_i As Double, mat_SCR As Range, mat_cor As Range) As Double

    Dim mat_SCR As Variant
    Dim modifiedArray As Variant
    Dim modifiedArray2 As Variant
    Dim mat_cor As Variant
    Dim i As Integer, j As Integer, numRows As Integer
    Dim scrValue As Double
    Dim result As Double
    Dim marginaleResult As Double
    Dim outputArray() As Variant
    Dim numZeros As Integer
    Dim zeroCombinations As Collection
    Dim ShapleyIndexes As Double
    Dim nonZeroCount As Integer
    Dim resultsArray() As Double
    Dim sumTotal As Double
    Dim sumTotal2 As Double
    Dim compOrdre As Integer
    Dim rowStart As Integer

    ' Chargement des données et de la matrice des corrélations
    mat_SCR = mat_SCR.Value
    mat_cor = mat_cor.Value
    numRows = UBound(mat_SCR, 1) 'Nombre d'observations
    rowStart = mat_SCR.Row ' Obtenir la ligne de départ de la mat_SCR

    ' Recherche de l'index de la valeur dont il faut calculer l'allocation dans la mat_SCR
    compOrdre = -1
    For i = 1 To numRows
        If mat_SCR(i, 1) = SCR_i Then
            compOrdre = i
            Exit For
        End If
    Next i

    If compOrdre = -1 Then
        MsgBox "SCR_i non trouvé dans la mat_SCR de données"
        Exit Function
    End If

    ' Création d'un tableau de sortie pour chaque étape
    ReDim outputArray(1 To numRows + 1, 1 To 4)
    ReDim resultsArray(1 To numRows, 1 To 3)

    ' Remplissage du tableau avec les valeurs initiales des différents SCR_i et leurs index
    For i = 1 To numRows
        outputArray(i, 1) = i ' Index
        outputArray(i, 2) = mat_SCR(i, 1) ' Valeurs initiales
        outputArray(i, 3) = "" ' Colonne pour les résultats de l'allocation Marginale
        outputArray(i, 4) = "" ' Colonne pour les indices de Shapley :
                                ' 1/(FACT(A)/(FACT(A-B)*FACT(B-1))) avec A le nombre d'observation de
                                ' départ yc celles égalent à zéro
                                ' et B le nombre d'observation de départ non nulles
    Next i

' Calcul du SCR pour la mat_SCR initiale
result = Aggregation(mat_SCR, mat_cor, numRows) 'Agrégation par la FS
outputArray(numRows + 1, 1) = 0 ' Ordonnancement 0 pour la ligne SCR
outputArray(numRows + 1, 2) = result ' Valeur SCR calculée
outputArray(numRows + 1, 3) = 0
outputArray(numRows + 1, 4) = 0 ' Zéro dans la colonne de la formule personnalisée
scrValue = result ' Sauvegarder le SCR pour l'allocation Marginale

' Calcul des allocations marginales pour chaque ligne de la mat_SCR des données entrées en paramètres
For j = 1 To numRows
    If outputArray(j, 1) <> 0 Then
        marginaleResult = Marginale1(mat_SCR, mat_SCR.Cells(j, 1), scrValue, mat_cor)
        outputArray(j, 3) = marginaleResult ' Remplissage de la matrice des sorties
    Else
        outputArray(j, 3) = 0 ' Si la colonne 2 ou si l'index, colonne 1 est 0
    End If
Next j
```

```vba
' Calcul des indices de Shapley
For j = 1 To numRows
    If outputArray(j, 1) <> 0 Then
        nonZeroCount = CountNonZero(outputArray, numRows)
        ShapleyIndexes = ApplyFactorial(numRows, nonZeroCount)
        outputArray(j, 4) = ShapleyIndexes ' Indices de Shapley
    Else
        outputArray(j, 4) = 0 ' Mettre zéro dans le tableau en mémoire pour les lignes d'index 0
    End If
Next j


For i = 1 To numRows
    resultsArray(i, 1) = i ' Ordonnancement
    resultsArray(i, 2) = 0 ' Initialiser la somme des produits à zéro
Next i

' Produits entre l'indice de Shapley et le l'allocation marginale, sommé au SCR_i pour chaque observation i
For j = 1 To numRows
    If outputArray(j, 1) <> 0 Then
        resultsArray(j, 2) = resultsArray(j, 2) + (outputArray(j, 3) * outputArray(j, 4))
    End If
Next j

' Calcul la somme totale de la colonne 2
sumTotal = 0
For i = 1 To numRows
    sumTotal = sumTotal + resultsArray(i, 2)
Next i

' Ajout du ratio dans la troisième colonne
For i = 1 To numRows
    If sumTotal <> 0 Then
        resultsArray(i, 3) = resultsArray(i, 2) / sumTotal
    Else
        resultsArray(i, 3) = 0
    End If
Next i
' Génération des combinaisons de zéros en se basant sur le triangle de Pascal et recalcule de l'allocation marginale
For numZeros = 1 To numRows - 1
    Set zeroCombinations = GenerateZeroCombinations(numRows, numZeros)

    For Each combination In zeroCombinations

        ' Copier le tableau initial et remplacer les lignes indiquées par 0

        ' Remplacet les 0 par "NA" avant les combinaisons du triangle de Pascal
        modifiedArray = mat_SCR
        For i = 1 To numRows
            If modifiedArray(i, 1) = 0 Then
                modifiedArray(i, 1) = "NA"
            End If
        Next i


        For Each Index In combination
            modifiedArray(Index, 1) = 0
        Next Index

        ' Mettre à jour le tableau de sortie
        For j = 1 To numRows
            outputArray(j, 2) = modifiedArray(j, 1)
            outputArray(j, 1) = j ' Réinitialisation des index
        Next j

        modifiedArray2 = modifiedArray
        For i = 1 To numRows
            If modifiedArray2(i, 1) = "NA" Then
                modifiedArray2(i, 1) = 0
            End If
        Next i
```

```
            ' Agrégations
            result = Aggregation(modifiedArray2, mat_cor, numRows)
            outputArray(numRows + 1, 2) = result ' Valeur SCR calculée

            ' Calculer Marginale pour chaque ligne
            For j = 1 To numRows
                If outputArray(j, 1) <> 0 Then
                    marginaleResult = Marginale1(modifiedArray2, mat_SCR.Cells(j, 1), result, mat_cor)
                    outputArray(j, 3) = marginaleResult
                Else
                    outputArray(j, 3) = 0
                End If
            Next j

            ' Récalcul des indices de Shapley
            For j = 1 To numRows
                If outputArray(j, 1) <> 0 Then
                    nonZeroCount = CountNonZero(outputArray, numRows)
                    ShapleyIndexes = ApplyFactorial(numRows, nonZeroCount)
                    outputArray(j, 4) = ShapleyIndexes
                Else
                    outputArray(j, 4) = 0
                End If
            Next j

            ' Recalculer SOMMEPROD entre les résultats de l'allocation marginal et ceux des indices de Shapley
            ' en fonction des index de chaque tableau généré

            For j = 1 To numRows
                If outputArray(j, 1) <> 0 Then
                    resultsArray(j, 2) = resultsArray(j, 2) + (outputArray(j, 3) * outputArray(j, 4))
                End If
            Next j
        Next combination
    Next numZeros

    ' Somme totale de SOMMEPROD après les modifications
    sumTotal2 = 0
    For i = 1 To numRows
        sumTotal2 = sumTotal2 + resultsArray(i, 2)
    Next i

    ' Ratio final dans la troisième colonne
    For i = 1 To numRows
        If sumTotal2 <> 0 Then
            resultsArray(i, 3) = resultsArray(i, 2) / sumTotal2
        Else
            resultsArray(i, 3) = 0
        End If
    Next i

    ' Renvoi du ratio de la variable désignée dans la mat_SCR des données
    Shapley = resultsArray(compOrdre, 3)
End Function
```