



Document d'Orientation

Les Générateurs de scénarios économiques

Eléments d'analyse et exemples de pratiques actuarielles applicables au marché français

Validé par le Conseil d'Administration du 18 Septembre 2018

Préambule

Les générateurs de scénarios économiques sont devenus un outil indispensable à la gestion des risques en assurance. Les progrès de l'économie financière et les immenses avancées technologiques qui ont permis de fournir les outils de recueil, de traitement des données, de calcul et de projection, ont tout à la fois alimenté et répondu aux attentes de la régulation prudentielle et comptable. Cette dernière, à travers IFRS, Solvabilité II ou encore les travaux sur l'Embedded value, a affirmé avec toujours plus de vigueur ces dernières années, notamment dans le domaine de l'épargne, la nécessité de mesurer les options incorporées aux produits d'assurance. Les générateurs de scénarios économiques ont ainsi joué un rôle primordial, au risque d'ailleurs de faire perdre de vue que l'évaluation de ces options suppose a priori à la fois des scénarios financiers et des scénarios assurantiels.

Si la modélisation du comportement des marchés financiers a en fait une longue histoire derrière elle depuis les travaux pionniers de Louis Bachelier, c'est une démarche qui reste en constante progression. A cet égard, la présente note pédagogique dresse, à l'instant présent, un panorama aussi fidèle et complet que possible de l'état de l'art et des bonnes pratiques identifiées par la communauté actuarielle dans ce domaine. Pour autant, l'actuaire se devra d'être attentif à actualiser en permanence ses compétences en ayant bien conscience des limites de toute simulation stochastique d'un marché.

Comme bien des démarches scientifiques, **la modélisation du comportement des marchés repose sur une démarche d'induction à partir des observations**, mais ces observations manquent des propriétés de reproductibilité et de permanence, sur lesquelles une démarche scientifique s'appuie de façon privilégiée pour asseoir des lois. Cette carence est particulièrement nette, par exemple, sur la dynamique de long terme des taux d'intérêt, aux horizons qui intéressent la gestion prudentielle des contrats d'assurance.

Qu'il s'agisse de la prise en compte progressive par la littérature des distributions à queues épaisses ou, plus récemment, de l'irruption des taux négatifs, qui ont re-légitimé des modèles de taux qu'une partie des acteurs tendait à écarter en les considérant comme irréalistes, le recours à ces outils impose de conserver du recul et de rester très attentif aux écarts par rapport à l'observation. Rappelons enfin que les démarches de valorisation, en particulier lorsque l'on recourt à l'univers risque neutre, reposent sur des hypothèses très généralement admises mais dont l'évidence est loin d'être établie.

C'est pourquoi il est particulièrement recommandé aux actuaires en charge de ces travaux de tenir le plus grand compte du présent document d'orientation, qui doit leur permettre de confronter leurs connaissances et leur pratique avec l'état de l'art que dresse cette note et d'adapter leur approche en fonction du contexte (réglementaire ou économique) et des objectifs (valorisation ou mesure de risque) de l'étude. Il leur appartiendra en outre, au vu de la diversité des approches présentées et des questions soulevées, de faire preuve de la vigilance et de l'esprit critique requis dans la manipulation des générateurs de scénarios économiques, en n'hésitant pas à recourir concurremment, notamment lorsqu'ils sont appelés à évaluer des risques extrêmes, à construire ou rechercher auprès d'autres experts des scénarios de choc fondés sur une appréhension macro-économique du risque financier.

Ce document d'orientation est issu des travaux réalisés au sein d'un groupe de travail de l'Institut des actuaires codirigé par Amélie MOURENS et Michaël DONIO. Les membres du groupe de travail sont : KAMAL Armel, ARROUY Pierre-Edouard, AYVAZIAN Cédric, BARON Thibault, BELLIER Guillaume, BONNEFOY Paul, BONNIN François, BUZZI Arnaud, CANARELLI Agnès, CHANDRASEKARAM Sanjeevan, CHIU Florence, CONNEAU Fabien, DEMBELE Youssouf, DEVINEAU Laurent, , GARNIER Jean-Baptiste, GERBER Guillaume, HONORE ROUGE Yolande, JEBARRI Khalid, JIMENEZ Martin, JUILLARD Marc, KIZILIAN Emmanuel, LI Ying, MEDECIN Jean-Philippe, RADI Yassir, RALAIMIADANA Eric, SAVIDAN Valentin, VEDANI Julien, VESTRI Chloé, WAKSMAN Régis, WILHELMY Florent, YOUNSI Rhomdane.

David DUBOIS
Président

Christian GIBOT
1^{er} Vice-Président

Valéry JOST
Vice-Président

Introduction

La Directive Solvabilité 2 (art 77) et l'EIOPA (cf. CP n°26) retiennent comme définition du Best Estimate : « *La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents.* ».

Le CFO Forum stipule que la MCEV doit être valorisée sur la base d'hypothèses « market consistent » (principes 12 à 15). Enfin, les principes de la norme IFRS 17 précisent que les provisions techniques doivent être valorisées sur la base d'hypothèses financières cohérentes avec le marché.

Les GSE ont pour objectif premier de projeter de manière cohérente des valeurs d'actifs sur la base de trajectoires stochastiques. La cohérence des projections des valeurs s'apprécie au regard de critères statistiques et économiques dans un univers « monde réel » ou, lorsque cela est possible dans un univers « risque neutre », consistant à déformer les probabilités de survenance des événements pour se projeter dans un univers financier dans lequel il n'y aurait pas de prime de risque.

Selon le contexte et la finalité des études menées (inventaire à une date donnée, valorisation d'options, projections économiques futures, etc), la construction, le calibrage et le choix des hypothèses du GSE soulèvent bon nombre de problématiques techniques.

Elaboré dans le cadre de travaux menés au sein d'un groupe de travail (GT) de l'Institut des Actuaire, ce document présente les principes qui sous-tendent la construction des GSE : grandes familles de modèles utilisés sur le marché, simulation de trajectoires, calibrage et principaux avantages et inconvénients.

Compte tenu de la large étendue du sujet, le GT a fait le choix de restreindre ce document à l'univers de projection « risque neutre ».

Table des matières

Préambule.....	2
Introduction.....	3
Table des matières.....	4
1.1. Univers « monde réel » vs « risque neutre ».....	6
1.2. Notion de « market consistency ».....	6
1.3. Glossaire.....	7
2.1. Concepts fondamentaux.....	11
2.2. Modèles d'équilibre.....	11
2.2.1. Modèle d'équilibre partiel : Vasicek à un facteur.....	12
2.2.2. Modèle d'équilibre général : les modèles « CIR » (Cox, Ingersoll et Ross, 1985).....	12
2.2.2.1. Modèle de taux court CIR (Cox, Ingersoll et Ross 1985).....	12
2.2.2.2. Modèle de taux court CIR++.....	13
2.2.2.3. Modèle de taux court CIR2++.....	14
2.2.3. Avantages et inconvénients des modèles d'équilibre.....	17
2.3. Modèles fondés sur l'absence d'opportunité d'arbitrage.....	18
2.3.1. Modèle Heath, Jarrow et Morton (HJM).....	18
2.3.2. Modèles de Ho & Lee (HL) et Hull & White (HW).....	18
2.3.2.1. Modèles mono-factoriels.....	18
2.3.2.2. Modèles multi factoriels.....	19
2.3.3. Modèle de Black Karasinski.....	19
2.3.3.1. Modèle de Black Karasinski à un facteur (BK).....	19
2.3.3.2. Modèle de Black Karasinski à deux facteurs (2FBK).....	20
2.3.3.3. Conclusions sur les modèles BK et 2FBK.....	21
2.3.4. Modèle Gaussien à deux facteurs : G2++.....	21
2.3.5. Approches de modélisation sur taux forward.....	22
2.3.5.1. LIBOR Market Model (LMM).....	22
2.3.5.2. Displaced Diffusion LIBOR Market Model (DD LMM ou « LMM shifté »).....	24
2.3.6. Avantages et inconvénients des modèles de taux fondés sur l'AOA (tableau synthétique).....	26
2.4. Modèles composites.....	29
2.4.1. Problématique concernant le pricing des dérivés action.....	29
2.4.2. Modèles de Jarrow-Yildirim (JY) et Fabio Mercurio (FM).....	30
3.1. Présentation des modèles crédit.....	32
3.1.1. Modèles à intensité de défaut, le modèle CIR ++.....	32
3.1.2. Modèle à transition de ratings, le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull (JLT).....	34
3.2. Avantages et inconvénients des modèles de crédit.....	36
4.1. Modèles de diffusion Log-normale.....	37
4.1.1. Modèle à volatilité constante.....	37
4.1.2. Modèle lognormal à volatilité par terme déterministe.....	38
4.2. Modèle de Heston.....	38
4.3. Modèle de Merton.....	39
4.4. Modèle à volatilité stochastique et à diffusion par sauts Stochastic Volatility-Jump Diffusion (SVJD ou modèle de Bates [1996]).....	40
4.5. Avantages et inconvénients des modèles action.....	42

5.1.	Différentes formes de calibrage	44
5.2.	Choix des instruments financiers.....	45
5.3.	Grands choix du calibrage	46
5.3.1.	Courbe des taux	46
5.3.2.	Calibration des prix d'instrument ou des volatilités implicites.....	46
5.3.3.	Date de référence pour le calibrage	47
5.3.4.	Sources des données	47
5.3.5.	Nombre de calibrages (scénarios centraux et de chocs)	48
5.3.6.	Recours à un algorithme	48
5.3.7.	Contraintes à faire peser sur le calibrage	49
5.3.7.1.	Ecart de prix.....	49
5.3.7.2.	Contraintes supplémentaires.....	49
5.4.	Validation d'un GSE « risque neutre »	49
5.4.1.	Tests de martingalité	50
5.4.2.	Cohérence avec le marché.....	51
5.4.3.	Vérification de l'implémentation statistique	52
5.4.4.	Remarques générales	52
5.4.4.1.	Critères d'acceptation.....	52
5.4.4.2.	Seuil d'erreur	53
5.4.4.3.	Théorème central limite	53
6.1.	Description des objectifs de l'étude et des choix réalisés	55
6.1.1.	Objectifs de l'étude.....	55
6.1.2.	Portefeuilles modélisés.....	55
6.1.3.	Données de calibrage.....	57
6.2.	GSE retenus pour modélisation	59
6.2.1.	Distribution des modèles de taux	60
6.2.2.	Distribution des modèles action	61
6.3.	Tests Martingales et valorisation des dérivés	61
6.3.1.	Test de déflateur.....	62
6.3.2.	Test action.....	62
6.3.3.	Test de Zéro coupon maturité 10 ans	63
6.4.	Volatilité implicite actions	63
6.4.1.	Prix des swaptions de Tenor 10 ans.....	63
6.4.2.	Smile de volatilité.....	64
6.5.	Résultats après implémentation.....	65
6.5.1.	Analyse des résultats par flux de simulation	65
6.5.2.	Capital libre et ratio de couverture.....	66
6.5.3.	Impact du paramétrage du modèle de taux	67
6.5.4.	Conclusions et recommandations.....	68

1. Principaux concepts et propriétés

1.1. Univers « monde réel » vs « risque neutre »

De manière générale, les GSE sont structurés selon les approches « **monde réel** » ou « **risque neutre** ».

- ◆ Dans l'univers de probabilité « **monde réel** », l'historique des cours d'un actif permet de construire des distributions anticipant son évolution future. Les projections ainsi obtenues varient selon les modalités (fenêtre de temps choisie pour l'historique) et les hypothèses de prévisions macroéconomiques (méthodologies d'estimation des primes de risque). Les rendements futurs des actifs intègrent alors de manière implicite une prime de risque potentiellement variable dans le temps ;
- ◆ L'univers « **risque neutre** » - ou « **univers de probabilité risque neutre** » - est un cadre théorique de référence permettant de valoriser des instruments contingents à des risques financiers sans avoir recours à des hypothèses sur les primes de risque associées. Historiquement, ce cadre a été utilisé en finance de marché pour valoriser des options, ayant même contribué au développement des marchés d'options dans les années 1980. Il a été progressivement élargi à d'autres types d'actifs ou de passifs pour être aujourd'hui utilisé pour la valorisation des passifs d'assurance vie.

L'aversion au risque de l'investisseur n'a pas vocation à être intégrée et tous les processus de prix évoluent, en moyenne, au taux sans risque. L'emploi de scénarios stochastiques « **risque neutre** » permet de capter les effets de la seule volatilité qui mesure l'importance des fluctuations de valeur d'ailleurs suffisante - dans l'univers « **risque neutre** » - pour estimer des prix.

Dans ce cadre théorique l'existence de la « **probabilité risque neutre** » repose sur l'hypothèse que les prix ne sont pas arbitrables, ce qui est relativement réaliste pour des marchés liquides, et son unicité suppose que le marché soit complet ce qui n'est pas vérifié dans la réalité (ce cas aboutissant à plusieurs prix possibles pour un même actif).

1.2. Notion de « market consistency »

La notion de « **market consistency** » - ou de « cohérence avec le Marché » - consiste, intuitivement, à injecter dans les modèles de l'information de marché, qui contient d'abord les prix : courbes de taux, prix d'actions, spread de crédit obligataires, prix d'options listées, etc.

- ◆ Dans l'univers « risque neutre », l'ensemble des prix est une information suffisante pour valoriser des instruments financiers non cotés ;
- ◆ Dans l'univers « monde réel » il est nécessaire de calibrer en plus les primes de risques ;
- ◆ Les deux approches pouvant être « market-consistent ».

S'agissant des passifs d'assurance vie, l'information de marché n'est pas directement observable. Par conséquent, les acteurs ont recours pour leur valorisation à des approches « marked-to-model » reposant sur des modèles dépendant de facteurs de risque calibrés à partir d'information de marché. Les facteurs de risque les plus significatifs étant financiers, ces modèles intègrent des données de marché et le critère de « market consistency » peut donc s'appliquer. En pratique, la mise en application de cette approche consiste à :

- ◆ **Sélectionner les modèles** les mieux adaptés aux portefeuilles valorisés (EIOPA-BoS-14/166 FR orientation 36) ;
- ◆ **Répliquer les options les plus représentatives** de l'optionalité du portefeuille dans le calibrage **des modèles** (EIOPA-BoS-14/166 FR orientations 36 et 57, ce qui permet d'assurer la robustesse des estimations finales). Les options les plus représentatives sont les taux minimum garantis, la stratégie de participation aux bénéficiaires, le comportement des assurés et la gestion des actifs,

- ◆ **Valider les scénarios** qui doivent permettre de retrouver les bons prix et doivent respecter certaines propriétés comme la martingalité des trajectoires.

Il est à noter que le critère de « market consistency » est une exigence explicite de la directive solvabilité II (Directive 2009/138/ce du parlement européen et du conseil du 25 novembre 2009).

1.3. Glossaire

<p>Option</p>	<p>L'option est un instrument financier, dépendant d'un autre instrument financier, le « sous-jacent ». La valeur de l'option fait intervenir des paramètres caractérisant le « sous-jacent » comme la valeur atteinte ou le niveau du « sous-jacent » (le « strike »). Une option donne le droit (mais pas l'obligation) d'acheter (option d'achat, ou « call ») ou de lui vendre (option de vente, ou « put ») un actif à un prix donné, moyennant le versement d'une prime, à une date future. On distingue par ailleurs différentes typologies d'options :</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆ ATM - Une option d'achat (respectivement de vente) est « At The Money » lorsque le cours du sous-jacent est proche du prix d'exercice. ◆ OTM - Une option d'achat (respectivement de vente) est « Out of the Money » (OTM) lorsque le cours de l'actif sous-jacent est inférieur (respectivement supérieur) au prix d'exercice. ◆ ITM - Une option d'achat (respectivement de vente) est « In the Money » (ITM) lorsque le cours de l'actif sous-jacent est supérieur (respectivement inférieur) au prix d'exercice <p>On assimile régulièrement, par souci de simplification, options ITM et OTM sous la notation unique OTM (options en dehors de la monnaie).</p>
<p>Options financières des contrats d'assurance vie (ou « optionalité »)</p>	<p>Les contrats d'assurance vie offrent des options aux assurés (option de rachat, taux minimum garanti, participation aux bénéfices,...), mais aussi des sources d'optimisations liées à la gestion Actif-Passif (gestion des différentes provisions) qui vont créer des non-linéarités dans la vie du produit. Ces éléments - <i>dits</i> « sources d'optionalité » - sont en particulier fortement dépendants de l'évolution du contexte financier (les scénarios économiques ici) et vont impacter la valeur du passif. Les calculs ALM permettent de valoriser ces options financières des contrats par une décomposition en valeur intrinsèque et valeur temps.</p>
<p>Volatilité</p>	<p>La volatilité d'un sous-jacent (action, taux, spread,...) est l'ampleur des variations du cours de ce sous-jacent et traduit son risque intrinsèque. Le plus simple indicateur d'efficacité d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs est le ratio sur-rendement/risque de Sharpe $S = \frac{R-r}{\sigma}$ avec R le rendement de l'actif et r celui du marché de référence ($R - r$ est donc homogène à une prime de risque) et σ la volatilité de l'actif. Ce ratio est utilisé en gestion de portefeuille.</p> <ul style="list-style-type: none"> ◆ Volatilité historique : La volatilité historique d'un actif est la volatilité réalisée, estimée à partir d'une chronique de réalisations passées (un historique de données). Cette volatilité a une interprétation en termes d'évolution du prix dans le temps et sa détermination répond à un critère de réalisme. <p>Volatilité implicite : La notion de volatilité implicite est la volatilité retenue qui permet de reconstituer le pricing des options. C'est un indicateur représentatif d'un prix d'option à une date donnée et sous-tendu par une hypothèse de modèle. Par exemple, en partant d'une valeur de transaction (un prix) d'une swaption sur le marché financier, on va pouvoir reconstituer une volatilité implicite dite généralement « lognormale », si l'hypothèse de modèle choisi est un modèle de Black (taux swap lognormal), et une volatilité implicite « normale » si l'hypothèse</p>

	<p>de modèle choisi est un modèle de Bachelier (taux swap normal). Ces deux hypothèses peuvent fournir des valeurs de volatilités implicites très différentes. Notons enfin que, en pratique, la volatilité implicite est une méthode de cotation aussi pertinente que l’affichage direct d’un prix, et sont très utilisées par les praticiens des marchés.</p>
Strike	<p>Le Prix d’exercice d’une option (« strike » en anglais) désigne le prix auquel sera potentiellement acheté ou vendu le sous-jacent. Pour une option d’achat, il s’agit du prix auquel le sous-jacent pourra être acheté. Pour une option de vente, il s’agit du prix auquel le sous-jacent pourra être vendu.</p>
Black & Scholes	<p>Le modèle de référence – largement utilisé par les acteurs du marché pour modéliser les indices Equity, Black & Scholes - suppose que la volatilité est indépendante du strike. Or, lorsqu’on observe les volatilités implicites pour différents niveaux de strike, on obtient une courbe en forme de sourire (« smile ») et non une droite horizontale.</p> <p>Pour capter cette réalité du marché (cette « anomalie de modélisation »), il faut donc, en théorie, si la modélisation s’appuie sur le modèle Black & Scholes, calibrer autant de modèles que de strikes et ce n’est pas envisageable en pratique. Une solution consiste alors à utiliser un modèle plus sophistiqué.</p>
Taux spot	<p>Les taux spot correspondent aux taux issus de l’information de marché au moment de l’observation.</p> <p>Le retraitement de cette information, observable « aujourd’hui », nous permet d’obtenir la valeur d’un taux estimée (par le marché) dans le futur, vu d’« aujourd’hui » (« taux forward »).</p>
Taux Forward	<p>Les taux « forward » sont les taux qui régissent les opérations de prêts/emprunts opérés dans le futur mais dont les conditions sont fixées aujourd’hui (« Forward Rate Agreement »).</p>

2. Familles de modèles

En assurance, **le choix des modèles dépend en premier lieu de la nature des risques à modéliser**. Les principaux risques qui sont modélisés dans un GSE sont le risque de taux, le risque de crédit et le risque action. Les GSE peuvent par ailleurs être répartis en deux familles : **les modèles composites et les modèles intégrés**.

- Les **modèles composites** proposent une description ad hoc de chacune des classes d'actif avant de les agréger pour proposer une description de l'actif global ;
- Les **modèles intégrés** proposent une description structurée de plusieurs classes d'actifs à partir d'une variable explicative de référence¹.

Ainsi plusieurs modèles et structures d'interaction sont utilisables au sein de chaque classe d'actifs, présentant des difficultés d'implémentation et de calibrage. Notons qu'en pratique les GSE utilisés par les praticiens sont généralement de la famille des modèles composites.

Les modèles de taux - à partir desquels est modélisée la structure par termes des taux - servent également dans la modélisation des autres actifs. Ils sont donc des modèles centraux dans un GSE. Idéalement, les modèles de taux doivent pouvoir :

- **représenter correctement la structure par terme des taux d'intérêt** et notamment la courbe des taux à la date de projection, sans créer d'arbitrage ;
- **intégrer une dynamique d'évolution de la courbe des taux** cohérente avec les déformations observées sur les marchés.

Dans le même temps, la mise en œuvre des modèles de taux doit permettre autant que possible :

- la **simplicité de discrétisation et de simulation** ;
- **l'existence de formules fermées** pour le calcul du prix des obligations zéro-coupon et dérivés.

On peut regrouper les modèles de taux - selon leurs caractéristiques et leur positionnement chronologiques – entre des modèles dits d'équilibre, fondés sur l'absence d'arbitrage, et des modèles composites, intégrant le risque de taux et d'autres risques de marché diffusés de manière contingente à la diffusion des taux.

Il convient en premier lieu de définir les concepts fondamentaux communs à l'ensemble des modèles de taux.

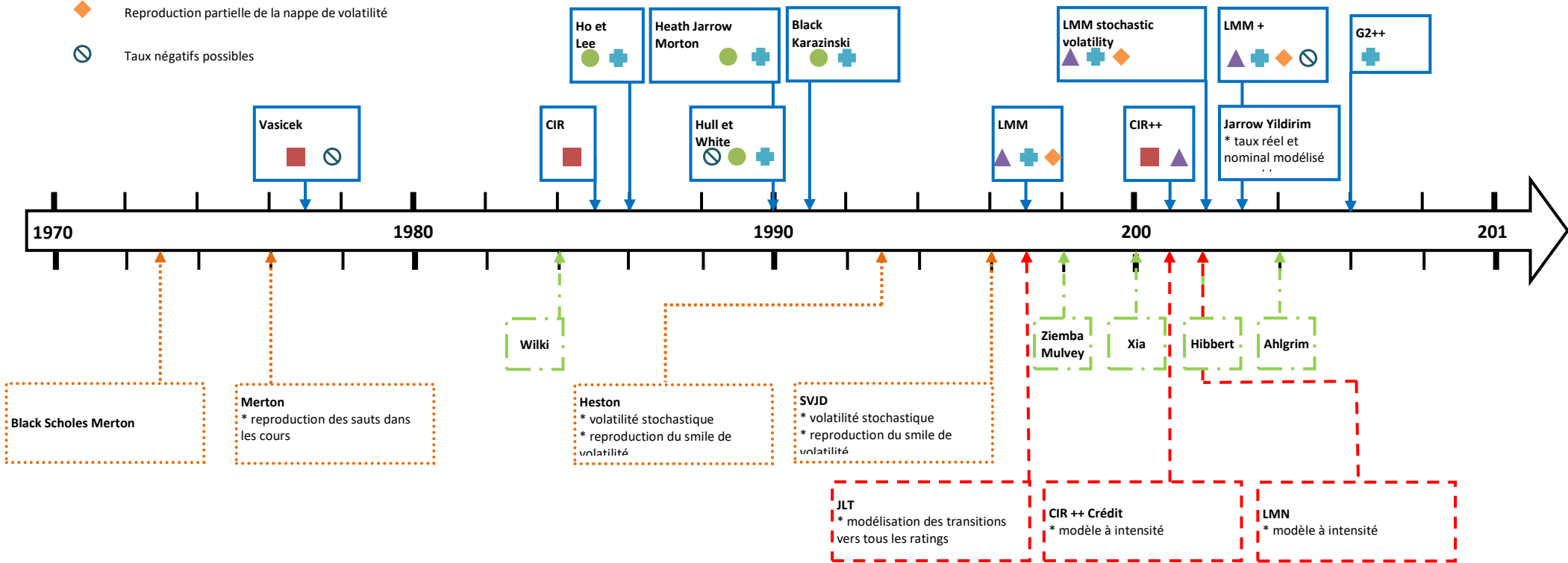
¹ L'exemple classique est le modèle de Wilkie [1984]. Ziembra et Mulvey [1998] améliorent la qualité des projections. Brennan et Xia [2000] proposent d'utiliser l'inflation et le taux d'intérêt court terme, ce qui permet d'intégrer des formules fermées pour certaines obligations. Le modèle d'Ahlgrim et al. [2005] et le modèle de Hibbert [2002] sont également des exemples courants, le modèle d'Ahlgrim utilisant les taux nominaux plutôt que l'inflation comme brique de base.

Légende :



- Taux court
- Taux forward instantanés
- ▲ Modèle marché
- + Reproduction de la courbe de taux initiale
- ◆ Reproduction partielle de la nappe de volatilité
- ⊖ Taux négatifs possibles

Historique des modèles de diffusion



2.1. Concepts fondamentaux

La brique de base d'un modèle de taux est l'obligation zéro-coupon, produit financier dont la rémunération ne se fait que via son taux, et versant un montant nominal C à la date à maturité $T \geq t$. On note $P(t, T)$ son prix à la date $t \in [0, T]$ et on pose $C = 1 \text{ €}$.

Trois types de taux sont communément définis à partir de ce prix :

- Le taux d'intérêt instantané continûment composé parfois appelé « taux zéro-coupon » : c'est le taux R continu constant sur la période $[t, T]$ tel que : $P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$
- Le taux simplement composé tels que les taux LIBOR et EURIBOR. Par extension, on appelle « taux LIBOR » tout taux L tel que : $P(t, T) = \frac{1}{1+L(t, T)(T-t)}$
- Le taux composé annuellement, aussi appelé taux actuariel, noté Y , qui vérifie : $P(t, T) = \frac{1}{(1+Y(t, T))^{(T-t)}}$

Dans la pratique et dans le cas d'un calcul prudentiel Solvabilité 2 les taux utilisés pour la courbe EIOPA², qui sert de référence pour l'actualisation, sont des **taux zéro-coupons**. On appelle taux court ou taux court instantané (désigné par abus de langage par « taux court »), la limite de tous ces taux lorsque T tend vers t soit $r(t) = \lim_{T \rightarrow t} P(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} L(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} Y(t, T)$.

Il est à noter que ce taux n'a pas de réalité physique car prévalant sur une période infinitésimale. Il existe là aussi des approximations communes (souvent taux court = taux journalier). C'est la modélisation du taux court qui est le principal objet d'un modèle de taux. Ainsi, quelle que soit la définition du taux retenue, la modélisation reste la même.

Pour un **taux forward**, qui correspond au taux payé immédiatement, mais au titre d'une date ultérieure, on définit simplement le taux zéro coupon forward entre les dates $S \geq 0$ et $T \geq S$, vu en date $0 \leq t \leq S$, par : $P(t, T, S) = \frac{P(t, T)}{P(t, S)}$. Le taux forward (instantané continûment composé, simplement composé ou composé annuellement) se déduit de la même façon que précédemment, en remplaçant $P(t, T)$ par $P(t, T, S)$.

2.2. Modèles d'équilibre

Ces modèles sont adaptés à des projections de long terme et incluent des **phénomènes de « retour à la moyenne »**³. Ils utilisent un processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour modéliser l'évolution future du **taux court** instantané.

La dynamique du taux court r_t sous l'univers « risque neutre » s'écrit : $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^\beta dW_t$ où :

- a : vitesse de retour à la moyenne à long terme (*speed mean-reversion*) ;
- b : moyenne à long terme du taux court (mean-reversion) ;
- σ : volatilité du taux court ;

² Il est à noter que cette référence ne s'applique pas obligatoirement dans le cadre d'une évaluation MCEV (The basic risk-free interest rate term structure, credit risk adjustment, Matching Adjustment and Volatility Adjustment as calibrated and applied in Solvency II is a possible application of this Principle [cf CFO-Forum_MCEV_Principles_and_Guidance_April]) ou dans le cas de l'application de la norme IFRS 17.

³ Le phénomène empirique du « retour à la moyenne » stipule que des périodes où les taux sont élevés sont généralement suivies par des périodes où les taux sont bas: cette contrainte est souvent reprise dans les modèles d'équilibre

- W_t : mouvement brownien standard.

Les modèles monofactoriels de Vasicek [1977] et Cox, Ross et Ingersoll (CIR) [1985] s'obtiennent en choisissant respectivement $\beta = 0$ et $\beta = \frac{1}{2}$.

2.2.1. Modèle d'équilibre partiel : Vasicek à un facteur

Le modèle de Vasicek est un **modèle d'équilibre avec $\beta = 0$** . Sous l'univers « risque neutre », l'évolution du taux court instantané est décrite par la dynamique suivante : $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$.

Le prix d'une obligation zéro-coupon achetée à l'instant t qui délivre une unité monétaire à T est une fonction affine de r_t . **Le modèle fournit des formules analytiques pour les prix des produits dérivés de taux (caps, floors, swaptions) ce qui facilite le calibrage.** Le modèle simule des taux négatifs. NB : il requiert que le modèle de gestion actif-passif soit adapté à leur prise en charge, ce qui n'est pas encore le cas pour l'intégralité des acteurs du marché. En revanche, il autorise les possibilités d'arbitrage et ne réplique pas la courbe initiale.

2.2.2. Modèle d'équilibre général : les modèles « CIR » (Cox, Ingersoll et Ross, 1985)

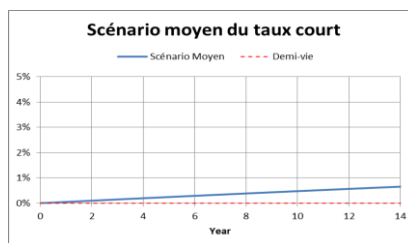
2.2.2.1. Modèle de taux court CIR (Cox, Ingersoll et Ross 1985)

Dans le modèle de Vasicek, le taux court peut devenir négatif car l'écart-type instantané ne dépend pas du niveau atteint par r_t . Le modèle CIR est construit selon une dynamique incluant la racine carrée du taux courant dans le terme de diffusion ($\beta = \frac{1}{2}$). r_t est donc toujours positif $dr_t = \lambda(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$.

Le scénario moyen du taux court débute toujours au point de départ r_0 , qui est également un paramètre du modèle, pour converger sur un horizon de projection suffisamment grand vers θ . La vitesse de convergence du scénario moyen entre r_0 et θ est négativement exponentielle. Dans certains cas particuliers, cette vitesse peut dégénérer en une vitesse linéaire.

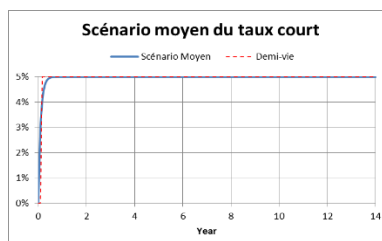
Si $\lambda \rightarrow 0$, alors : $\mathbb{E}_0^Q[r_t] \approx (\theta - r_0) \times \lambda t + r_0$

x0	0%
lambda	1%
theta	5%
sigma	2%



Si $\lambda \rightarrow +\infty$, alors : $\mathbb{E}_0^Q[r_t] \approx \theta$ ce qui implique un saut instantané après la date de génération des scénarios entre r_0 et θ .

x0	0%
lambda	1000%
theta	5%
sigma	2%

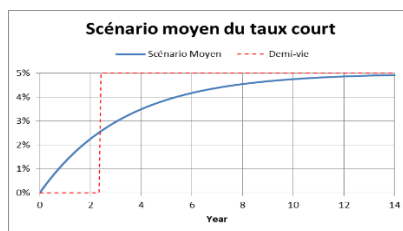


Dans le cas général, **le scénario moyen du taux court instantané est sujet à une décroissance exponentielle** entre r_0 et θ . La demi-vie associée qui correspond à la date future où le scénario moyen est à mi-parcours s'exprime facilement en fonction des paramètres des modèles:

$$r_0 \times p_{t_{1/2}} + \theta \times (1 - p_{t_{1/2}}) = \frac{r_0 + \theta}{2} \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

$\lambda = 30\%$

x0	0%
lambda	30%
theta	5%
sigma	2%



La dynamique CIR contient en réalité deux sources de volatilité :

- Une volatilité induite par le mouvement brownien ;
- Une volatilité induite de façon moins intuitive par le relâchement de l'effet de retour à la moyenne. En effet, si l'effet de retour à la moyenne agit intensément, la volatilité du taux court sera contenue. Inversement, si l'effet de retour à la moyenne intervient peu, le taux court, étant libéré de la force de rappel au taux court de long terme θ , générera d'avantage de volatilité.

Outre le fait de ne pas produire de taux négatifs, l'introduction de la racine carrée dans l'équation de diffusion a pour conséquences que :

- La distribution des taux d'intérêt passe d'une loi normale symétrique à une loi du χ^2 non centrée asymétrique. Cette distribution pour les taux d'intérêt est intéressante dans le cadre d'économies développées comme pour la zone Euro ou \$ US.
- La volatilité $\sigma\sqrt{r_t} \Delta W_t$ de la variation du taux court Δr_t dépend du niveau du taux court r_t , ce qui n'est pas le cas du modèle de Vasicek. La volatilité de la variation du taux court sera modulée en fonction du niveau de taux ce qui est plus conforme à la réalité.
- Le modèle CIR est un modèle affine : le prix d'une obligation zéro-coupon achetée à l'instant t qui délivre une unité monétaire à T est une fonction affine de r_t .

2.2.2.2. Modèle de taux court CIR++

Le modèle de taux CIR ne permet pas de prendre en compte parfaitement la courbe des taux initiale observée sur les marchés financiers. Afin d'y remédier, Brigo et Mercurio ont proposé un modèle dit « étendu » CIR++ en introduisant une translation déterministe fonction du temps φ_t dans la définition du taux court : $R^{CIR++}(0, T) = R^{Marché}(0, T)$. Dans le modèle CIR++, le taux court instantané s'écrit : $r_t^{CIR++} = r_t^{CIR} + \varphi_t$.

La forme de φ_t requiert la valeur des taux zéro-coupon de marché pour l'ensemble des maturités en des pas très fins⁴ ce qui nécessite des méthodes d'interpolation et d'extrapolation de la courbe initiale de marché. Toutefois le calcul des taux zéro-coupon est relativement simple. En effet, la détermination du taux zéro-coupon futur $R^{CIR++}(t, T)$ nécessite uniquement les paramètres du modèle CIR et les prix zéro-coupon de marché $P^{Marché}(0, t)$ et $P^{Marché}(0, T)$: $R^{CIR++}(t, T) = R^{CIR}(t, T) + \Phi'(t, T) = \alpha(t, T) + \beta(t, T) \times r_t + \Phi'(t, T)$.

$\Phi'(t, T)$ dépend des paramètres tout comme $\alpha(t, T)$ et $\beta(t, T)$ et des prix zéro-coupon de marché $P^{Marché}(0, t)$ et $P^{Marché}(0, T)$.

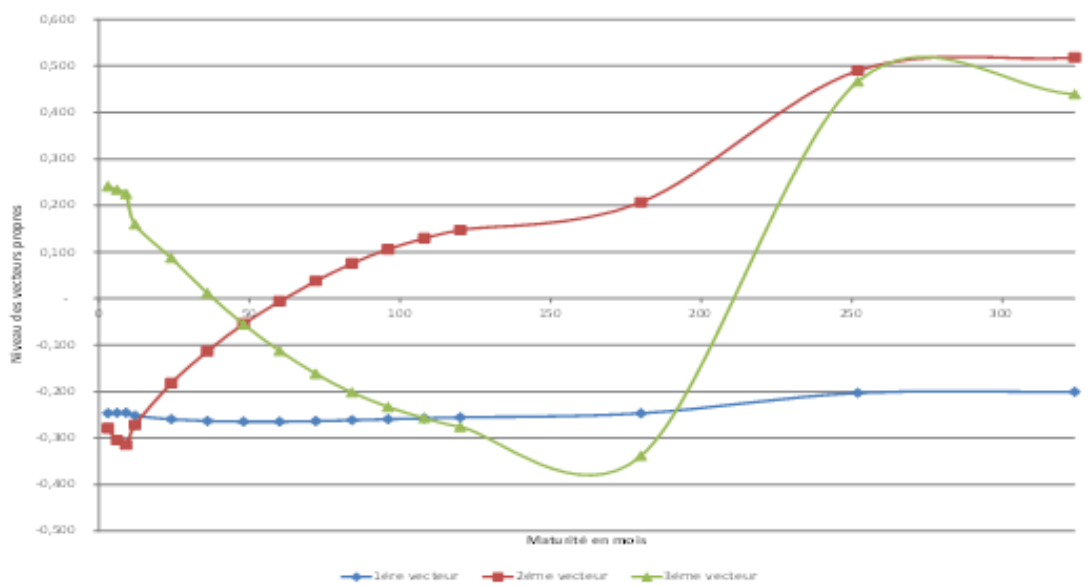
⁴ Le pas de génération des taux dans les modèles de taux court est en général très fin avec souvent un pas Black-Karasinski mensuel ou même hebdomadaire.

Une conséquence importante de l'extension du modèle par une translation déterministe est la potentielle exploration de la zone de taux négatifs. Le recours au modèle CIR++ requiert que le modèle de gestion actif-passif soit adapté à leur prise en charge, ce qui n'est pas encore le cas chez l'intégralité des acteurs du marché. Des formules fermées existent dans les modèles de taux CIR et CIR++ pour valoriser des produits dérivés de taux vanilles (caplets, floorlets et swaptions) utilisés lors du calibrage « market-consistent ».

2.2.2.3. Modèle de taux court CIR2++

Dans les modèles CIR et CIR++, les déformations de la courbe des taux (zéro-coupon) sont déterminées par une unique source aléatoire qui est le taux court instantané. Utiliser le taux court comme seul facteur implique une corrélation parfaite entre les rendements de tous les actifs. Or en réalité un choc de taux sur la partie court terme ne présage pas forcément d'une déformation équivalente sur la partie long terme de la courbe des taux. Afin de « casser » la corrélation linéaire parfaite, on intègre plusieurs facteurs aléatoires dans la description du taux court.

Sur la base d'un historique journalier couvrant la période 2000 – 2013, une Analyse en Composantes Principales (ACP) permet de déterminer que plus de 99 % de la dynamique de la structure par termes des taux d'intérêts est expliquée par 3 vecteurs propres : translation, pentification, convexité. Les différentes études de décomposition de la dynamique des courbes des taux par ACP concluent à une stabilité temporelle et géographique de cette analyse (Le Bellac et Viricel [2012]).



Une analyse de la corrélation historique des différentes maturités de taux zéro coupon montre que les taux court terme et long terme ne sont pas parfaitement corrélés (des niveaux de 60% à 70% sont souvent constatés). Il apparaît donc pertinent, afin de reproduire correctement la dynamique des taux, de ne pas se servir d'une volatilité unique, mais plutôt de modéliser chacun des différents facteurs avec une volatilité différente. Ce type de modèle multifactoriel est particulièrement utile pour répondre à un critère de réalisme, comme la capacité à reproduire la structure par terme des taux d'intérêt.

En univers « risque neutre », on peut aussi chercher à utiliser des modèles multifactoriels mais plutôt pour reproduire des phénomènes endogènes au marché, à date fixe. Typiquement, une meilleure réplification du smile (aspect non-linéaire de la volatilité implicite des options en fonction du strike) et du skew de volatilité (asymétrie de la volatilité implicite des options en fonction du strike – asymétrie du smile de volatilité).

Dans le modèle CIR2++, le taux court est défini comme la somme de deux facteurs CIR x_t et y_t suivant des lois du χ^2 non centrée et d'un terme déterministe φ_t pour le calage parfait de la courbe initiale de taux de marché :

$$r_t = x_t + y_t + \varphi_t$$

$$dx_t = \lambda_x(\theta_x - x_t)dt + \sigma_x\sqrt{x_t}dW_t^x$$

$$dy_t = \lambda_y(\theta_y - y_t)dt + \sigma_y\sqrt{y_t}dW_t^y$$

Où $(W_t^x)_t$ et $(W_t^y)_t$ sont des mouvements browniens indépendants dans l'univers « risque neutre » considéré.

L'expression du taux zéro-coupon à la date t de maturité $T - t$ devient :

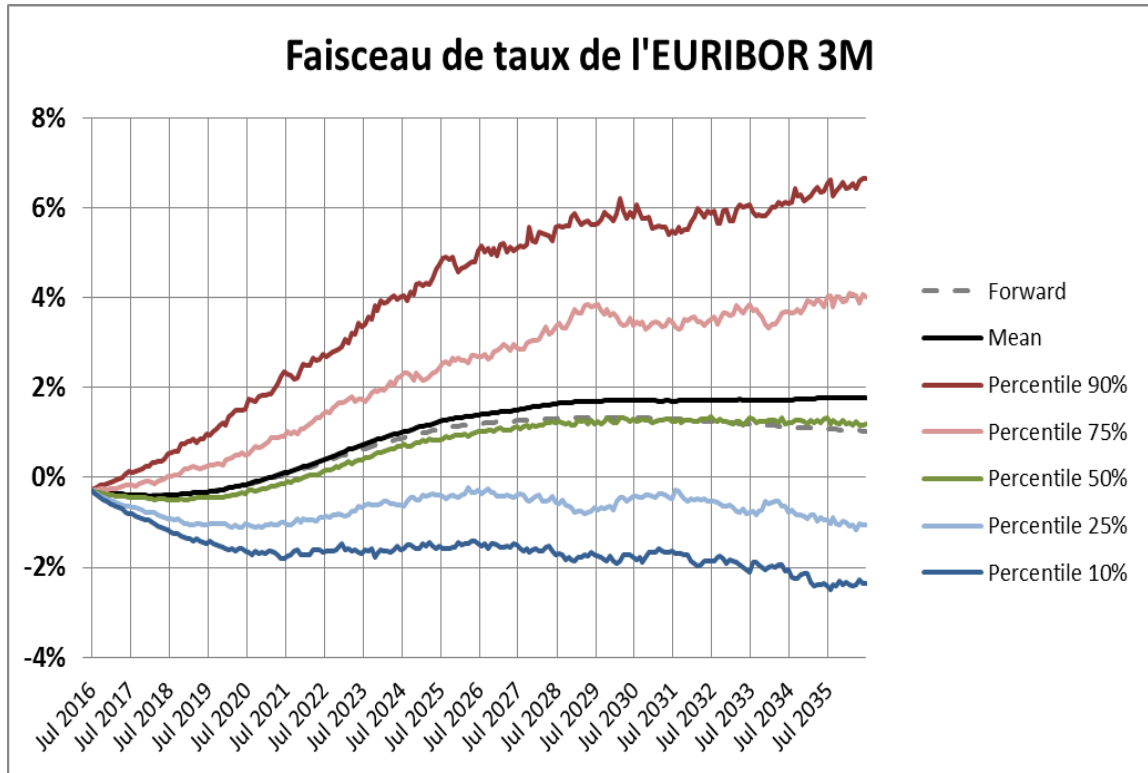
$$R^{CIR2++}(t, T) = \underbrace{\Phi'(t, T)}_{\text{Calage des taux de marché}} + \underbrace{[\alpha^x(t, T) + \beta^x(t, T)x_t]}_{R^{CIR,x}(t, T)} + \underbrace{[\alpha^y(t, T) + \beta^y(t, T)y_t]}_{R^{CIR,y}(t, T)}$$

Dans ce cas, la corrélation linéaire n'est pas parfaite entre les différents points de taux de la courbe des taux aux différentes dates futures de génération. Ceci permet notamment de générer des scénarios de courbes de taux inversées. Seules des formules semi-fermées, où une intégrale double doit être discrétisée, sont disponibles pour le modèle à deux facteurs CIR2++.

Si la discrétisation de l'intégrale double nécessite des ressources informatiques pour obtenir une « market-consistency » convenable, il peut s'avérer plus judicieux de revenir à une approche de type Monte-Carlo.

Nous présentons ci-dessous des faisceaux de taux (Euribor 3M et taux swap 10Y en zone Euro) synthétisant l'information sur un jeu de 500 scénarios générés en utilisant le modèle de taux CIR2++. Dans les deux cas, on constate les points suivants :

- Le modèle génère des taux négatifs réalistes. La notion de réalisme est à interpréter en fonction des conditions économiques du moment. Les taux ne sont pas pour autant substantiellement négatifs (< 5 %). Il requiert que le modèle de gestion actif-passif soit adapté à leur prise en charge, ce qui n'est pas encore le cas chez l'intégralité des acteurs du marché ;
- Le modèle ne génère pas de taux explosifs. On entend par explosif des taux annuels dépassant les 50 % pour une économie développée ;
- Le scénario moyen des taux est toujours légèrement supérieur au scénario médian des taux, du fait de la forme de la distribution des taux qui est une χ^2 non centrée présentant notamment une asymétrie positive (du côté de la queue de distribution à droite) ;
- Le scénario moyen des taux est légèrement supérieur au scénario déterministe suggéré par les taux forwards. Ce rapport est dû à ce que l'on appelle le *biais théorique de convexité*, prévu par la théorie qui s'intéresse uniquement aux prix. Or la relation qui lie les prix zéro-coupon aux taux zéro-coupon présente une convexité. Ainsi, un biais apparaît lors de la conversion de l'information sur les prix en information sur les taux. L'amplitude de ce biais dépend du modèle choisi et des paramètres du modèle.



2.2.3. Avantages et inconvénients des modèles d'équilibre

Critères	Modèle Vasicek à un facteur	Modèle CIR	Modèle CIR++	Modèle CIR2++
Dynamique	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$	$dr_t = \lambda(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$	$r_t^{CIR++} = r_t^{CIR} + \varphi_t$	$r_t = x_t + y_t + \varphi_t$ x_t, y_t processus CIR
« Popularité »	--	-	-	+
Nombre d'aléas	1	1	1	2
Taux plafonnés	Non	Taux positifs strictement si la condition de Feller est respectée	Taux strictement supérieurs à φ_t si la condition de Feller est respectée	Dépend du respect de la condition de Feller par les paramètres des 2 processus CIR
Existence de formules fermées	Oui (caps, floors, swaptions)	Oui (caplets/floorlets et swaptions)	Oui (caplets/floorlets et swaptions)	Formules semi fermées
Capacité à reproduire la courbe de taux initiale	Faible	Prise en compte imparfaite de la courbe de taux initiale	Parfaite	Parfaite
Taux négatifs	Oui	Non, si les paramètres vérifient la condition de Feller	Dépend du respect de la condition de Feller par les paramètres du processus CIR	Dépend du respect de la condition de Feller par les paramètres des 2 processus CIR
Taux explosifs	Non	Non	Non	Non
Reproduction du smile de volatilité	Non	Non	Non	Possible si bien calibré mais pas fait pour (nécessité d'une volatilité stochastique)

2.3. Modèles fondés sur l'absence d'opportunité d'arbitrage

2.3.1. Modèle Heath, Jarrow et Morton (HJM)

HEATH, JARROW et MORTON [1990] dans "Bond pricing and the term structure of interest rate: a discrete time approximation" définissent un cadre général de modélisation de la structure par terme de la courbe des taux compatible avec l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Ces modèles - populaires chez les assureurs - tendent à céder la place aux modèles de marché type LIBOR Market Model (LMM, développé au §2.3.5).

Le **cadre HJM** est une structure de modèle de taux supposant que le taux forward instantané en date $t \geq 0$ $f(t, T)$ pour une (date à) maturité T fixée, évolue sous une mesure de probabilité donnée suivant l'équation :

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

2.3.2. Modèles de Ho & Lee (HL) et Hull & White (HW)

Les modèles de Ho & Lee et Hull & White sont des formes spécifiques de modèle HJM, découlant de définitions spécifiques de la volatilité.

Modèle	Volatilité
HL	$\sigma(t, T) = \sigma$
HW	$\sigma(t, T) = \sigma e^{-\alpha(T-t)}$

2.3.2.1. Modèles mono-factoriels

Les dynamiques des modèles HL et HW à un facteur s'expriment alors de la façon suivante :

$$\underline{\text{HL}} : dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW_t$$

$$\underline{\text{HW}} : dr(t) = (\theta(t) - \alpha \cdot r(t))dt + \sigma dW_t$$

Celles-ci reposent sur le taux court qui détermine ensuite complètement toute la courbe des taux. Les prix des zéros-coupons sont ainsi donnés par une formule du type :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-r_t B(t, T)}$$

Où A et B sont des fonctions déterministes.

Le paramètre θ des deux modèles est une fonction déterministe du temps, définie entièrement par les paramètres initiaux, ce qui permet de rendre chacun de ces modèles parfaitement compatible avec la courbe des taux initiale (contrairement à Vasicek qui ne repose que sur trois paramètres). **C'est donc un modèle d'absence d'opportunité d'arbitrage (modèle d'AOA).**

HW est une extension de Vasicek. Contrairement à HL, **HW intègre une forme de drift qui permet de modéliser un comportement de retour à la moyenne des taux** (fait stylisé des taux observés sur l'historique) :

- Le paramètre α modélise la vitesse de retour à la moyenne ;
- θ dépend directement de la courbe des taux forward instantanés initiale. α et σ sont les paramètres respectivement de retour à la moyenne et de volatilité, calibrés sur les prix ou les volatilités des dérivés de

taux. On peut faire dépendre σ et α du temps. Avec précaution cependant, car cela peut entraîner une structure future de volatilités non conformes aux formes observées sur le marché.

2.3.2.2. Modèles multi factoriels

HW et HL sont des modèles à un facteur. Comme vu plus haut, pour modéliser une plus grande variété de courbes de taux, d'autres facteurs peuvent être intégrés. Les nombres d'aléas et de facteurs ne sont pas limités, mais **dans la pratique, on se limite généralement à 2 (compromis entre sophistication et facilité de manipulation).**

Il existe des formules fermées pour les caps et pour les swaptions. Pour les modèles à deux facteurs, les formules sont sensiblement plus complexes naturellement. La formule pour les swaptions requiert la résolution d'une équation non-linéaire par une méthode de type Newton.

Suivant l'instrument de calibrage sélectionné, cap ou swaption, la méthode de calibrage peut être plus ou moins compliquée :

- Si on calibre sur des caps, les formules fermées étant simples, le calibrage est instantané.
- Si on calibre sur des swaptions avec la formule exacte, le calibrage peut être plus long du fait de la résolution d'équations par la méthode de Newton.

Notons que pour le calibrage du modèle de HW, une pratique consiste à figer le paramètre de retour à la moyenne de manière historique lors du calibrage « risque neutre ».

2.3.3. Modèle de Black Karasinski

Le modèle Black-Karasinski (Black F. et P. Karasinski⁵, 1991) suppose que le taux court **suit une distribution log normale**. C'est un **modèle sans arbitrage** qui appartient à la **famille des modèles de taux court** et prend en compte la structure par terme.

2.3.3.1. Modèle de Black Karasinski à un facteur (BK)

Pour un modèle HW généralisé, on suppose qu'une fonction de taux court $f(r)$ suit un processus Gaussien :

$$df(r) = [\theta(t) - a(t) * f(r)]dt + \sigma(t)dz$$

où dz est un mouvement brownien standard.

Le modèle BK s'obtient en considérant que **f est la fonction logarithmique** dans le modèle HW. Le taux court r_t évolue comme l'exponentielle d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec des coefficients fonction du temps (sous la « probabilité risque neutre ») :

$$d\ln(r_t) = [\theta(t) - a(t) * \ln(r_t)]dt + \sigma(t)dz$$

Où r_t est le taux court instantané avec $r_0 > 0$, $\theta(t)$, $a(t)$ et $\sigma(t)$ sont des fonctions déterministes en fonction du temps.

Il s'agit d'un modèle de « retour à la moyenne », le coefficient $a(t)$ mesure la vitesse à laquelle $\ln(r_t)$ tend vers sa moyenne à long-terme notée $\theta(t)$ et $\sigma(t)$ représente la volatilité à terme. Les coefficients $a(t)$ et $\sigma(t)$ peuvent être également choisis comme constants : c'est un compromis à faire entre l'ajustement plus serré et la stationnarité du modèle.

⁵ Black F. and P. Karasinski (1991) Bond and option pricing when short rates are lognormal, Financial Analysts Journal 47(4), 52-59.

Dans ce modèle, $E_0 \left[\exp \left(\int_0^t r_s ds \right) \right] = +\infty$ pour tout $t > 0$, ce qui peut poser problème quant à la convergence du taux court.

On utilise donc généralement des taux composés périodiques en temps discret. Le modèle BK en temps discret s'écrit :

$$\ln(r_{t+1}) - \ln(r_t) = \theta(t) - a(t) \ln(r_t) + \varepsilon_{t+1}$$

Où ε_{t+1} suit une distribution normale avec une espérance conditionnelle à t nulle et une variance conditionnelle à t égale à $\sigma(t)^2$. $\ln(r_t)$ suit un processus autorégressif d'ordre 1.

2.3.3.2. Modèle de Black Karasinski à deux facteurs (2FBK)

Une extension à un modèle **BK à deux facteurs (2FBK)** a été développée par Peterson, Stapleton and Subrahmanyam (1999)⁶ **pour améliorer la précision du modèle**. Un modèle multi-facteurs a été développé en 2003⁷ pour mieux capturer les volatilités des swaptions. Dans le modèle 2FBK, le taux court suit le processus suivant (sous la « probabilité risque neutre ») :

$$d\ln(r_t) = [\theta_r(t) - a * \ln(r_t) + \ln(\pi_t)]dt + \sigma_r(t)dz_1$$

$$d\ln(\pi_t) = [\theta_\pi(t) - b * \ln(\pi_t)]dt + \sigma_\pi(t)dz_2$$

Où :

- Pour la fonction de taux court r_t :
 - θ_r est un terme constant en fonction du temps qui permet au modèle d'être calibré à la structure par terme de taux court,
 - a est la vitesse à laquelle le taux court retourne vers la moyenne du processus,
 - $\sigma_r(t)$ représente la volatilité instantanée.
- Le facteur π_t est un choc appliqué à la moyenne conditionnelle du processus, aussi considéré comme une prime de taux forward sur le taux court. π_t suit également :
 - un processus de retour à la moyenne θ_π ,
 - avec une vitesse b et une volatilité instantanée $\sigma_\pi(t)$.
- dz_1 et dz_2 sont des mouvements browniens standards.

En pratique, la convention est d'utiliser des taux composés périodiques en temps discret, comme pour le modèle BK.

La version du 2FBK en temps discret s'écrit :

$$\ln(r_{t+1}) - \ln(r_t) = \theta_r(t+1) - a * \ln(r_t) + \ln(\pi_t) + \varepsilon_{t+1}$$

$$\ln(\pi_{t+1}) - \ln(\pi_t) = \theta_\pi(t+1) - b * \ln(\pi_t) + v_{t+1}$$

où ε_t et v_t sont des variables indépendantes qui suivent une distribution normale dont la moyenne est égale respectivement à la moyenne du $\ln(r_t)$ et du $\ln(\pi_t)$, dont l'écart-type inconditionnel est égal respectivement à

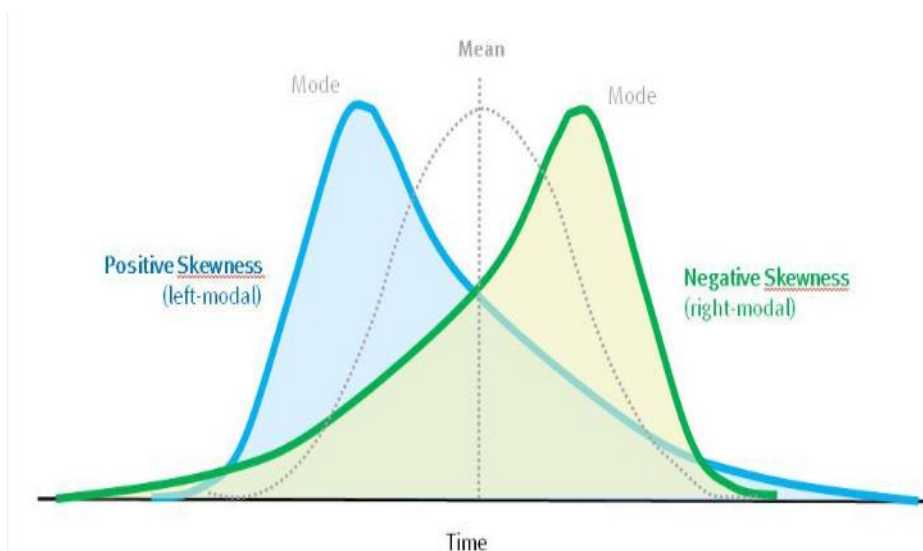
⁶ Peterson S. , C. Stapleton and Marti Subrahmanyam (1999), A two-factor lognormal model of the term structure and the valuation of American-style options on bonds, Journal of Financial and Quantitative Analysis.

⁷ Peterson S. , C. Stapleton and Marti Subrahmanyam (2003), A Multi-Factor Spot Rate Model for the Pricing of Interest-Rate Derivatives.

σ_{r_t} et à σ_{π_t} . Avec σ_{r_t} et σ_{π_t} correspondant à l'écart-type logarithmique inconditionnel des variables r_t et π_t au cours de la période $0 - t$ selon une base non-annualisée.

2.3.3.3. Conclusions sur les modèles BK et 2FBK

Contrairement aux modèles Gaussiens, pour les modèles BK et 2FBK, il n'existe pas de formule explicite. On est obligé d'utiliser des approches numériques pour la valorisation (simulations de Monte-Carlo). Toutefois, les modèles BK et 2FBK ne génèrent que des taux positifs.



En revanche, la propriété de skewness du modèle lognormal est une caractéristique historiquement observée sur la distribution des taux courts.

Ces dernières années, le modèle 2FBK (et le modèle à multi-facteurs) a souvent été utilisé dans les GSE sur le marché. Ce type de modèle est également fréquemment utilisé pour la tarification des Credit Default Swap (CDS), les options américaines et les options Bermudiennes des obligations.

En absence de traçabilité analytique des modèles BK et 2FBK, il faut utiliser des méthodes numériques pour le calibrage, par exemple en ayant recours à des arbres binomiaux ou trinomiaux. **Le temps de calcul pour calibrer ses paramètres est considérable.** C'est un inconvénient des modèles BK et 2FBK.

2.3.4. Modèle Gaussien à deux facteurs : G2++

Le modèle gaussien à deux facteurs ou modèle gaussien linéaire, nommé notamment G2++, a largement été développé dans le livre « Interest Rate Models – Theory and Practice » de D.Brigo et F.Mercurio sur lequel s'appuie cette partie. Le modèle G2++ est un cas spécifique du modèle HW à deux facteurs.

La dynamique du taux court induite par ce modèle est donnée par la somme de deux facteurs gaussiens à laquelle s'ajoute une fonction déterministe. Cette fonction est choisie de manière à ajuster parfaitement le modèle à la structure par terme des taux observée sur le marché.

Ainsi, le taux court s'écrit :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t) \text{ avec } r(0) = r_0$$

Où les processus x et y satisfont les équations définies ci-dessous :

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t) \text{ avec } x(0) = 0$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t) \text{ avec } y(0) = 0$$

Et avec :

- (W_1, W_2) un mouvement brownien à deux dimensions dont la corrélation instantanée est ρ telle que $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$ et $-1 \leq \rho \leq 1$
- r_0, a, b, σ, η des constantes positives de sorte que a et b correspondent aux coefficients de retour à la moyenne et que σ et η matérialisent les volatilités de chacun des processus
- φ une fonction déterministe définie sur l'intervalle $[0, T^*]$ avec T^* l'horizon de projection fixé et telle que $\varphi(0) = r_0$
- a, b, σ, η, ρ sont évaluées lors du calibrage

Le modèle G2++ donne une formule fermée au prix d'une obligation zéro-coupon à chaque pas de temps s'exprimant en fonction des prix observés sur le marché à la date d'évaluation et des paramètres du modèle. Le modèle propose également des formules fermées pour l'évaluation de dérivés à partir du prix des options sur obligation zéro-coupon. Ainsi, le calibrage du modèle peut se réaliser de manière simple.

Ce modèle présente l'avantage d'être calibré facilement et rapidement. En outre, il simplifie la simulation des taux puisqu'il permet de reproduire la courbe des taux initiale et générer des courbes projetées assez réalistes. De plus il génère des taux négatifs. NB : il requiert que le modèle de gestion actif-passif soit adapté à leur prise en charge, ce qui n'est pas encore le cas chez l'intégralité des acteurs du marché.

Les seuls inconvénients sont la difficulté d'interprétation des composantes du taux court et le fait que le modèle ne permette pas de reproduire de manière précise toute la surface de volatilité des produits dérivés.

2.3.5. Approches de modélisation sur taux forward

2.3.5.1. LIBOR Market Model (LMM)

Le **LIBOR Market Model (LMM)** décrit la dynamique d'un ensemble de taux forward sous la probabilité « risque neutre⁸ ». Il ne simule que des taux positifs.

Soient,

- $P(t, T)$ le prix zéro-coupon de maturité $T - t$, en date t
- $T_0 = 0 < T_1 \dots < T_K$ une série de $K + 1$ dates successives et $\tau_k = T_k - T_{k-1}$ les pas de temps entre deux dates successives.
- Pour tout $1 \leq k \leq K$, $F_k(t)$ le taux forward entre les dates T_{k-1} et T_k vu en date $t \leq T_{k-1}$

$$\left(F_k(t) = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{P(t, T_{k-1})}{P(t, T_k)} - 1 \right) \right)$$

Sous la « probabilité k-Forward neutre \mathcal{Q}^k », le modèle LMM consiste à supposer que les taux forwards sont lognormaux et qu'il existe une fonction du temps $\sigma_k(t)$ et un Brownien vectoriel M-dimensionnel $Z^k(t)$ tels que,

$$dF_k(t) = F_k(t)\sigma_k(t)dZ^k(t)$$

⁸ Les notations et expressions suivantes sont tirées du livre de Brigo et Mercurio (2001).

Notons $\beta(t)$ la plus grande valeur de $1 \leq j \leq K$ telle que $t \leq T_{j-1}$ (avec $\beta_0 = 1$). Sous la mesure spot LIBOR Q^d (numéraire $B_d(t) = \frac{P(t, T_{\beta(t)-1})}{\prod_{j=0}^{\beta(t)-1} P(T_{j-1}, T_j)}$) il est possible d'associer la diffusion suivante au forward par changement de mesure :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\tau_j \rho_{j,k} \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t)F_k(t) dZ_k^d(t)$$

Avec $\rho_{j,k} dt = d\langle Z_j, Z_k \rangle_t = dZ_j(t) \cdot dZ_k(t)$ et Z_k^d un Brownien vectoriel M-dimensionnel sous Q^d .

Dans le modèle LMM, la mesure « risque neutre » est supposée être la mesure spot LIBOR⁹. C'est donc cette diffusion qui est utilisée pour simuler les taux forwards en « risque neutre ».

La problématique en découlant est de choisir la forme des fonctions variances $(\sigma_k(t))_k$ et de calibrer (souvent sur historique) la structure des corrélations $(\rho_{j,k})_{j,k}$ dans la diffusion précédente. Brigo et Mercurio proposent deux formes pour les fonctions variances $(\sigma_k(t))_k$:

$$\sigma_k(t) = (a(T_{k-1} - t) + d)e^{-b(T_{k-1}-t)} + c$$

Où les 4 paramètres (a, b, c, d) sont donc à calibrer. Et,

$$\sigma_k(t) = \Phi_k \left((a(T_{k-1} - t) + d)e^{-b(T_{k-1}-t)} + c \right),$$

forme qui intègre un grand nombre de paramètres supplémentaires, les constantes $(\Phi_k)_k$.

Dans tous les cas le paramétrage des volatilités est globalement complexe à interpréter.

En pratique, il est approprié de considérer $M = 2$ ce qui amène à disposer d'un modèle à 2 aléas. D'autre part, il est possible de simplifier l'expression de la dynamique des forwards sans perte de généralité pour faire apparaître un nouveau mouvement Brownien vectoriel Z^d et $s(t)$ une fonction de volatilité communs à tous les taux forwards.

$$dF_k(t) = F_k(t) \left(s(t)^2 \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\gamma_k(t) \gamma_j(t) \tau_j F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + s(t) \gamma_k(t) dZ^d(t) \right)$$

Ici les fonctions $\gamma_k(t)$ intègrent les fonctions de volatilités $\sigma_k(t)$ et permettent de tenir compte des différentes corrélations entre les mouvements Browniens scalaires.

Sous de bons paramétrages des fonctions de volatilité, il existe des formules semi-fermées de pricing des actifs de calibrage (caps, swaptions).

Le LMM est un modèle qui a fortement gagné en popularité à une époque où les taux étaient plus élevés. Suite à la baisse des taux et l'apparition de valeurs négatives sur plusieurs économies, il montre aujourd'hui ses limites, bien que restant largement utilisé.

Le LMM permet d'estimer les volatilités implicites (i.e. les volatilités de taux swap) par formules fermées. Il est donc généralement calibré sur des swaptions, des caplets ou un mix des deux.

⁹ Brigo et Mercurio 2001

2.3.5.2. Displaced Diffusion LIBOR Market Model (DD LMM ou « LMM shifté »)

Le **DD LMM** est un modèle dérivé du LMM fréquemment utilisé pour la valorisation de dérivés exotiques de taux d'intérêts.

Sous les mêmes notations que pour le LMM, la diffusion du modèle (à deux aléas en choisissant $M = 2$) s'obtient très simplement par **l'ajout d'un déplacement factor (ou shift) δ dans la diffusion des taux forwards** :

$$dF_k(t) = (F_k(t) + \delta) \left(s(t)^2 \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\gamma_k(t)\gamma_j(t)\tau_j(F_j(t) + \delta)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + s(t)\gamma_k(t)dZ^d(t) \right)$$

Ici ce ne sont donc pas les taux forwards mais les quantités $F_k(t) + \delta$ qui sont positives. Au final, les taux (forwards et zéro-coupons nominaux) sont donc floorés à $-\delta$. Le paramètre de shift est aisément interprétable.

A nouveau, sous de bons paramétrages des fonctions de volatilité, il existe des formules semi-fermées de pricing des actifs de calibrage (caps, swaptions).

Le paramètre δ est souvent calibré séparément des autres paramètres du modèle. Il devient alors un « métaparamètre » assurant un calibrage du modèle d'une complexité similaire à celui du LMM.

Le DD LMM est un modèle qui gagne en popularité à mesure que des taux swaps négatifs sont observés. Toutefois il requiert un modèle de gestion actif-passif adapté à la prise en charge de taux négatifs ce qui n'est pas le cas chez l'intégralité des acteurs du marché.

Dans le paradigme DD LMM, il est possible d'obtenir des formules fermées sur les volatilités de taux swap shiftés et sur les prix de swaptions. Il est donc généralement calibré sur ces instruments.

A. Stochastic Volatility Displaced Diffusion LIBOR Market Model (SVDD LMM ou LMM+)

Le **LMM+** est une extension du modèle LMM proposée par Joshi et Rebonato (2003).

Ce modèle est adapté du DD LMM en y **ajoutant simultanément un déplacement factor et une variance stochastique**. Dans la diffusion présentée pour les taux forwards dans le DD LMM la fonction de volatilité $s(t)$ est remplacée par un processus stochastique de retour à la moyenne de type Cox-Ingersoll-Ross (CIR) :

$$\begin{cases} d(F_k(t) + \delta) = (F_k(t) + \delta)V(t) \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\gamma_k(t)\gamma_j(t)\tau_j(F_j(t) + \delta)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sqrt{V(t)}\gamma_k(t)(F_k(t) + \delta)dZ^d(t) \\ dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \epsilon\sqrt{V(t)}dW(t) \text{ et } d\langle W, Z^d \rangle_t = \rho dt \end{cases}$$

Les paramètres du modèle CIR (variance) ($\kappa, \theta, \epsilon, V(0)$) doivent être strictement positifs et vérifier la condition (dite « de Feller ») suivante :

$$\epsilon^2 < 2\kappa\theta$$

Ce modèle permet un **calibrage du smile de volatilité et la génération de taux négatifs**. Il prend en compte 3 aléas : deux aléas de taux et un aléa de volatilité.

Le paramètre δ peut être calibré séparément des autres paramètres du modèle. Il devient alors un « métaparamètre » assurant un calibrage du modèle plus aisé. Les paramètres du CIR (variance) sont aisément interprétables :

- κ est la vitesse de retour à la moyenne de la variance. Plus κ est élevé, plus rapidement la variance stochastique aura tendance à se stabiliser autour de sa moyenne asymptotique θ
- ϵ traduit la variabilité de la variance stochastique autour de sa tendance l'amenant peu à peu à se rapprocher de sa moyenne asymptotique

L'interprétabilité des autres paramètres du modèle est, hormis le shift qui correspond à l'opposé du plancher/floor des taux simulés, particulièrement délicate. L'obtention de formules semi-fermées pour valoriser les actifs de calibrage (caps, swaptions) est possible.

Le LMM+ est un modèle qui gagne en popularité à mesure que des taux swaps négatifs sont observés. De plus la prise en compte d'une volatilité stochastique lui permet d'assurer une prise en compte plus efficace et complète de la « market-consistency ».

Toutefois, son calibrage reste délicat.

Pour le LMM+, il est possible d'estimer les prix des swaptions par une approche numérique (estimation de la fonction caractéristique de la loi des taux swaps puis estimation des prix par intégrales numériques).

2.3.6. Avantages et inconvénients des modèles de taux fondés sur l'AOA (tableau synthétique)

Critères	Modèle de Black Karasinski	Modèle de Black Karasinski à 2 facteurs	Modèle HL et HW à 1 facteur	Modèle HW à 2 facteurs
Dynamique	$d\ln(r_t) = [\theta(t) - l(t) * \ln(r_t)]dt + \sigma(t)dW_t$ $d\ln(\pi_t) = [\theta_\pi(t) - l * \ln(\pi_t)]dt + \sigma_\pi(t)dW_t^{22}$	$d\ln(r(t)) = [\theta_r(t) - \ln\sigma(r_t) + \ln(\pi_t)]dt + \sigma_r(t)dW_t^1$	$df(t, T) = \alpha(t, T)dt\sigma(t, T)dW_t$ HL $dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW_t$ HW 1 facteur $dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW_t$	$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$ Taux court HW $dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW_t^1$ Taux de long terme HW $d\theta(t) = (\theta_{\text{infini}} - b\theta(t))dt + \eta dW_t^2$
Popularité	--	-	-	--
Nombre d'aléas	1	2	1	2
Taux plafonnés	Oui (taux strictement positif) car taux lognormal	Oui (taux strictement positif) car taux lognormal	Non, taux Gaussien	Non, taux Gaussien
Existence de formules fermées	Absence de formule explicite et algorithmes complexes => temps de calcul considérable pour calibrer les paramètres	Absence de formule explicite et algorithmes complexes => temps de calcul considérable pour calibrer les paramètres	Pour l'espérance, la variance, le quantile et la probabilité des taux négatifs	Pour l'espérance, la variance, le quantile et la probabilité des taux négatifs
Capacité à reproduire la courbe de taux initiale	Courbe reproduite généralement très approchée de la courbe cible, sauf si présence de taux négatifs	Courbe reproduite généralement très approchée de la courbe cible, sauf si présence de taux négatifs	Parfaite	Parfaite
Taux négatifs	Non mais possibilité d'intégrer un shift	Non mais possibilité d'intégrer un shift	Oui	Oui
Taux explosifs	Oui (si forte volatilité / taux bas)	Oui (si forte volatilité / taux bas)	Non	Non

Reproduction du smile de volatilité	Non	Possible si bien calibré mais pas fait pour (nécessité d'une volatilité stochastique)	Non	Possible si bien calibré mais pas fait pour (nécessité d'une volatilité stochastique)
Modèle délicat à valider ?	Non	Non	Non	Non
Critères	Modèle Gaussien à deux facteurs	Modèle LMM	Modèle DDLMM	Modèle LMM+
Dynamique	$r_t = x_t + y_t + \varphi_t$ $dx_t = -ax_t dt + \sigma dW_t$ $dy_t = -by_t dt + \eta d\widehat{W}_t$ $d \langle W_t, \widehat{W}_t \rangle = \rho dt$	$dF_k(t) =$ $\sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\tau_j \rho_{j,k} \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} + \sigma_k(t)F_k(t) dZ_k^d(t)$ $\rho_{j,k} dt = d \langle Z_j, Z_k \rangle_t$	$dF_k(t) = (F_k(t) + \delta)(s^2(t) \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\gamma_k(t)\gamma_j(t)\tau_j}{(1 + \tau_j)} + s(t)\gamma_k(t)dZ^d(t))$	$dF_k(t) = (F_k(t) + \delta)V(t) \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\gamma_k(t)\gamma_j(t)\tau_j(F_j(t) + \delta)}{(1 + \tau_j F_j(t))} + \sqrt{V(t)}\gamma_k(t)(F_k(t) + \delta)dZ^d(t)$ $dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dW_t,$ $d \langle W_t, Z_t^d \rangle = \rho dt,$
Popularité	--	++	++	+++
Nombre d'aléas	2	2	2	3
Taux plafonnés	Non, taux Gaussien	Oui (taux strictement positif) car taux forward lognormal	Oui (taux strictement supérieur à -δ) car taux forward shifté lognormal	Oui (taux strictement supérieur à -δ) car taux forward shifté lognormal
Existence de formules fermées	Pour le pricing d'options exotiques car distribution Gaussienne			
Capacité à reproduire la	Parfaite	Parfaite, sauf si présence de taux négatifs	Parfaite	Parfaite

courbe de taux initiale				
Taux négatifs	Oui	Non mais possibilité d'intégrer un shift -> DDLMM	Oui mais taux strictement supérieur à $-\delta$	Oui mais taux strictement supérieur à $-\delta$
Taux explosifs	Non	Oui (si forte volatilité)	Oui (si forte volatilité)	Oui (si forte volatilité)
Reproduction du smile de volatilité	Possible si bien calibré mais pas fait pour (nécessité d'une volatilité stochastique)	Non	Possible si bien calibré mais pas fait pour (nécessité d'une volatilité stochastique)	Oui
Modèle délicat à valider ?	Non	oui	oui	oui

2.4. Modèles composites

2.4.1. Problématique concernant le pricing des dérivés action

Une pratique de place répandue concernant le calibrage des modèles d'un GSE « risque neutre » repose sur la séquence suivante :

1. **Calibrage stand-alone d'un modèle de taux stochastique** (e.g. HW, Libor Market Model, ...)
2. **Calibrage d'un modèle action** (e.g. Black-Scholes, Black-Scholes à volatilité déterministe dépendante du temps, Heston, SVJD, ...)
 - a. Sous l'hypothèse que les taux évoluent de manière déterministe
 - b. Sans tenir compte des résultats du calibrage du modèle de taux choisi dans l'étape 1

Ces problématiques liées au calibrage sont décrites de manière plus précises en partie C.

Cette pratique est susceptible d'induire implicitement et systématiquement des erreurs sur le pricing des dérivés action, erreur qui ne peut être réduite par une augmentation du nombre de scénarios. En effet, le modèle action est calibré sous l'hypothèse de taux déterministes, puis utilisé avec un modèle de taux stochastique lors de la génération des scénarios.

En pratique, les tests de martingalité sur des prix de calls action peuvent conduire à des écarts de pricing élevés, significativement supérieurs aux tests de martingalité sur produits non dérivés (e.g. prix d'un indice action).

Les tests de martingalité sur indice action ne permettent pas de mettre en évidence les erreurs sur le pricing des dérivés d'action. En effet, ces tests s'intéressent à un payoff (la valeur de l'action) linéaire selon le sous-jacent (la valeur de l'action elle-même).

Par exemple, utiliser un modèle de Black-Scholes - à volatilité déterministe dépendante du temps - en combinaison avec un modèle de taux et injecter directement la structure par terme de volatilité action déduite des prix de marché (typiquement calls action à la monnaie) dans l'équation de diffusion action, est susceptible de conduire à des erreurs de pricing Monte Carlo systématiques sur les dérivés action, même pour des produits vanille à la monnaie.

Compte-tenu de l'optionalité des bilans des assureurs, de telles erreurs, induites par le processus de calibrage séquentiel peuvent avoir un impact matériel sur la valorisation du bilan.

Il semble donc intéressant d'investiguer davantage des modèles composites déjà utilisés en finance, et rechercher comment ces derniers pourraient être adaptés dans le cadre de GSE assurantiels.

◆ Exemples de modèles composites¹⁰

Il existe dans la littérature des modèles composites taux / action modélisant de manière jointe taux d'intérêt et indice action. En pratique, le développement de ces modèles répond au besoin d'institutions financières de pricer des produits dérivés composites, dont le payoff dépend à la fois des taux d'intérêt et des actions. Ce type de modèle semble adapté pour la valorisation d'un bilan, qui est typiquement de nature composite.

Le calibrage de ces modèles composites repose sur la séquence suivante :

1. Calibrage stand-alone d'un modèle de taux stochastique (e.g. HW, Libor Market Model, ...)

¹⁰ Les articles mentionnés en annexe proposent des modèles composites, dont les composantes stand-alone (i.e. le modèle taux et le modèle action) sont des modèles répandus sur la place

2. Calibrage d'un modèle action (e.g. Black-Scholes, Black-Scholes à volatilité déterministe dépendante du temps, Heston, SVJD, ...)
 - a. Sous l'hypothèse que les taux évoluent de manière stochastique via le modèle utilisé à l'étape 1
 - b. En utilisant les résultats du calibrage du modèle de taux choisi dans l'étape 1

Ainsi, le calibrage du modèle action s'effectue de manière cohérente avec le calibrage du modèle de taux.

2.4.2. Modèles de Jarrow-Yildirim (JY) et Fabio Mercurio (FM)

Nous manipulons ici trois objets, **le taux nominal, le taux réel et l'inflation future**. Le taux réel modélisé est vu comme le taux réel espéré, celui qui peut être obtenu/figé sur une période d'investissement par une opération sur le marché des swaps d'inflation par exemple. Tandis que l'indice d'inflation, et par conséquent le taux réel effectif de l'opération, seront connus uniquement en fin de période. Modéliser le taux réel n'est pas redondant avec le fait de modéliser l'indice d'inflation et le taux nominal.

C'est un modèle composite de type HJM à trois facteurs, qui modélise les taux nominaux, les taux réels, et l'inflation, de manière conjointe.

Le modèle donne l'évaluation des prix des obligations indexées (O_{ind}), des dérivés vanilles – swaps zéro-coupon et swaps d'inflation annuelle – ainsi que caplet, floorlet, cap, floor.

De même, il permet de simuler les dynamiques de l'indice inflation, des taux courts nominal et réel. L'inflation est traitée par analogie avec les taux de change, comme le taux permettant de passer d'une économie domestique, où les prix sont exprimés en numéraire nominal (en monnaie courante) à une économie étrangère, où les prix sont exprimés en numéraire réel (en monnaie constante, ou encore en unités d'IPC – indice des prix à la consommation).

Les auteurs émettent l'hypothèse que les prix de l'instant t d'un zéro-coupon nominal, en monnaie courante, et d'un zéro-coupon **réel en monnaie constante** (ou encore en unité d'indice d'inflation ou IPC), de maturité T , s'écrivent :

$$P_k(t, T) = e^{\int_t^T -f_k(t,s)ds}, k \in \{n, r\},$$

Où n et r correspondent à « nominal » et « réel » respectivement,

Le **prix en monnaie courante** à l'instant t d'une obligation zéro-coupon réelle (ou indexée) de maturité T s'écrit

$$P_{O_{ind}}(t, T) = \frac{I(t)}{I(t_0)} P_r(t, T)$$

Caractère interprétable : il est généralement assez aisé de relier les anticipations de marché « lisibles » dans les courbes de taux nominaux, réels, voire de « break-even inflation », aux résultats des simulations des trois variables d'intérêt.

Il existe des formules fermées pour les instruments de taux réels et nominaux vanilles, pour les swaps inflation zéro-coupon et annuels (YoY), pour les dérivés inflation caps et floors – si on préfère effectuer le calibrage des volatilités sur ces instruments et si on trouve des prix cotés.

Les processus de taux courts – nominal, réel, d'inflation – sont sans mémoire, par définition des processus markoviens, caractéristiques des processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec retour à la moyenne.

Dans la mesure où dans l'univers de taux nominaux et réels, il est possible d'utiliser une formulation de type Vasicek étendu, à trois paramètres - niveau, pente, convexité – **il est relativement simple de reproduire les formes de courbe usuelles, non discontinues, éventuellement inversées**. Il convient cependant d'être

précautionneux quant à la relativement faible granularité de l'univers des obligations réelles d'Etat cotées. Dès lors, il est délicat d'évoquer la continuité de la courbe de taux réels, et de la reproduire.

Le modèle FM donne des formules fermées pour les prix d'options sur l'inflation, dont on peut induire les volatilités par maturité. L'article de JY donne une méthode pour calibrer la fonction de volatilité des taux réels spécifiée à la manière de HW sur l'univers des obligations indexées.

Le calibrage est délicat sur les prix zéro-coupon réels étant donnée la granularité du marché des OAT indexées (inflation française ou européenne) avec seulement 7 maturités cotées sur l'inflation française, et 6 maturités sur OAT indexées sur l'inflation européenne.

Les estimations de la volatilité du processus de taux d'inflation et les corrélations entre les processus de taux courts – nominal, réel, d'inflation – sont obtenues sur séries historiques.

Ce modèle présente un intérêt naturel s'il représente bien les éléments du bilan, autrement dit le modèle de gestion actif-passif.

Il permet de simuler les courbes de taux zéro-coupon nominaux et réels futures, et donc d'une part, de réévaluer les instruments financiers de taux du portefeuille, d'autre part, de simuler des opérations d'achat/vente de ceux-ci.

Les corrélations instantanées entre les trois facteurs de risque – taux nominal, taux réel et inflation – **ont un effet de second ordre**, qui joue cependant pour expliquer la proximité plus ou moins grande des allures des dynamiques de nos trois variables d'intérêt.

3. Modèles de crédit

Les modèles de crédit utilisés au sein des GSE dans la modélisation du risque de crédit :

- Modèle à intensité ex : modèle CIR++
- Modèle à transition de rating ex : modèle de Jarrow, Lando et Turnbull

3.1. Présentation des modèles crédit

3.1.1. Modèles à intensité de défaut, le modèle CIR ++

Les modèles à intensité ne modélisent pas toutes les migrations. Seule l'intensité de défaut est évaluée, donnant son nom au modèle. En contrepartie, la surface de spread initiale est mieux approchée.

Brigo et Mercurio [2001] ont proposé d'appliquer leur modèle CIR ++ au crédit et Longstaff, Mithal et Neis [2002] ont créé le modèle LMN sur ce principe d'intensité.

Le modèle CIR++ (développé précédemment comme modèle de taux) peut aussi être utilisé au sein d'un GSE assurantiel pour intégrer le risque de crédit d'émetteurs de produits financiers dans la valorisation du bilan. Il s'intègre naturellement dans le cadre des modèles de crédit à intensité de défaut et est également utilisé pour modéliser ce risque (cf. par exemple [BM] section 22.7 "Stochastic intensity: The SSRD model").

Le modèle CIR++ est un modèle reposant sur l'utilisation d'un processus appelé intensité de défaut, noté $(\lambda_t)_{t \geq 0}$, tel que :

$$Proba(\text{défaut dans } [t, t + dt] \mid \text{pas de défaut avant } t) = \lambda_t dt$$

En théorie, il existe un processus de défaut par contrepartie. **En pratique, dans les GSE, seulement une intensité de défaut est considérée par classe de rating**, i.e. une intensité λ^{AAA} commune à tous les émetteurs AAA, une intensité λ^{AA} commune à tous les émetteurs AA, ...

Notation	Définition
\mathcal{R}	Ensemble des ratings considérés notés $\mathcal{R} = \{AAA, AA, \dots, CCC\}$
λ^R	Intensité de défaut associée au rating $R \in \mathcal{R}$

La dynamique des intensités de défaut des différentes classes de rating peut se décomposer sous la forme suivante : pour chaque rating R ,

$$\lambda_t^R = y_t^R + \psi(t, \beta^R, \text{Market data}(t = 0))$$

où

- $(y_t^R)_{t \geq 0}$ est un processus CIR, i.e. partant d'une condition initiale $y_0^R > 0$ et dont la dynamique s'écrit $dy_t^R = \kappa^R(\mu^R - y_t^R)dt + \sigma^R \sqrt{y_t^R} dW_t^R$
- $\beta^R := (\kappa^R, \mu^R, \sigma^R, y_0^R)$ désigne le vecteur des paramètres du modèle, vérifiant la condition de Feller $2\kappa^R \mu^R > \sigma^{R^2}$ et des conditions techniques permettant de garantir la positivité de $(\lambda_t^R)_{t \geq 0}$ (voir [BM] section 3.9.3. "The positivity of rates and fitting quality")
- $(\psi(t, \beta^R, \text{Market data}(t = 0)))_{t \geq 0}$ est un processus déterministe, dépendant à la fois des paramètres du modèle, regroupés dans le vecteur β^R , et des conditions de marché en $t = 0$, plus précisément des

probabilités de défaut implicites induites par le marché (mesurées à l'aide des cotations de CDS ou de bonds).

Le processus ψ ci-dessus est donné par formules fermées, non reproduites dans ce rapport dans un souci de concision, mais disponibles dans [BM] section 22.7.2. "Calibrating the joint stochastic model to CDSs: separability".

L'intuition du processus ψ est la même que dans le cadre des modèles de taux court HW et CIR++ : on part d'un modèle simple (CIR) avec peu de paramètres, puis **on lui ajoute un shift déterministe** (dans notre cas ψ). La définition de ce shift dépend des conditions de marché (la courbe des taux spot dans le modèle de HW ou CIR++ pour taux d'intérêt, mais les probabilités de défaut implicites du marché dans le cas présent) afin que le modèle s'ajuste exactement aux données de marché spot.

Le calibrage d'un modèle de crédit repose généralement sur la minimisation des écarts entre les spreads cotés sur le marché, et les spreads "modèle", i.e. les spreads induits par le modèle et qui sont fonction des paramètres.

Or, disposer d'une formule modèle pour les spreads revient à disposer de formules modèles pour les probabilités de défaut. En effet, notons $P^R(0, m)$ le prix d'un zéro-coupon émis par un émetteur noté R en $t = 0$ de maturité m .

Alors $P^R(0, m) = P(0, m) \times (1 - LGD \times \mathbb{Q}(0, m, R))$ où les notations suivantes ont été utilisées.

Notation	Définition
$P(0, m)$	Prix ZC sans risque de maturité m
$\mathbb{Q}(0, m, R)$	Probabilité de défaut entre 0 et m pour un émetteur de rating $R \in \mathcal{R}$
LGD	Loss Given Default

D'autre part, le spread associé au rating R et la maturité m est défini par la relation

$$P^R(0, m) = P(0, m) \times \frac{1}{(1 + s(0, m, R))^m}$$

de sorte que, finalement,

$$s(0, m, R) = (1 - LGD \times \mathbb{Q}(0, m, R))^{-\frac{1}{m}} - 1$$

et le spread dépend des paramètres du modèle au travers de la probabilité de défaut.

Le modèle CIR++ permet de reproduire exactement les spreads de crédit initiaux grâce au shift déterministe ψ .

Il existe d'autre part une formule fermée permettant le calcul des probabilités de défaut à toute date et à toute maturité, de la même façon qu'il existe une formule fermée sur le prix d'un ZC sans risque dans le modèle CIR++ utilisé pour les taux d'intérêt. Celle-ci est disponible dans [BM] section 22.7.1. et n'est pas reproduite ici par souci de concision.

Quel que soit le jeu de paramètres du modèle, le modèle CIR++ s'ajuste exactement aux spreads de marché spot. Les paramètres du modèle peuvent alors être fixés librement, par exemple en calibrant un modèle CIR et en utilisant les valeurs ainsi obtenues, ou alors en se donnant des cibles sur les comportements limites des spreads et en utilisant les propriétés limites des processus CIR (convergence en loi vers une loi gamma, ...).

Le tableau ci-dessous résume de manière synthétique le lien entre le modèle CIR++ utilisé pour les taux d'intérêt et le modèle CIR++ utilisé pour le risque de crédit.

CIR++ taux d'intérêt	Equivalent dans le modèle CIR++ risque de crédit
ZC sans risque de maturité m	Probabilité de défaut entre 0 et m
$\mathbb{E} \left(\exp \left(- \int_0^m r_s ds \right) \right)$	$\mathbb{E} \left(\exp \left(- \int_0^m \lambda_s^R ds \right) \right)$
$P(0, m)$	$\mathbb{Q}(0, m, R)$

Les modèles à intensité de défaut sont utilisés à la fois en finance et en assurance dans une optique de pricing :

- Finance : Pricing de dérivés de crédit exotiques, modélisant généralement une intensité de défaut par émetteur, et non pas par classe de rating, probabilités de défaut extraites des cotations de CDS de l'émetteur en question et définition de la formule réglementaire de la CVA dans Bâle 3 basée sur un modèle à intensité de défaut ;
- Assurance : Utilisation dans le cadre de GSE « risque neutre » pour la valorisation de bilan d'assureurs considérant le risque de crédit comme matériel lors de la valorisation du bilan.

Le modèle ne semble plus utilisé par la place. En revanche, sa version simplifiée, le modèle CIR, est répandue dans les GSE.

Les données utilisées pour le calibrage sont :

- Pour chaque rating $R \in \mathcal{R}$, la structure par terme des spreads de marché $m \rightarrow s^{Mkt}(0, m, R)$;
- Un niveau de Loss Given Default LGD , pouvant être différencié par rating et éventuellement également par séniorité de bond.

Le modèle CIR++ permet un ajustement automatique des spreads modèle aux spreads de marché. Aussi, l'ensemble des paramètres du modèle peut être choisi librement tout en garantissant un ajustement exact des spreads en $t = 0$.

Deux techniques sont possibles pour la sélection des paramètres :

- Extraction de cotations de produits dérivés complexes sur le marché, pricing à l'aide du modèle et réduction des écarts quadratiques entre prix de marché et prix modèle pour ces dérivés complexes ;
- Ajustement des paramètres en fonction de cibles sur la distribution long terme des spreads, basés par exemple sur des estimations historiques.

Le calibrage est simple et nécessite un temps de calcul très réduit. L'introduction du shift déterministe du modèle CIR++ permet un ajustement automatique des spreads en $t = 0$ sans optimisation de paramètres. Si les paramètres du modèle sont ajustés sur des cibles de distribution long terme des spreads, **ce calibrage peut être considéré comme stable** et ne pas nécessairement être reproduit à chaque date de valorisation si les cibles n'ont pas changé.

3.1.2. Modèle à transition de ratings, le modèle de Jarrow, Lando et Turnbull (JLT)

Le modèle à transition de rating, initié par Jarrow, Lando et Turnbull en 1994 utilise une matrice de transition comme élément central. Le premier modèle ne permettait pas de projection mais Lando y a remédié en 1998. **Ces modèles permettent de modéliser l'ensemble des mouvements de rating mais présentent des difficultés de calibrage et ne reproduisent pas parfaitement la nappe de spread initiale.**

Le **modèle de Jarrow, Lando et Turnbull (JLT - 1997)** est un modèle de crédit Markovien basé sur l'idée que la notation est une variable d'état apportant toute l'information permettant de quantifier le risque de défaut. Il permet la modélisation des matrices de transitions de rating dans le temps. En supposant l'indépendance entre les défauts et les taux sans risques simulés, l'utilisateur dispose de formules fermées pour valoriser les obligations zéro-coupons risquées, par maturité et par notation. Simple d'utilisation, le modèle JLT s'avère particulièrement utile pour la diffusion « risque neutre » du risque de crédit.

On note :

- $P(t, T)$ le prix zéro-coupon sans risque de maturité $T - t$, en date t ;
- $P_r(t, T)$ le prix zéro-coupon risqué de maturité $T - t$, en date t , associé au rating $1 \leq r \leq R$ en notant R le nombre de ratings considérés (AAA, AA+, AA, ..., CCC et D=défaut) ;
- Q la matrice de transition initiale ;
- $Q(t, T)$ la matrice de transition à l'instant $t \geq 0$, entre t et T ;
- Ce sont des matrices de dimension $R \times R$.

Le modèle JLT s'attache à diffuser la matrice de transition de rating. Il s'initialise par la diagonalisation de la matrice de transition initiale.

Il existe une matrice inversible Σ et une matrice diagonale D dont les coefficients sont positifs telles que :

$$Q = \Sigma D \Sigma^{-1}$$

Notons dans la suite $\Lambda = \log(Q) = \Sigma \log(D) \Sigma^{-1}$ la matrice de génération instantanée. La diffusion proposée par le modèle est :

$$\Lambda(t) = \pi(t) \Lambda$$

Avec $\pi(t)$ la prime de risque instantanée, suivant une diffusion de type CIR :

$$d\pi(t) = \alpha(\mu - \pi(t))dt + \eta\sqrt{\pi(t)}dW^\pi(t)$$

Les paramètres de ce modèle $(\alpha, \mu, \eta, \pi(0))$ doivent être strictement positifs et vérifier la condition (dite « de Feller ») suivante :

$$\eta^2 < 2\alpha\mu$$

Une fois cette prime diffusée, il est possible de reconstruire la matrice de transition par :

$$Q(t, T) = \exp\left(\int_t^T \Lambda(s) ds\right) = \Sigma \exp\left(\left(\int_t^T \pi(s) ds \log(D)\right)\right) \Sigma^{-1}$$

Connaissant les loss given default (LGD, la part de l'obligation perdue en cas de défaut) par rating et par terme, ce modèle permet ainsi de retrouver les prix zéro-coupon risqués, par terme et par rating, à l'aide de la formule suivante :

$$P_r(t, T) = P(t, T) * (1 - LGD + LGD * \mathbb{P}(\text{Pas de défaut entre les dates } t \text{ et } T))$$

En pratique, les LGD et matrices de transitions peuvent être obtenues, par typologie d'entreprises, à partir des données fournies en libreaccès par les agences de notation. Ainsi, l'utilisation de ce modèle requiert la connaissance de 4 paramètres : $(\alpha, \mu, \eta, \pi(0))$.

Concernant l'interprétation du modèle, la prime de risque instantanée est directement associée à la hausse (lorsqu'elle est positive) ou baisse (lorsqu'elle est négative) des probabilités de transitions et donc au risque de

migration (changement de notation). α est la vitesse de retour à la moyenne de la prime, μ est la prime de risque asymptotique, η est sa volatilité et $\pi(0)$ sa valeur initiale.

La popularité du modèle JLT augmente à mesure que le risque de crédit en univers « risque neutre » est mieux compris et plus largement répandu.

Dans le modèle JLT il est possible d'estimer les prix des zéro-coupons risqués par formule fermée. Cela permet une meilleure calibration de ces instruments.

La problématique crédit a été abordée assez vite après celle des actions grâce aux travaux de Merton [1974] qui interprète le passif (la dette) d'une entreprise comme une option sur la valeur de l'entreprise. **Cependant ce modèle présente des problèmes de calibration sur l'ensemble du marché.**

3.2. Avantages et inconvénients des modèles de crédit

Critères	Modèle CIR++	Modèle de Jarrow, Lando et Turnbull (JLT)
Utilisation possible dans un GSE assurantiel	Oui	Oui
Stabilité	Non explosif	
Reproduction des spreads de crédit	Exacte	Non
Simplicité	1 modèle par rating donc utilisation plus complexe	Utilisation simple
Popularité	-	++
Formule fermée	Oui pour les prix ZC risqués	
Modélisation des mouvements de rating	Non	Oui
Surface de spread	Mieux reproduite	Non reproduite
Calibrage	Difficile sur le marché car manque de produits dérivés	

4. Modèles action

Pour mémoire le **modèle de Black-Scholes [1973]** est un modèle qui décrit l'évolution du prix d'une action en temps continu. Il peut être vu comme une limite de la méthode binomiale lorsque le nombre de périodes tend vers l'infini. Les variations relatives du prix du sous-jacent $S(t)$ suivent un mouvement brownien géométrique avec une tendance constante (la dérive ou le drift μ) et une volatilité constante σ :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t) \text{ où } B(t) \text{ est un mouvement brownien}$$

Le modèle s'interprète aisément : les agents étant neutres au risque, le rendement espéré d'une action est le taux sans risque mais le rendement varie (selon une loi normale centrée) autour de ce taux sans risque.

Il convient de détailler les modèles principalement utilisés au sein des GSE dans la modélisation du risque action:

- Diffusion lognormale :
 - à volatilité constante
 - à volatilité par terme déterministe
- Modèle de Heston
- Modèle de Merton
- Modèle à volatilité stochastique et à diffusion par sauts (Stochastic Volatility-Jump Diffusion)

4.1. Modèles de diffusion Log-normale

4.1.1. Modèle à volatilité constante

Ce modèle est une adaptation directe du modèle de Black-Scholes (1973) en considérant un facteur d'actualisation et donc un taux sans-risque stochastique. Sous la « probabilité risque neutre », la dérive est le taux sans risque r et il est possible de résoudre cette équation différentielle stochastique pour obtenir la forme du sous-jacent :

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right)$$

La loi du prix du sous-jacent est donc lognormale.

Son adaptation à un cadre où les taux sont aléatoires (notés $r(t)$) découle de la diffusion suivante :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma dB(t)$$

Le modèle lognormal à volatilité constante est très populaire car il est très facile à calibrer :

- un seul paramètre inconnu (la volatilité σ) ;
- il existe des formules fermées (en général obtenues en supposant le taux court constant entre deux dates de simulation) pour le prix d'options liquides sur le marché ;
- l'interprétation du modèle et de ses paramètres est simple ;

- c'est « le » modèle historique de place : de fait, certaines de ses prédictions basées sur des hypothèses fausses se sont avérées historiquement auto-réalisatrices car tout le marché valorisait ses produits sur la base de cette formule.

Toutefois il ne permet pas de reproduire :

- l'aspect « par terme » de la volatilité implicite des options sur action (le fait que, pour un même strike, la volatilité implicite sous-jacente aux options est différente selon leur maturité) ;
- le smile de volatilité (le fait qu'à maturité fixée la volatilité implicite sous-jacente aux options n'est pas constante en fonction du strike).

Enfin, il est souvent considéré comme peu conservateur car il ne prend pas en compte les effets de sauts, ou chutes subites des cours, observés régulièrement sur les marchés action.

4.1.2. Modèle lognormal à volatilité par terme déterministe

Le **modèle lognormal à volatilité par terme déterministe** est une seconde adaptation simple du modèle de Black-Scholes (1973). Il consiste à considérer une volatilité, toujours déterministe, mais « par terme » c'est-à-dire qui dépend du temps. Cette mise en œuvre permet de conserver les avantages liés à la simplicité du modèle sous-jacent (simplicité de calibrage et de simulation), tout en permettant de reproduire les mouvements liés à la dépendance au temps de la volatilité. Toutefois, le modèle ne permet pas de reproduire le smile de volatilité, ni les effets de sauts.

L'adaptation du modèle de Black-Scholes à un cadre où les taux sont aléatoires et la volatilité dépend du temps découle de la diffusion suivante :

$$S(t) = S(0) \exp \left(\int_0^t r(s) ds - \frac{\int_0^t \sigma(s)^2 ds}{2} + \int_0^t \sigma(s) dB(s) \right)$$

En pratique, la discrétisation annuelle approchée de cette évolution est généralement :

$$S(t) = \frac{S(t-1) \exp \left(-\frac{\sigma^2(t-1)}{2} t + \sigma(t-1)(B(t) - B(t-1)) \right)}{PZC(t, 1)}$$

Où $\sigma(t-1)$ est la volatilité locale entre les dates $t-1 \geq 0$ et t , déduite des volatilités implicites.

Dans ce modèle, les volatilités locales $(\sigma(t))_t$ sont à calibrer.

Ce modèle est aussi très simple. Il ne permet pas de tenir compte de la liquidité des optionalités valorisées sur les marchés financiers mais permet de tenir compte d'une dépendance de la volatilité des options à la maturité. En pratique, c'est un modèle très populaire parmi les assureurs Européens. En effet, le besoin de capter les phénomènes de « smile », de dépendance au strike, des optionalités de marché est une problématique financière de court terme puisque ces smiles disparaissent à moyen / long terme. Or, l'optionnalité des produits d'assurance apparaît plus adaptée au long terme.

4.2. Modèle de Heston

Le **modèle de Heston** (voir Heston – 1993) est une **adaptation à volatilité stochastique du modèle de diffusion lognormal à volatilité par terme déterministe** présenté plus haut. Il consiste à considérer une volatilité dont le carré (variance) suit un processus de CIR.

Cette mise en œuvre permet de reproduire les mouvements liés à la dépendance au temps de la volatilité ainsi que de reproduire le smile de volatilité (dépendance au strike) à long terme.

Toutefois il ne permet pas de prendre en compte les effets de saut des cours. Son calibrage est plus complexe mais permet d'obtenir des formules semi-fermées de valorisation des Calls et Puts, aisément estimables par transformée de Laplace.

L'adaptation du modèle lognormal à volatilité par terme déterministe, à un cadre où la volatilité est stochastique et suit un processus CIR, découle de la diffusion suivante :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma(t)dW(t) \\ d\sigma^2(t) = k(\theta - \sigma^2(t))dt + \sigma^v \sigma(t)dW^v(t) \\ d(W(t), dW^v(t)) = \rho dt \end{cases}$$

Notons tout d'abord que les paramètres du modèle CIR (variance) $(\kappa, \theta, \sigma^v, \sigma^2(0))$ doivent être strictement positifs et vérifier la condition (dite « de Feller ») suivante :

$$\epsilon^2 < 2\kappa\theta$$

Dans ce modèle, 5 paramètres sont donc à calibrer : $(\lambda, \bar{\mu}, \sigma(0), \sigma^v, \rho)$. (k, θ, σ^v) sont les paramètres d'un CIR sur la variance, $\sigma(0)$ est la volatilité instantanée à la date de valorisation et ρ la corrélation entre le processus d'aléa Gaussien action et la volatilité.

Le modèle de Heston est plus complexe et moins populaire que les modèles précédents mais permet toutefois de mieux tenir compte de la dépendance des volatilités au strike des options, à maturité fixée.

4.3. Modèle de Merton

Le modèle de Merton [1976] est une adaptation du modèle de diffusion lognormal à volatilité par terme déterministe, prenant en compte des sauts lognormaux. Les effets de sauts sont observés régulièrement sur les marchés action (voir notamment Jarrow et Rosenfeld [1984], Jorion [1988] ou plus récemment Maheu et McCurdy [2004]).

Le modèle consiste à ajouter un processus de Poisson à la diffusion lognormale à volatilité par terme déterministe. Il améliore ainsi l'aspect conservateur mais ne permet pas de calibrer efficacement le smile de volatilité.

Le modèle à sauts de Merton vise à pallier certains défauts identifiés dans le modèle de Black-Scholes, notamment l'épaisseur des queues de distribution et la discontinuité du cours en ajoutant une composante de « sauts » dans la dynamique du sous-jacent. Merton suppose que la dynamique du sous-jacent suit une loi composée avec un processus de Poisson N_t et que les sauts des log-rendements $Y_t = \ln(y_t)$ suivent une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \delta^2)$:¹¹

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (\alpha - \lambda\kappa)dt + \sigma dB(t) + (y(t) - 1)N(t)$$

où :

- α le rendement instantané espéré de l'actif,
- σ la volatilité instantanée conditionnellement au fait qu'il n'y a pas de saut,
- $B(t)$ est un mouvement brownien standard
- $N(t)$ un processus de Poisson d'intensité λ .

¹¹ Donc la loi de $y(t)$ est lognormale de moyenne $e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2}$ et de variance $(e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$.

On notera que si $y(t)$ est la variation absolue du prix en cas de saut dans un intervalle de temps dt , alors $y(t) - 1$ est la variation relative¹² du prix du sous-jacent. Enfin, on a noté pour simplifier :

$$\kappa = \mathbb{E}[y(t) - 1] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\delta^2\right).$$

On remarque que la variation moyenne du saut est :

$$\mathbb{E}[(y(t) - 1)dN(t)] = \mathbb{E}[y(t) - 1]\mathbb{E}[dN(t)] = \kappa\lambda dt,$$

terme correctif ajouté à la tendance de la diffusion de façon à ce que α soit bien le rendement espéré de l'actif.

La solution de l'équation différentielle stochastique ci-dessus donne la forme du prix du sous-jacent (voir Matsuda [2004]) en utilisant une forme adaptée du lemme d'Itô pour les processus à sauts donnée par Cont et Tankov [2008] :

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right)$$

en gardant les notations précédentes.

L'adaptation de ces formules à la prise en compte de taux stochastiques et d'une volatilité par terme mène à la diffusion suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{S(t)} = (r(t) - \lambda\bar{\mu})dt + \sigma(t)dW(t) + J(t)dN(t) \\ J(t) \text{ est un processus représentant les sauts lognormaux} \\ N(t) \text{ est un processus de comptage de Poisson} \end{array} \right.$$

Dans ce modèle, 2 paramètres sont donc à calibrer, $(\lambda, \bar{\mu})$, en plus des volatilités par terme $(\sigma(t))_t$. λ est l'intensité et $\bar{\mu}$ la fréquence des sauts.

Le modèle de Merton permet de tenir efficacement compte des effets de saut observés sur le marché. Il est toutefois relativement complexe à calibrer et reste peu populaire sur le marché de l'assurance vie Européen.

4.4. Modèle à volatilité stochastique et à diffusion par sauts Stochastic Volatility-Jump Diffusion (SVJD ou modèle de Bates [1996])

Développé initialement pour la valorisation d'options américaines dans un cadre mixte de volatilité stochastique et de prise en compte des sauts, **il réplique efficacement l'optionnalité associée au risque de volatilité** (dépendance temporelle et au strike) **et intègre des sauts lognormaux.**

Ce modèle complet est donc une **extension des modèles de Merton et de Heston** répliquant efficacement les caractéristiques de dépendance au temps et au strike des volatilités implicites de Calls et Puts, et les effets de saut.

Des formules semi-fermées de valorisation des options d'achat et de vente (Call et Put) sont disponibles mais les nombreux paramètres du modèle en font **un outil complexe à calibrer.**

Le couplage des modèles de Merton et de Heston mène à la diffusion suivante :

¹² En effet, si $S(t)$ devient $y(t)S(t)$ après un saut, alors $\frac{dS(t)}{S(t)} = \frac{y(t)S(t) - S(t)}{S(t)} = y(t) - 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS(t)}{S(t)} = (r(t) - \lambda \bar{\mu})dt + \sigma(t)dW(t) + J(t)dN(t) \\ d\sigma^2(t) = k(\theta - \sigma^2(t))dt + \sigma^v \sigma(t)dW^v(t) \\ d\langle W(t), dW^v(t) \rangle = \rho dt \end{array} \right.$$

Dans ce modèle, 7 paramètres sont donc à calibrer, $(\lambda, \bar{\mu}, k, \theta, \sigma(0), \sigma^v, \rho)$. (k, θ, σ^v) sont les paramètres d'un CIR sur la variance, λ est l'intensité, $\bar{\mu}$ la fréquence des sauts, $\sigma(0)$ est la volatilité instantanée à la date de valorisation et ρ la corrélation entre le processus d'aléa Gaussien (sans les sauts) action et la volatilité.

Le modèle SVJD est un modèle complet tenant efficacement compte des différentes sources de dépendances (maturité, liquidité) des options sur action des marchés financiers. Il n'est pas très populaire car son implémentation est complexe. Toutefois, il assure une prise en compte complète et efficace de la « market-consistency ».

4.5. Avantages et inconvénients des modèles action

Critères	Log normal à volatilité constante	Log normal à volatilité par terme déterministe	Modèle de Heston	Modèle de Merton	de SVJD
Formule	$dS(t)=S(t)\mu dt + S(t)\sigma dB_t$	$dS(t)=S(t)\mu dt + S(t)\sigma(t)dB_t$	$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma(t)dW(t) \\ d\sigma^2(t) = k(\theta - \sigma^2(t))dt + \sigma^v\sigma(t)dW^v(t) \\ d\langle W(t), dW^v(t) \rangle = \rho dt \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = (\alpha - \lambda\kappa)dt + \sigma dB(t) + (\gamma(t) - 1)N(t) \\ d\sigma^2(t) = k(\theta - \sigma^2(t))dt + \sigma^v\sigma(t)dW^v(t) \\ d\langle W(t), dW^v(t) \rangle = \rho dt \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = (r(t) - \lambda\bar{\mu})dt + \sigma(t)dW(t) + J(t)dN(t) \\ d\sigma^2(t) = k(\theta - \sigma^2(t))dt + \sigma^v\sigma(t)dW^v(t) \\ d\langle W(t), dW^v(t) \rangle = \rho dt \end{cases}$
Popularité	+	+++	+	-	+
Nombre d'aléas	1	1	2 (un facteur de niveau et un facteur de variance)	Un facteur de niveau et un ensemble d'aléas induits par la composante Merton (nombre d'occurrences poissonien et intensités gaussiennes)	
Calibrage du smile de volatilité	Non	Non	Oui	Approximativement	Oui
Prise en compte des effets de sauts	Non	Non	Non	Oui	Oui
Instabilités dans les projections à moyen/long terme	Non	Non	Non	Non	Non
Intégration dans un dispositif de	Oui (pas de re-calibrage)	Oui (pas de re-calibrage)	Oui (re-calibrage en rafale délicat)	Oui (re-calibrage en rafale délicat, néanmoins)	Oui (re-calibrage en rafale délicat)

calcul de capital économique				beaucoup plus rapide que dans les cas Merton et SVJD)	
Délicat à générer	Non	Non	Non (approche pont Brownien potentielle afin de discrétiser le processus de variance)	Non	Non (approche pont Brownien potentielle afin de discrétiser le processus de variance)
Délicat à valider ?	Non	Non	Non	Non	Non

5. Principes de calibrage des modèles

A partir d'un choix de modèles et de paramètres retenus pour les différents facteurs de risque, l'utilisateur se trouve confronté à une nouvelle étape relativement longue et délicate : le **calibrage** du GSE, qui consiste à valoriser de manière appropriée (sous un certain nombre de contraintes à définir) les paramètres du modèle.

La complexité de ce processus est généralement croissante avec le nombre de facteurs et des paramètres. Il peut être nécessaire d'avoir recours à un algorithme complexe ou à un avis d'expert très pointu. Elle vient s'ajouter aux difficultés relatives à la sélection, la disponibilité et la fiabilité des données nécessaires.

Les parties ci-après décrivent les étapes de calibrages et les différentes méthodes à mettre en oeuvre.

5.1. Différentes formes de calibrage

De manière générale, lorsque le modèle considéré est simple, les paramètres peuvent être directement déduits des données de marché¹³. Dès que le modèle se complexifie, deux problématiques peuvent se poser :

- la valorisation des instruments de calibrage ;
- l'optimisation du choix des paramètres.

En effet, lorsque le modèle est sophistiqué, les paramètres n'ont plus nécessairement de sens « physique » (économique) et doivent être déduits d'une opération d'ajustement de prix ou de volatilités d'instruments plus ou moins complexes. Dans ce cas, il est nécessaire de maîtriser les formules de valorisation de ces derniers, or, celles-ci peuvent être fermées, semi-fermées ou encore, ne faire l'objet que d'approximations.

FOCUS : calibrage avec des swaptions¹⁴

La première question à se poser face à un modèle de taux dont on veut calibrer les paramètres avec des swaptions (de maturité / ténor / moneyness différents) peut s'exprimer selon les termes suivants : à jeu de paramètres et courbe des taux donnés (qui permet d'estimer la valeur du taux annulant le swap sous-jacent), le modèle permet-il de calculer facilement le prix « théorique » d'une swaption?

Si ce n'est pas le cas, il est possible d'estimer ce prix en ayant recours à la méthode de Monte-Carlo, permettant de calculer le prix comme la moyenne des cash-flows futurs actualisés. Toutefois, un tel calcul, s'il doit faire l'objet de nombreuses itérations comme dans un algorithme d'optimisation, peut s'avérer très consommateur en temps de calcul.

En pratique, la plupart des modèles de taux du marché (LMM, G2++, DD-LMM, LMM+,...) peuvent fournir des formules fermées ou semi-fermées sous des hypothèses relativement faibles.

Pour capter les informations contenues dans les nappes de prix ou de volatilités, il est tentant d'intégrer dans le panier de calibrage un maximum d'instruments. Ce qui, d'une part, par imperfection du marché, ne rend plus

¹³ Dans le cas des modèles action, le modèle de Black & Sholes à volatilité dépendante du temps prend en paramètres des volatilités implicites qui peuvent être extraites de données de marché (sous la forme, par exemple, de volatilités implicites de calls à la monnaie de différentes maturités).

¹⁴ Pour rappel, une swaption est un contrat donnant la possibilité à son détenteur d'acheter un swap de taux à une date future M (la maturité de la swaption). La maturité du swap sous-jacent, T , est le ténor de la swaption. Un dernier élément vient compléter la caractéristique de l'instrument : le taux du swap sous-jacent.

La swaption est dite « à la monnaie » (« ATM ») si le taux du swap annule son prix (c'est un taux moyen sur les taux aléatoires futurs entre les dates M et $M+T$, un « forward ») et « en dehors de la monnaie » (resp. « dans la monnaie ») si le taux de son swap sous-jacent est supérieur (resp. inférieur) au taux annulant le swap sous-jacent. Ces qualifications se généralisent sous le terme « moneyness » de la swaption.

unique le set de paramètres optimaux et, d'autre part, empêche un calibrage manuel. Il devient donc nécessaire d'avoir recours à un algorithme d'optimisation (minimisant une fonction cible).

5.2. Choix des instruments financiers

Le calibrage du modèle de diffusion doit être cohérent avec le marché en répliquant les prix observés sur celui-ci.

Quatre conditions importantes sur le marché doivent être réunies¹⁵ :

- Un marché **liquide**¹⁶ : les actifs considérés doivent pouvoir être facilement achetés et vendus.
- Un marché **profond**¹⁷ : un nombre important d'actif doit pouvoir être échangé sans affecter de manière significative les prix des instruments financiers.
- Un marché **transparent**¹⁸ : les transactions et les informations sur les prix doivent être disponibles au public.
- Un marché sans **opportunités d'arbitrage**¹⁹ : Un arbitrage est une opération qui permet d'assurer un gain positif ou nul à celui qui la réalise ; l'existence d'acteurs sur le marché dont l'objectif est d'exploiter ces opportunités garantit leur résorption quasi-instantanée.

Les trois principaux aspects à considérer lors du calibrage d'un GSE sont alors :

- L'utilisation **d'instruments financiers qui reflètent la nature et la durée des engagements**²⁰. Il est essentiel que ces instruments reproduisent a minima les décaissements futurs les plus importants.
- Le calibrage **sur la courbe des taux sans risque**²¹ utilisée pour actualiser les décaissements dans le modèle de gestion actif-passif
- La prise en compte **appropriée de la volatilité** ; cet aspect n'est pas aisé, et le traitement de cette question relève davantage du calibrage. Deux approches sont envisageables :
 - Calibrage **sur les prix de marché d'options**²², pour en extraire les volatilités implicites ;
 - Recours aux **volatilités historiques** à partir de l'étude des cours passés des actifs.

L'utilisation d'options requiert de bien choisir leurs caractéristiques, en accord avec le portefeuille de l'assureur. C'est l'approche recommandée par l'EIOPA, qui correspond au principe de cohérence avec le marché.

Toutefois, l'existence d'options liquides, profondes, transparentes, et présentant les caractéristiques du portefeuille n'est pas toujours acquise, surtout lorsque des maturités importantes sont envisagées. De ce fait, l'utilisation de volatilités historiques peut sembler pertinente dans le cas où le marché n'est pas capable de fournir des instruments de calibrage satisfaisants.

¹⁵ Voir EIOPA-BoS-14/166 FR orientation 57. Voir aussi l'article 40.3 Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014.

¹⁶ Voir article 1.33 Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014.

¹⁷ Voir article 1.32 Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014.

¹⁸ Voir article 1.34 Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014.

¹⁹ Article 22.3.b. Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014.

²⁰ EIOPA-BoS-14/166 FR orientation 57.

²¹ Article 22.3.c. Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014.

²² Article 22.3.a. Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014.

Le choix des options est rendu d'autant plus difficile par le phénomène de « **Smile de volatilité** » : pour des options portant sur le même sous-jacents, la volatilité peut différer selon le prix d'exercice de l'option, qui n'a pourtant rien à voir avec l'évolution possible future de l'actif.

Une approche standard consisterait à considérer les options "**At the money**", c'est à dire dont le prix d'exercice est proche du prix spot du sous-jacent. Toutefois, il peut s'avérer pertinent, lorsque l'état de l'économie s'éloigne des hypothèses financières considérées lors de la création du produit et que son optionnalité s'éloigne des prix spots des sous-jacents de calibrer les modèles de manière à reproduire des options "**Out of the money**". Cela permet une bonne modélisation des scénarios extrêmes, comme par exemple, en période de forte baisse des taux, cas où l'optionnalité liée au TMG présente des similitudes avec des options en dehors de la monnaie.

5.3. Grands choix du calibrage

5.3.1. Courbe des taux

La phase de calibrage des modèles prend généralement en input une courbe de taux. Il n'existe, de fait, ni réponse unanime de la Place ni réponse réglementaire claire à la question du choix de cette courbe. Cependant, **le calibrage avec la courbe EIOPA pourrait être vu comme la méthode s'approchant le plus de l'attendu réglementaire**²³.

En effet, les textes de l'EIOPA sont complexes mais peuvent s'interpréter comme faisant prévaloir l'utilisation d'une même courbe pour le calibrage et la génération des trajectoires de taux. Or, la courbe d'actualisation réglementaire est la courbe EIOPA²⁴.

De plus, cette courbe, de par sa forme (les taux à partir du Last Liquid Point (20 ans) sont relativement plus élevés) pourrait permettre de réduire l'impact des cash-flows à long terme (par actualisation).

Le problème essentiel réside dans le fait que les données de marché (volatilités implicites, prix,...) ne sont pas homogènes avec cette courbe réglementaire.

5.3.2. Calibration des prix d'instrument ou des volatilités implicites

A la lecture des textes réglementaires, c'est l'option du calibrage sur les volatilités implicites et non sur les prix qui semble privilégiée.

Celles-ci sont généralement aisées à extraire des données de marché. D'autre part, même dans les formules de pricing, elles sont bien distinctes des taux swaps.

Les volatilités implicites sont conditionnées par le modèle de sous-jacent (Bachelier ou Black pour ce qui concerne les actifs equity) et donc il peut parfois être délicat de choisir lesquelles utiliser.

Théoriquement, elles ne peuvent pas non plus être complètement déconnectées de la courbe des taux de marché, ce qui semble contradictoire avec le fait de calibrer sur la courbe réglementaire fournie par EIOPA. Toutefois, il est important de noter que si cette problématique est particulièrement sensible pour les volatilités lognormales, elle l'est moins pour des volatilités normales (moins dépendantes).

Les prix sont, eux, relativement stables dans le temps et on peut penser qu'ils traduisent mieux l'état des marchés financiers que les volatilités implicites.

Les textes de l'EIOPA précisent régulièrement que les calibrages doivent être effectués sur une "good volatility measure", ce qui pose alors la question des prix à sélectionner pour satisfaire ce critère.

²³ Article 22.3.c. Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014.

²⁴ Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures.

Concernant les pondérations à appliquer aux différents instruments dans le panier de calibrage, si elles peuvent être utiles, dans la fonction cible, pour l'ajustement de la nappe (de volatilités / prix) à l'optionnalité du portefeuille de passif valorisé, elles doivent être choisies (à « dire d'expert » ou calibrées) avec attention. Elles peuvent permettre de réconcilier les durations, donner plus ou moins d'importance aux informations court / long terme, selon la connaissance que l'utilisateur a des produits en portefeuille.

5.3.3. Date de référence pour le calibrage

La question de la date de référence pour les données est délicate. Si le choix de données au 31 décembre est prépondérant sur la Place pour les travaux prudentiels (contrôle et régulation), la réglementation n'est pas toujours claire sur ce point. D'autant plus que cette date peut fournir des données biaisées (effet « end-of-the-year »²⁵).

D'autre part, le choix de données au 31 décembre fait aussi passer l'idée d'une dépendance de la valeur à une seule journée de marché (marché dont les données changent jour après jour) ce qui peut apparaître ambivalent avec la notion de solvabilité en assurance. Dès lors, il peut paraître légitime de considérer des données moyennées sur plusieurs semaines dans la majorité des cas (en phase avec l'idée d'une market consistency). Notons toutefois qu'un tel choix doit être justifié (en particulier les dates de début et de fin de la plage des données moyennées), car il introduit une nouvelle source de subjectivité dans les calculs et est, dans tous les cas, incohérent avec la date de la courbe EIOPA .

Pour rappel, l'Autorité de supervision européenne des pensions et des assurances (**EIOPA**) a notamment introduit un taux ultime (UFR pour « ultimate forward rate ») qui sert à actualiser les engagements de long terme (retraite, décès, assurance vie, RC...) au passif des assureurs. En effet au-delà d'un « dernier point liquide », fixé à 20 ans, la courbe des taux de marché n'est plus pertinente et l'UFR est calculé sur la base d'une combinaison entre les taux réels à long terme et le taux d'inflation. En 2010, l'**EIOPA** avait fixé l'UFR à 4,2 % pour une majorité de devises, dont l'euro, en additionnant à l'époque les taux réels historiques à long terme (2,2 %) et l'objectif d'inflation fixé par la **Banque centrale européenne** à 2 %. Ce calcul ne prévoyait pas l'ère de taux bas prolongés et l'inflation quasi nulle qu'allait connaître, par la suite, la zone euro.

Il est donc apparu nécessaire de revoir la méthodologie du calcul de l'UFR au regard de la nouvelle donne macroéconomique et l'UFR en zone euro a évolué de 4,2% à 3,65%, l'EIOPA ayant opté pour un abaissement progressif de l'UFR. Les changements concernant ce taux ne pourront ainsi excéder 15 points de base par an. Pour l'année 2018 (ratios publiés en février 2018), l'UFR sera ainsi abaissé pour les assureurs de la zone euro à 4,05%.

5.3.4. Sources des données

Les données financières utilisées pour le calibrage d'un GSE peuvent provenir de différentes sources (Bloomberg, Thomson Reuters, SuperDerivatives, SIX Telekurs, Banque de France, Agence France Trésor, Euronext, ...). Ces sources recueillent des données à partir des transactions de marché sélectionnées (sous certains critères) et retraitées (selon différentes méthodologies). En conséquence, on peut trouver des valeurs différentes pour une même donnée en fonction des sources.

La réglementation demande aux assureurs de veiller à ce que les données proviennent de marchés financiers profonds, liquides et transparents et à ce que les instruments financiers utilisés dans le processus de calibrage soient pertinents compte tenu des caractéristiques des engagements d'assurance.

²⁵ voir Hirt, G. A., & Block, S. B. (2006). Fundamentals of investment management. McGraw Hill.

Il est donc nécessaire de comprendre comment la donnée est recueillie et retraitée par la source et de comparer différentes sources.

Post récupération, différents traitements peuvent être nécessaires comme interpoler / extrapoler des données. On peut avoir recours à des interpolations simples (par exemple, linéaires) ou plus complexes (par exemple, par spline) en prenant garde à ne pas « overfitter » c'est-à-dire qu'il faut éviter que l'interpolation génère des « bruits » injustifiés. Dans certains cas, il est préférable de ne pas passer exactement par chaque point (donnée) et avoir une fonction lisse, surtout quand on sait que les données peuvent être biaisées par la liquidité (toutes les maturités ne sont pas négociées de façon uniforme).

L'extrapolation est également à traiter avec attention, notamment les extrapolations sur le long terme. Quelques fois, le marché ne contient pas assez d'information (et les résultats deviennent difficiles à justifier et instables). Dans ce cas, on peut introduire des hypothèses de type « valeur ultime » dans lesquelles on définit la valeur vers laquelle la variable va converger (comme l'EIOPA l'a fait pour l'UFR) ou on peut préférer laisser la dernière valeur connue constante pour des maturités postérieures. Dans tous les cas, il est important de justifier la méthodologie d'extrapolation et de mesurer son impact (faire des sensibilités).

Pour éviter d'« overfitter », on peut utiliser un lissage via une fonction avec laquelle on ajuste les données (solution paramétrique) ou avec une méthodologie non paramétrique. Le lissage peut, aussi, avoir des effets d'extrapolation à contrôler.

5.3.5. Nombre de calibrages (scénarios centraux et de chocs)

Le point clé de l'étape de calibrage est le choix d'un invariant lors du passage du calibrage à la simulation. La question pratique est la suivante : quel doit être le point de référence de mon modèle ?

Si ce sont des volatilités / des prix alors il s'agira que le calibrage soit réalisé de manière à reproduire cet invariant dans les simulations, c'est à dire que l'on puisse re-obtenir ces volatilités / prix si on les recalcule sur la table de scénarios économiques simulés. Sans cela, l'homogénéité est perdue et il est impossible, à partir de cette table, de retrouver les données de calibrage (critère de « market-consistency »).

C'est pour cela qu'on privilégiera la conservation de la courbe des taux entre la phase de calibrage et celle de la simulation. Sans cela, il sera délicat de retrouver les prix ou les volatilités implicites utilisées pour le calibrage. En effet, courbe et volatilités implicites sont relativement liées (en particulier pour les volatilités lognormales. Si l'on utilise une courbe des taux en conservant des paramètres calibrés sur une autre, ce sont non seulement les prix mais aussi les volatilités implicites qui sont modifiées.

Finalement, c'est pour cette raison qu'il peut paraître nécessaire de re-calibrer les modèles de taux après chaque choc sur la courbe des taux : toujours pour conserver l'invariant.

Ce point peut toutefois être relativisé. En effet, les volatilités normales étant moins dépendantes des niveaux de taux, il sera moins impactant de calibrer sur une courbe puis de diffuser sur une autre courbe si le calibrage est réalisé sur des volatilités implicites de ce type. Si un tel processus de calibrage est utilisé, réutiliser des paramètres calibrés sur une courbe centrale pour simuler à partir d'une courbe choquée aura donc un impact limité sur les volatilités implicites (normales) et donc la « market-consistency » de la table choquée.

5.3.6. Recours à un algorithme

Le choix de l'algorithme va dépendre d'un certain nombre de paramètres et des conditions du calibrage. La capacité de calcul disponible et le temps imparti entrent aussi en compte. Les principaux algorithmes sont :

- La descente de gradient. Cette méthode nécessite d'avoir une fonction dérivable et d'initialiser un point de départ. La convergence se fait avec une complexité linéaire et son implémentation est simple. Toutefois, dans le cadre d'une fonction non convexe, cette méthode peut facilement rester bloquée à un minimum local.

- L'algorithme de Newton, qui nécessite une fonction deux fois dérivable et d'initialiser à un point de départ. Il converge de manière quadratique, donc plus vite que la descente de gradient, mais souffre des mêmes défauts que la méthode précédente, en plus d'imposer des hypothèses supplémentaires sur la fonction à optimiser. La méthode de quasi-Newton qui en dérive est encore moins coûteuse en calculs.
- Le recuit simulé introduit une part d'aléatoire afin de sortir des minima locaux si besoin. Cela permet une convergence optimale, mais au prix de calculs beaucoup plus longs et d'une implémentation rendue plus délicate par le besoin de spécifier un plus grand nombre de paramètres.
- L'algorithme de Nelder-Mead, ou du simplexe, se termine en un nombre fini d'itérations et produit de bons résultats, mais nécessite de ne choisir qu'un domaine réduit pour l'optimisation, et peut se comporter très mal si le minimum se situe près des bornes du domaine.

5.3.7. Contraintes à faire peser sur le calibrage

La première contrainte du calibrage est bien entendu qu'il permette d'ajuster les prix ou les volatilités implicites (selon le choix qui aura été fait en amont) de marché des instruments financiers choisis dans le panier de calibrage.

5.3.7.1. Ecart de prix

La mesure choisie pour l'écart est généralement quadratique, il reste à choisir entre des écarts relatifs (« Mean Absolute Percentage Error ») ou absolus (« Mean Square Error »). En effet, le type de calcul d'écart retenu pourra amener à privilégier l'ajustement des prix/volatilités implicites de certaines maturités par rapport à d'autres.

De manière générale, il semble que considérer des écarts relatifs soit plus proche des pratiques de marché.

L'utilisateur peut ensuite borner l'écart de prix obtenu par le GSE. Le niveau d'erreur acceptable va fortement dépendre de l'algorithme utilisé, de la situation économique considérée et du nombre de points de calibrage (le nombre d'options dans le panier). L'objectif n'est évidemment pas d'avoir un calibrage parfait mais plutôt de faire tendre les paramètres du modèle vers une bonne réplification de l'optionnalité du produit. Cela passe par le choix du bon jeu de calibrage et de pondérations précises.

5.3.7.2. Contraintes supplémentaires

L'utilisateur peut ajouter d'autres contraintes comme une présence maximale de taux négatifs dans les nappes de taux générées ou la satisfaction des tests martingales, avec le risque que le calibrage n'ait pas de solutions.

Nb : Un modèle prenant en compte des taux négatifs apparaît aujourd'hui nécessaire puisque la courbe EIOPA en comporte pour les maturités basses, comme c'est le cas sur les marchés financiers. Certains modèles de taux donnent naturellement des taux négatifs, voire très négatifs (inférieurs à -100% !). Dans ce cas, il est envisageable de borner les taux, en prenant garde à ne pas perdre la « market consistency » des modèles.

Une autre alternative est d'utiliser un modèle qui donne des taux positifs et de le « décaler » (shift). On a donc un modèle qui ne donnera pas de taux plus négatifs que le montant de décalage (qui devient donc une valeur minimale). Dans ce cas, il faut faire attention au calibrage et veiller à bien traiter le décalage. Notons que la problématique du « shift » s'avère particulièrement large en pratique. Il est en effet possible d'objectiver pour certains modèles le shift via différents types de critères : « market consistency », stabilité dans le temps, robustesse du calibrage, réplification ex post d'instruments financiers...

L'utilisateur peut également juger nécessaire d'ajouter des priorités aux différentes contraintes.

5.4. Validation d'un GSE « risque neutre »

Le développement d'un GSE peut donner lieu à des erreurs d'implémentation dans les modèles ; et le calibrage, étape potentiellement délicate, peut aboutir à des valeurs qui ne sont pas en phase avec les valeurs que les

simulations cherchent à reproduire. Il est ainsi nécessaire de mettre en place un processus de validation des trajectoires simulées, afin d'assurer leur cohérence et de valider leur utilisation dans les modèles.

L'acceptation de trajectoires utilise comme outils :

- L'observation d'une représentation graphique ;
- La définition de critères numériques ;
- La validation de tests statistiques.

La validation d'un GSE « risque neutre » s'effectue a priori selon trois axes :

- a) Montrer que les trajectoires sont « risque neutres » via les tests de martingalité;
- b) Montrer que les trajectoires générées permettent de retrouver les prix des instruments qui ont servi au calibrage du GSE (test de cohérence avec le marché);
- c) Montrer que la modélisation statistique a été correctement effectuée (vérification de l'implémentation).

5.4.1. Tests de martingalité

La vérification du caractère « risque neutre » des trajectoires s'effectue grâce aux tests de martingalité. En univers « risque neutre », l'espérance actualisée d'un indice est normalement égale à la valeur de cet indice en $t = 0$. Le GSE ayant pour objet de fournir des trajectoires stochastiques pour cet indice, il convient de vérifier que ces trajectoires satisfont à cette règle.

Soit N le nombre de trajectoires générés. Soient $D_{n,t}$ et $S_{n,t}$ les valeurs respectives du déflateur et de l'indice au temps t pour la trajectoire n . Le test de martingalité consiste à construire, pour tout t , la statistique :

$$S_t = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_{n,t} \times S_{n,t}$$

Si la trajectoire est bien martingale alors $\forall t, S_t = S_0$.

Ce test s'applique aux actions, à l'immobilier, ou aux déflateurs seuls pour retrouver la courbe des taux.

Un dérivé du test de martingalité consiste à retrouver la structure par termes de la courbe des taux et ainsi avoir, $\forall T > t$:

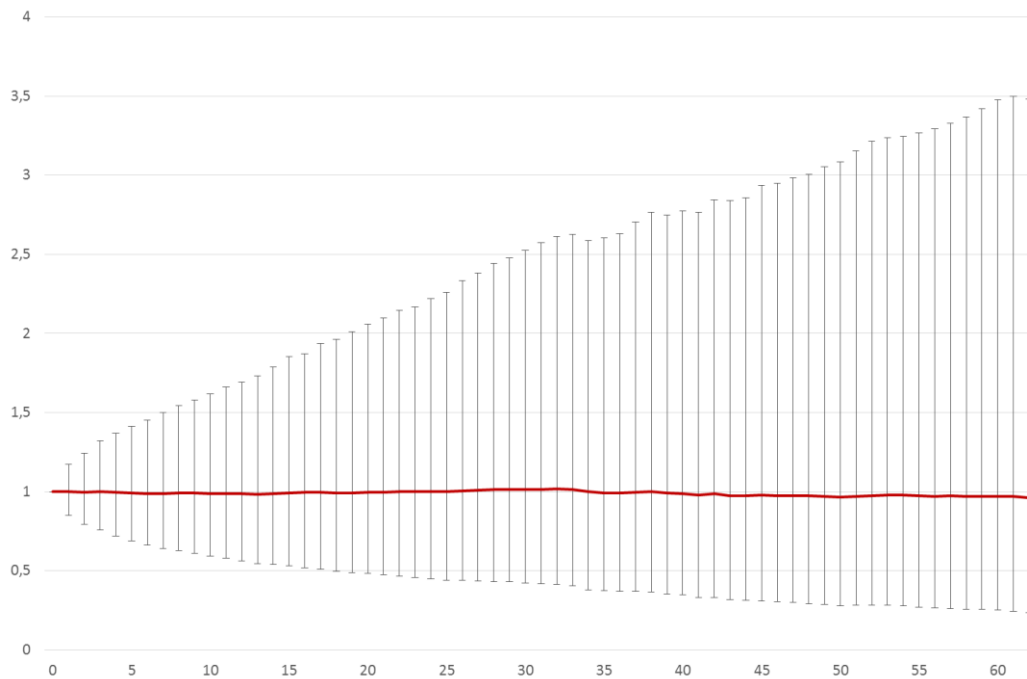
$$\frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P_n(t, T)$$

en notant P^M le prix zéro coupon issu de la courbe des taux utilisée et P_n la courbe des taux de la trajectoire n .

Soit par exemple un indice action S pour lequel $S_0 = 1$, dont les trajectoires $S_{n,t}$ ont été générées par le GSE. Pour toute période de projection t , il est possible de calculer :

- d) L'espérance actualisée de la valeur de l'indice $S_t = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_{n,t} \times S_{n,t}$;
- e) Les écarts moyens avec la moyenne pour les valeurs supérieures et inférieures à cette dernière, définis par $E_t^+ = \frac{1}{\#(S_{n,t} > S_t)} \sum_{n=1}^N (S_{n,t} - S_t)_+$ et $E_t^- = \frac{1}{\#(S_{n,t} < S_t)} \sum_{n=1}^N (S_t - S_{n,t})_+$.

Le tracé de cette espérance en fonction du temps doit donc représenter une ligne horizontale sur la valeur 1, ce qui est constaté sur le graphe ci-dessous. Il représente l'espérance actualisée de l'indice en regard des écarts moyens supérieurs et inférieurs sur la diffusion de cet indice.



5.4.2. Cohérence avec le marché

Le deuxième test à réaliser est celui de la vérification de la cohérence des trajectoires générées avec les valeurs utilisées pour le calibrage du GSE. Valider ce test pour l'ensemble des instruments de marché consiste à recalculer leurs prix par simulations de Monte Carlo.

Notons $I \in \mathbb{N}$ le nombre d'instruments utilisés dans le calibrage. Notons également pour chaque instrument $i \in \llbracket 1, I \rrbracket$ P_i^M son prix sur le marché en $t = 0$.

Afin de valider le test, nous calculons le prix de chaque instrument par la méthode de Monte Carlo :

$$P_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_{n,i} \times K_{n,i}$$

où $K_{n,i}$ représente le pay-off de l'instrument i pour le scénario n et $D_{n,i}$ le déflateur associé à ce pay-off.

Si les trajectoires sont cohérentes avec le marché, la relation $P_i = P_i^M$ doit être vérifiée pour tous les instruments i .

La validation de ce test est équivalente à retrouver les prix de marché par la formule de Monte Carlo sur les trajectoires simulées.

En reprenant l'exemple précédent de l'indice action, imaginons que la volatilité de cet indice ait été paramétrée par inversion de la formule de Black & Scholes sur un call à la monnaie de maturité 5 ans de prix P_A .

Le pay-off de ce call en $t = 5$ vaut ainsi $(S_5 - S_0)_+$. En utilisant le principe des simulations de Monte Carlo sur les trajectoires de l'indice action fournies par le GSE, il est possible de retrouver le prix de ce call européen :

$$P_A^{MC} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_{n,i} \times (S_{n,5} - S_0)_+$$

Valider le test de cohérence avec le marché implique de retrouver l'égalité $P_A^{MC} = P_A$.

5.4.3. Vérification de l'implémentation statistique

Au-delà des tests martingales et de cohérence avec le marché, il est également souhaitable de valider l'implémentation qui est faite du GSE via des tests plus généraux. Ces tests ne sont pas forcément nécessaires à chaque génération de trajectoires, mais doivent au minimum être réalisés lors de la phase d'approbation du GSE.

Au premier rang de ces tests, il convient de vérifier l'indépendance et la normalité des lois utilisées pour la construction des trajectoires basées sur des processus de Wiener. Ces propriétés peuvent être vérifiées via les tests de Shapiro-Wilk ou de Kolmogorov.

Il convient aussi de vérifier que les corrélations implémentées en paramètres des simulations sont bien retrouvées dans les trajectoires générées.

5.4.4. Remarques générales

La validation des trajectoires fournies par un GSE devrait être systématiquement effectuée chaque fois que le modèle est utilisé, et pas seulement à l'approbation du modèle. À ce titre, il est recommandé de mettre en place une procédure de validation stable dans le temps et d'automatiser le processus de validation autant que faire se peut. Cela permet d'assurer non seulement un meilleur contrôle du risque opérationnel lié à la validation, mais permet aussi d'assurer une traçabilité dans le temps de la pertinence des trajectoires fournies.

S'apparentant à un audit, il est souhaitable que les étapes de validation d'un GSE en reprennent les codes, en commençant par faire valider les trajectoires par un observateur indépendant de celui qui les a produites. Par ailleurs, le processus de validation doit *a priori* être réalisé en aveugle du modèle utilisé et ne reposer que sur les trajectoires. Cette indépendance évite d'introduire le moindre biais et permet de comparer entre eux différents modèles.

Si l'automatisation et la reproductibilité est un point particulièrement important de la validation, il est néanmoins impossible d'éliminer toute intervention humaine du processus. En effet, la plupart des contrôles à effectuer nécessitent une certaine flexibilité d'interprétation et le recours à des vérifications graphiques est fréquent.

5.4.4.1. Critères d'acceptation

Bien souvent, la validation ne fournit pas de résultat exact. Le calibrage n'est pas parfait et l'utilisation du stochastique induit forcément une convergence approximative, même si très proche lorsque le nombre de simulations est suffisant.

Ainsi, en plus des erreurs dans l'implémentation et le calibrage recherchées, deux types d'approximation supplémentaires peuvent venir s'ajouter :

- Les approximations liées à l'optimisation du calibrage, avec un nombre de produits financiers sur lesquels s'ajuster généralement supérieurs au nombre de paramètres. De plus, les produits financiers ne sont pas toujours cohérents entre eux (smiles de volatilité par exemple) ;
- Les écarts statistiques dus à l'utilisation du stochastique dans les modèles. Ces écarts proviennent de l'utilisation d'un nombre limité de trajectoires qui rendent les calculs de moyennes approximatifs.

L'objectif de la validation est aussi de repérer les écarts en lien avec les deux points susmentionnés. À cette fin, deux critères d'acceptation peuvent être introduits afin de ne pas rejeter un GSE correct.

5.4.4.2. Seuil d'erreur

Dans le cadre de l'utilisation d'instruments financiers pour le calibrage du GSE, il n'est pas possible de répliquer parfaitement les prix des instruments financiers utilisés, ceci pour diverses raisons, parmi lesquelles les problématiques de smile de volatilité ou le fait qu'un modèle différent ait été utilisé afin de pricer les produits. Un souci classique est l'utilisation d'une courbe des taux différente de celle utilisée dans le pricing.

Par ailleurs, à moins de se restreindre à un très petit nombre d'instruments financiers, le problème d'optimisation à résoudre pour le calibrage comporte beaucoup plus de contraintes que de variables et aboutit donc au meilleur « compromis » pour reproduire au mieux chacun des prix, selon la pondération donnée à chaque actif et ce, quand l'algorithme d'optimisation ne se retrouve pas piégé par un minimum local.

Pour toutes ces raisons, il est nécessaire d'introduire une certaine tolérance dans la validation des résultats, notamment sur les aspects de cohérence avec le marché.

Notons $I \in \mathbb{N}$ le nombre d'instruments utilisés dans le calibrage. Notons également pour chaque instrument $i \in \llbracket 1, I \rrbracket$ P_i^M son prix sur le marché (objectif du calibrage) et P_i son prix calculé à partir des trajectoires. Il est alors possible de définir pour chaque instrument son erreur relative d'estimation :

$$\forall i \in \llbracket 1, I \rrbracket, \epsilon_i = \frac{|P_i - P_i^M|}{P_i^M}$$

À partir de la distribution de ces erreurs, il est possible de construire plusieurs critères de validation, parmi lesquels :

- La moyenne des erreurs $\mathbb{E}[\epsilon] = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \epsilon_i$ est inférieure à un seuil. Typiquement, un ordre de grandeur de 10 à 20% est utilisé.
- L'erreur maximale $\max_{i \in \llbracket 1, I \rrbracket} \epsilon_i$ est inférieure à un seuil donné.

Idéalement, l'emploi d'une combinaison de ces critères permet de trouver un bon compromis entre une adéquation globale au marché et une maîtrise des écarts les plus importants.

Les erreurs relatives sont utilisées afin de ne pas biaiser l'analyse en accordant plus d'importance aux prix les plus élevés.

Il est important de préciser que les critères d'acceptations doivent se concentrer sur les zones les plus sensibles pour l'assureur. Il serait peu opportun de rejeter un lot de trajectoires à cause d'une erreur trop importante sur des valeurs peu représentatives des risques portés par l'assureur, par exemple sur les très courtes maturités.

5.4.4.3. Théorème central limite

Le théorème central limite définit la vitesse de convergence en loi de la moyenne d'observations indépendantes identiquement distribuées.

La plupart des tests de validation d'un GSE repose sur l'utilisation de la moyenne d'observations $X_n, n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, avec N le nombre de trajectoires stochastiques. Cette moyenne doit normalement être égale à une valeur S . Or, l'utilisation de tirages aléatoires rend cette moyenne dépendante des tirages et il est peu probable qu'elle soit égale à S , surtout si la volatilité des trajectoires est importante et le nombre de tirages faibles.

Or, en notant μ la moyenne de X et σ son écart-type, d'après le théorème central limite :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n = \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$$

Partant de cette formule, il est possible de construire un critère pour la validation des critères de martingalité ou la convergence de la méthode de Monte Carlo.

Notons :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n$$

$$\mathbb{V}[X] = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (X_n - \mathbb{E}[X])^2$$

Pour un seuil de confiance α , le critère est validé si :

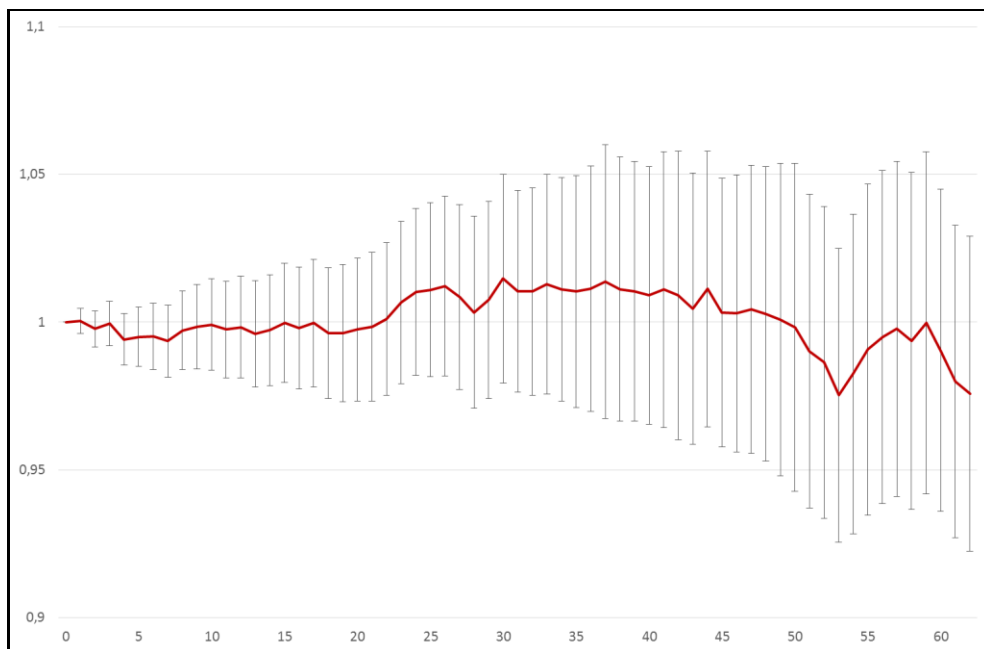
$$S \in \left[\mathbb{E}[X] - \frac{\sqrt{\mathbb{V}[X]}}{N} \times q_{\frac{1+\alpha}{2}}, \mathbb{E}[X] + \frac{\sqrt{\mathbb{V}[X]}}{N} \times q_{\frac{1+\alpha}{2}} \right]$$

Avec $q_{\frac{1+\alpha}{2}}$ le quantile de niveau $\frac{1+\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite.

Typiquement, α est choisi entre 95% et 99%.

Sur l'exemple de l'indice action présenté précédemment, un zoom autour de l'ordonnée de valeur 1 montre que l'égalité n'est pas parfaite, notamment à cause du nombre de trajectoires trop faible (10 000 en l'occurrence sur cet exemple).

Le graphe ci-dessous présente la trajectoire des espérances actualisées de l'indice ainsi que l'intervalle de confiance à 95% autour de cette moyenne.



Bien que la courbe ne soit pas rigoureusement égale à 1 pour l'ensemble des pas de temps, cette valeur se situe systématiquement dans l'intervalle de confiance, ce qui rend possible la validation de la martingalité.

Classiquement, il n'est pas rare d'observer l'utilisation de séries pseudo-aléatoires précises permettant à la fois d'assurer une convergence optimale des valeurs et la reproductibilité des résultats.

6. Analyse comparée des impacts des différents modèles sur des portefeuilles comparables

Des analyses conjointes ont été menées par différents acteurs au sein du Groupe de Travail. Cette partie s'attache à présenter la démarche d'analyse qui a été mise en œuvre, les hypothèses retenues et les résultats obtenus. L'analyse présentée ci-dessous présente un certain nombre de limites qu'il convient de garder en mémoire :

- L'étude ne couvre pas la totalité des modèles de place (et notamment la famille des modèles CIR) ;
- Les résultats sont très sensibles aux managements actions. Le fait de baisser la moyenne mobile retenue pour définir le taux cible conduirait à augmenter les écarts de valorisation ;
- En période de taux positifs, le LMM, DLMM et LMM+ conduiraient à des résultats proches ;
- En période de volatilité plus élevée, l'écart entre le DLMM (et LMM+) et les modèles gaussiens serait accentué (les modèles gaussiens pénalisant trop fortement le ratio de couverture en simulant des trajectoires de taux trop fortement négatives) ;
- En présence d'un nombre de point OTM plus important (afin de mieux reproduire le smile de volatilité) l'écart entre le DLMM et le LMM+ s'accroîtrait (le LMM+ étant plus apte à traduire le smile).

Ces éléments conduisent donc à analyser les résultats avec prudence.

6.1. Description des objectifs de l'étude et des choix réalisés

6.1.1. Objectifs de l'étude

Au sein du groupe de travail GSE, un groupe d'actuaire experts en modélisation ALM a souhaité réaliser une étude comparative de modèles GSE. Le but de l'étude a consisté en des réunions de définition du jeu de données à retenir (définition des model points, Taux Minimum Garanti (TMG), différents taux à appliquer, règles d'investissement...), des modèles à tester, du calibrage à mettre en place, des hypothèses de calculs et du logiciel ALM retenu pour ces calculs. Puis, les GSE ont été modélisés, complétés par une étude de sensibilité.

Trois éléments de mesure :

- Evolution de la chronique de cash flows ;
- Capital libre sur valeur de marché ($\text{Capital Libre} = \text{FP} + \text{VIF} - \text{SCR}^*$) et ratio de couverture : $(\text{FP} + \text{VIF}) / \text{SCR}$;
- Impact du calibrage.

6.1.2. Portefeuilles modélisés

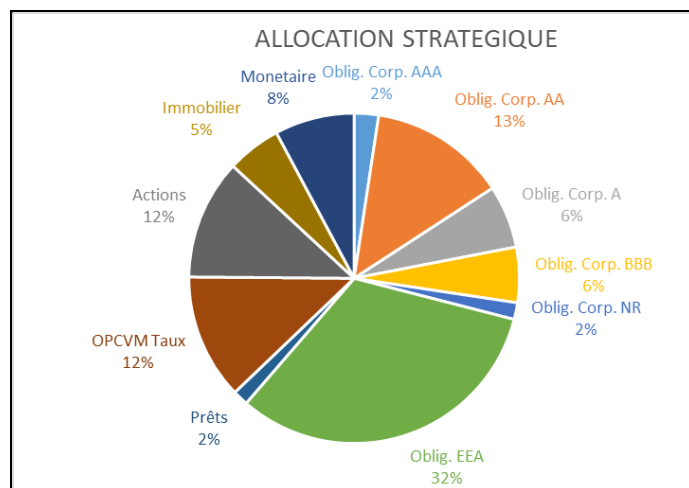
Une société est modélisée de bilan simplifié suivant :

Poste	Passif	% Bilan
Capitaux Propres	11,3	4,4%
Réserve de Capi.	2	0,8%
PM Euro	98	38,2%
PM Euro2	98	38,2%
PPB	2	0,8%
Provisions UC	45	17,6%
Total	256 320	100,0%

Cette société représente une entreprise « type » du marché de l'assurance vie français. **Les valeurs de BEL, TVFOG et SCR²⁶ dépendent fortement du portefeuille modélisé.** Pour simplifier la compréhension des résultats, le Groupe de Travail GSE a préféré utiliser des portefeuilles simples. Il s'agit donc de portefeuilles avec un nombre limité de model points et de types d'actifs. Toutefois, la probité des résultats est assurée car :

- Les prestations ont lieu d'une manière lisse au long de la projection (car elles sont probabilisées) ;
- Les actifs tournent (des nouveaux achats/ventes se font tout au long de la projection).

L'allocation d'actif de l'entreprise en valeur de marché est la suivante :



Les hypothèses de passif sont :

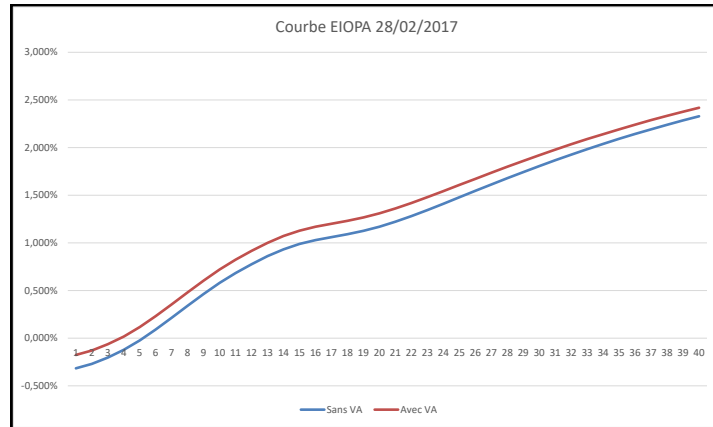
Age	- 40 ans
Sexe	- 50% hommes / 50% femmes
TMG	- Euro 1 : TMG 0,5% - Euro 2 : TMG 1%
Ancienneté	- 10 ans
Modélisation rachat	Rachats structurels : 3% avant 8 ans ; 7% après Rachats Conjoncturels : loi dynamique ONCs
Taux de référence	Moyenne mobile 5 ans du taux 10 ans
Taux de PB	Minimum réglementaire
Tx chargement sur encours	0,50%
Tx frais de gestion	0,30% de l'encours

Le calcul de SCR n'est fait que sur les chocs action, taux, immobilier, spread, rachat et frais. La partie liée aux autres chocs est considérée de faible matérialité.

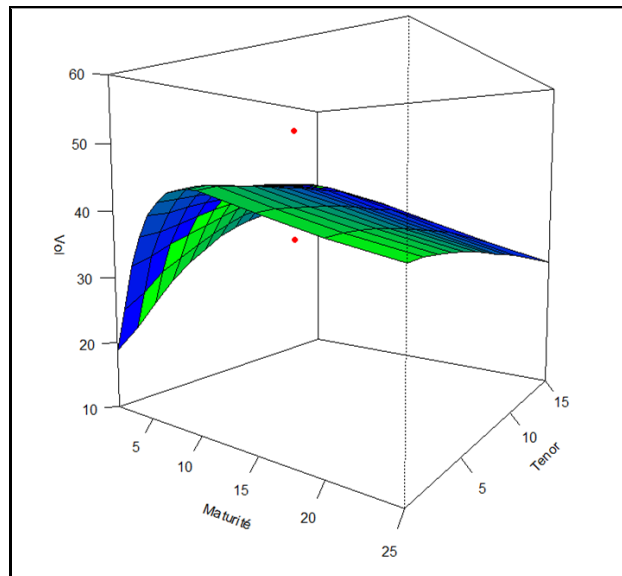
²⁶ BEL: Best Estimate of Liabilities ou « Fair Value » des passifs
TVFOG : Time Value of Financial Options and guarantees
SCR: Solvency Capital Requirement

6.1.3. Données de calibrage

- Courbe de taux EIOPA 28/02/2017



- Nappe de volatilités normales (de Bachelier) de swaptions à la monnaie en points base



Maturité de l'option	Tenor (maturité du sous-jacent)										
	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans	7 ans	8 ans	9 ans	10 ans	15ans
1an	18,80	21,60	25,00	28,20	30,90	32,90	34,90	36,30	37,40	38,30	41,00
2 ans	25,40	27,40	30,30	32,20	34,00	35,60	37,20	38,50	39,40	40,30	41,60
3 ans	32,00	33,20	34,80	36,10	37,30	38,60	39,80	40,70	41,40	41,90	41,90
4 ans	36,40	37,00	37,90	39,00	40,00	40,80	41,70	42,30	42,80	43,20	42,20
5 ans	39,60	39,90	40,60	41,20	41,70	42,30	43,00	43,30	43,70	44,00	42,20
6 ans	41,40	41,90	42,30	42,70	42,90	43,30	43,60	43,90	44,10	44,20	41,90
7 ans	42,80	43,30	43,50	43,70	43,70	43,90	44,10	44,20	44,20	44,20	41,40
8 ans	43,10	43,70	43,70	43,80	43,80	43,90	44,00	44,00	44,00	43,90	40,90
9 ans	43,20	43,80	43,80	43,80	43,80	43,80	43,80	43,70	43,60	43,50	40,50
10 ans	43,10	43,70	43,70	43,70	43,60	43,50	43,50	43,30	43,10	43,00	39,80
15 ans	40,40	40,80	40,90	40,90	40,90	40,80	40,60	40,30	40,10	39,90	36,60
20 ans	37,90	38,20	38,30	38,30	38,20	38,00	37,60	37,30	37,00	36,70	33,50
25 ans	35,80	36,10	36,10	35,90	35,70	35,40	35,00	34,50	34,10	33,70	30,80

- Deux volatilités hors de la monnaie
 - OMT -2%, maturité 5ans et tenor 10 ans : 34,00
 - OMT +2%, maturité 5ans et tenor 10 ans : 54,00
- Inflation fixe à 1,2% pour toute maturité future
- Volatilité action

Maturité	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans
Volatilité	17,977%	18,593%	18,874%	19,046%	19,214%

- Volatilité immobilier à 10% et taux de loyer à 0%
- Matrice de corrélation

	Taux Nominal	Taux Réel	Action	Immobilier
Taux Nominal	100%	0%	25%	25%
Taux Réel	0%	100%	0%	0%
Action	25%	0%	100%	50%
Immobilier	25%	0%	50%	100%

6.2. GSE retenus pour modélisation

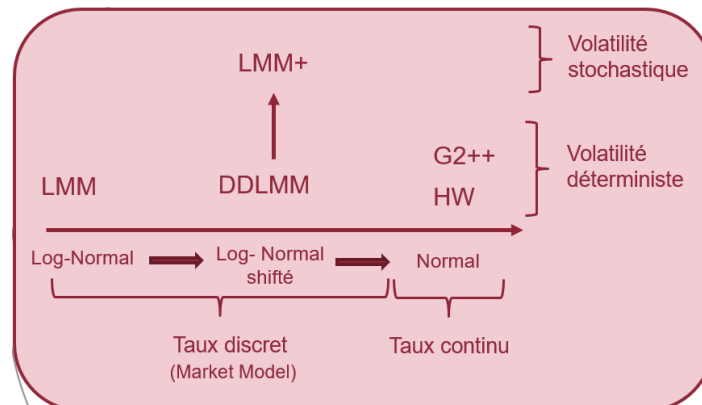
Neuf types de GSEs ont été fournis par les membres du Groupe de Travail :

Nom du GSE	Modèle		
	Taux	Action	Immobilier
DDLMM SVJD	LMM décalé	SVJD	B&S
DDLMM BS 1	LMM décalé	B&S	B&S
DDLMM BS 2	LMM décalé	B&S	B&S
LMM SVJD	LMM	SVJD	B&S
LMM+ SVJD 1	LMM+	SVJD	B&S
LMM+ SVJD 2	LMM+	SVJD	B&S
G2++ BS 1	G2++	B&S	B&S
G2++ BS 2	G2++	B&S	B&S
HW BS	Hull & White	B&S	B&S

Sur chaque type de GSE nous avons 4 jeux de scénarios économiques

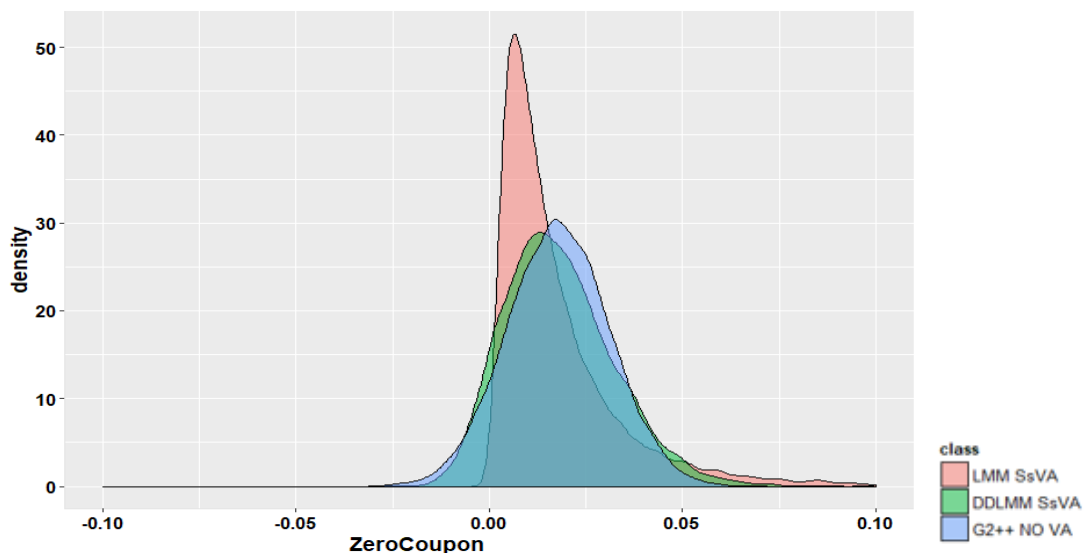
- Avec Correction de Volatilité (Volatility Adjustment)
- Sans Correction de Volatilité (Volatility Adjustment)
- Sans VA et choc de taux à la hausse
- Sans VA et choc de taux à la baisse

6.2.1. Distribution des modèles de taux



Les modèles utilisés dans l'étude peuvent être représentés dans un graphique bidimensionnel (ci-dessus) avec :

- en ordonnée, la volatilité des modèles. Un des modèles dans l'étude utilise une volatilité stochastique (LMM+) et les autres ont une volatilité déterministe. Le modèle LMM+ est la version avec volatilité stochastique du modèle DDLMM.
- En abscisse, la distribution du taux modélisé. Le modèle LMM produit des taux avec une distribution lognormale, DDLMM et LMM+ une distribution lognormale shiftée et G2++ et HW une distribution normale. Le tri des trois distributions est justifié par le fait qu'une distribution lognormale shiftée avec un shift à zéro est une distribution lognormale et que quand le shift augmente vers l'infini la distribution des taux converge vers une distribution normale. Cette continuité entre les modèles est néanmoins « cassée » par le fait que le taux modélisé dans les modèles de type Libor Market Model (LMM, DDLMM et LMM+) est un taux discret pendant que le taux modélisé par les modèles G2++ et HW est un taux continu.

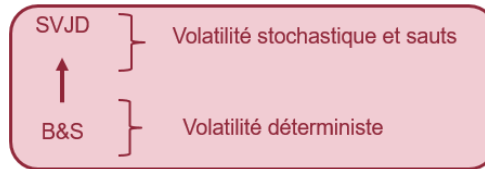


En regardant la distribution du taux long (taux 10 ans à coupon annuel) nous observons que :

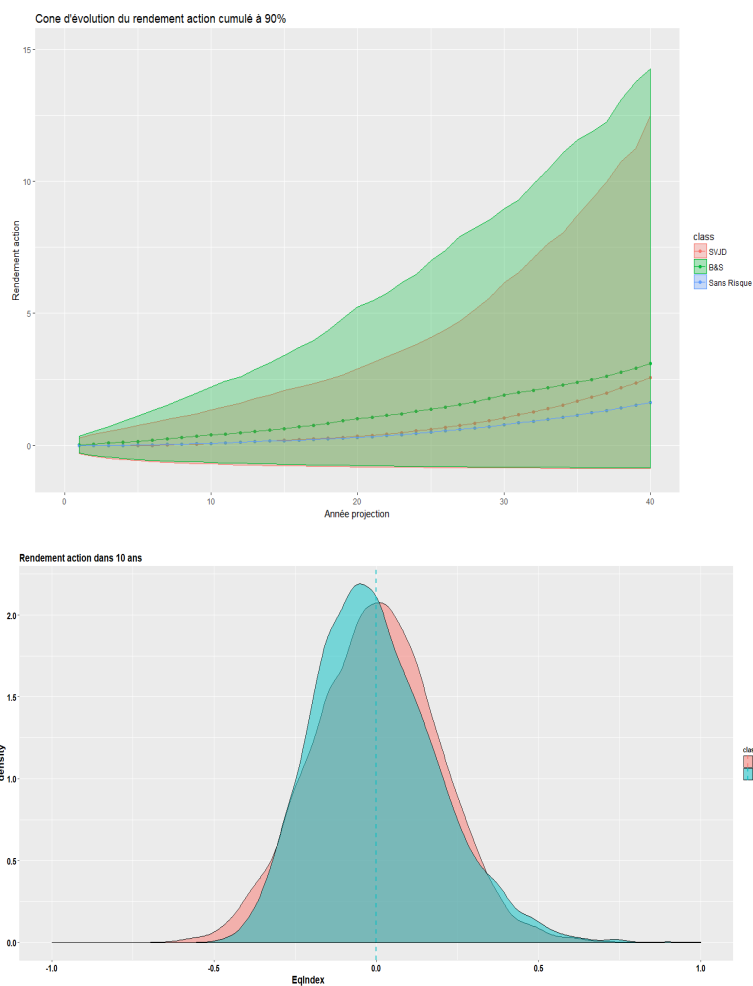
- G2++ et HW conduisent à des dynamiques de taux à peu près similaires ;
- LMM ne présente que des taux positifs, potentiellement « explosifs » (queue de distribution épaisse à droite) ;

- DDLMM et LMM+ présentent des queues plus épaisses que les modèles G2++ et HW mais bien moins explosives que le modèle LMM. La négativité des taux dépend totalement du drift.

6.2.2. Distribution des modèles action



Les modèles utilisés dans l'étude peuvent être représentés dans un graphique unidimensionnel (ci-dessus) avec en ordonnée, la volatilité et la présence de sauts.



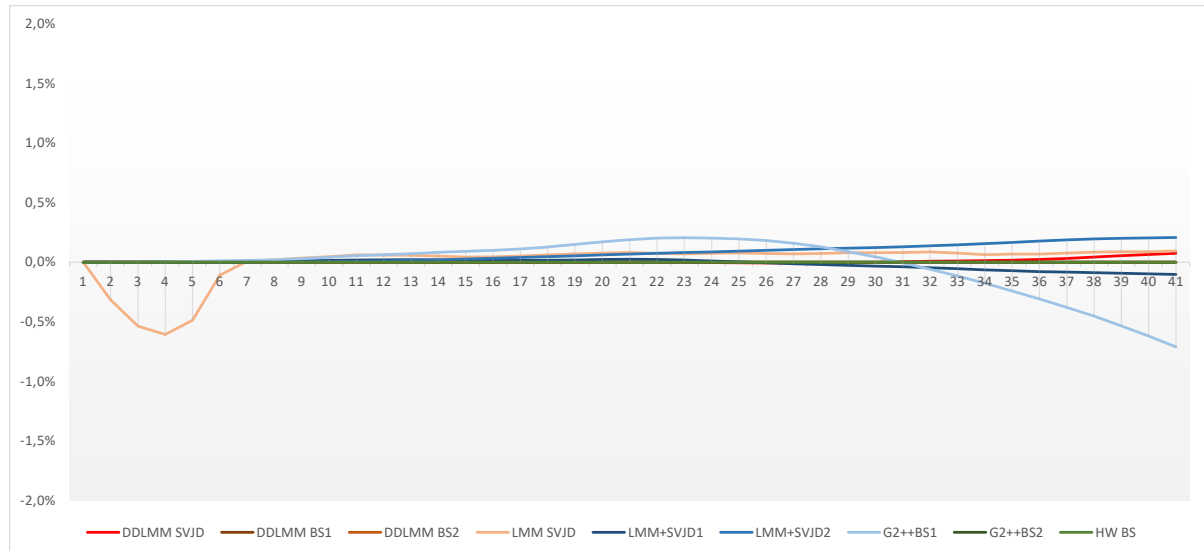
Le rendement des actions dans le modèle B&S est

- plus favorable dans les queues de distribution
- moins favorable dans le centre de la distribution

6.3. Tests Martingales et valorisation des dérivés

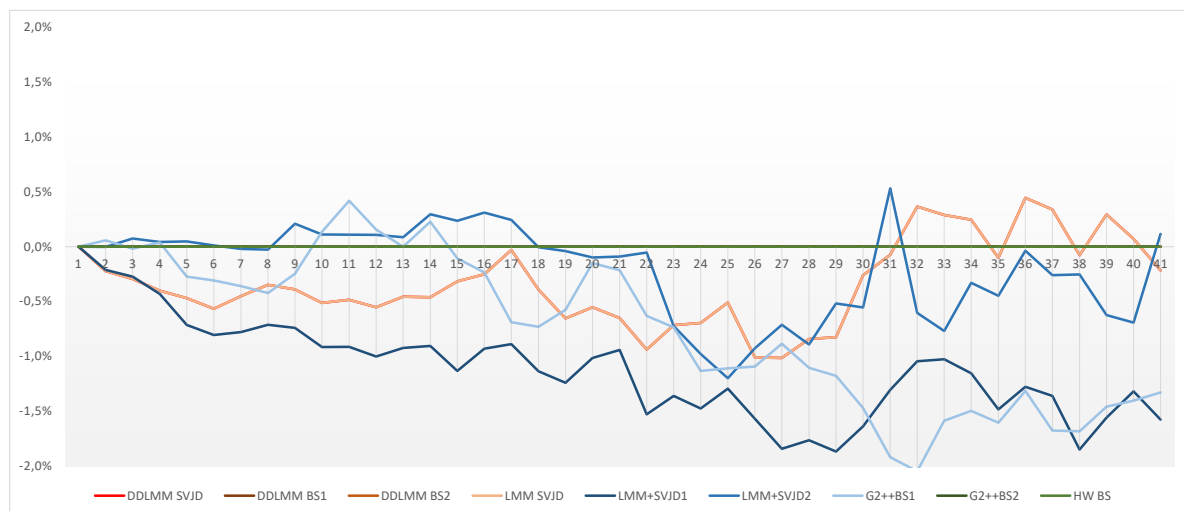
Un ensemble de tests de martingalité a été réalisé sur les scénarios économiques. Chaque test mesure l'écart de convergence généré tout au long de la projection si on détenait un portefeuille contenant un actif simple.

6.3.1. Test de déflateur



Tous les GSE génèrent un écart de convergence faible. Un écart est constaté au début de la projection dans le cas du modèle LMM. Cet écart est lié au fait que le modèle LMM n'est pas en mesure de produire de taux négatifs (alors que la courbe initiale en contient).

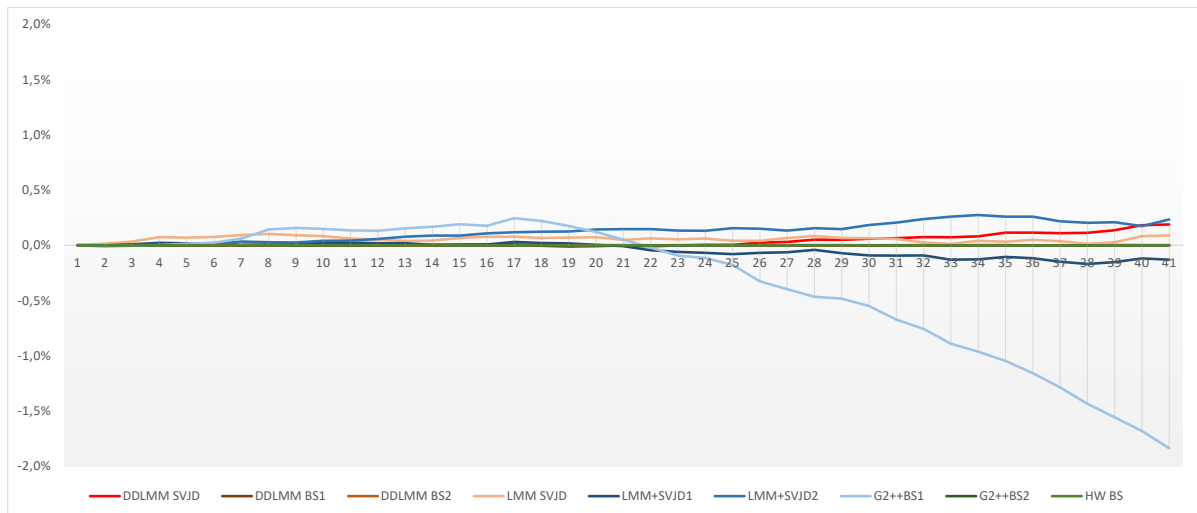
6.3.2. Test action



Le test s'effectue sur un portefeuille composé d'une action, et ce tout au long de la projection. On constate des écarts de convergence qui se génèrent au long de la projection. Cela est lié au fait que les actions sont des actifs volatiles et donc convergent plus lentement. Les tests réalisés ne divisent pas les écarts par l'écart type, car on souhaite mesurer la matérialité du modèle²⁷.

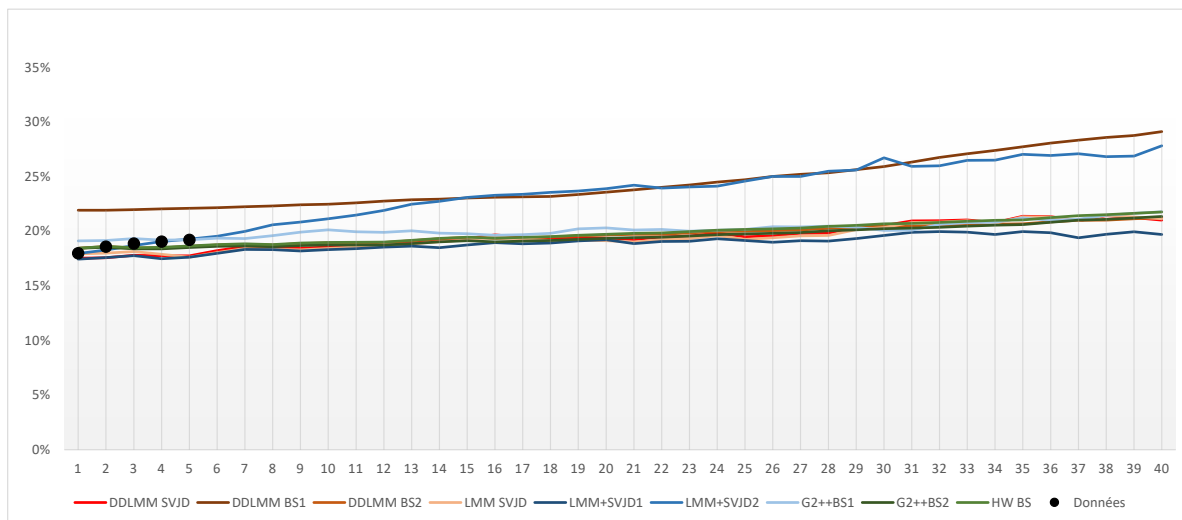
²⁷ Une famille de tests souvent utilisée consiste à vérifier statistiquement si on peut affirmer que la moyenne de l'échantillon est égale à la moyenne théorique. Dans les tests statistiques, on construit des intervalles de confiance.

6.3.3. Test de Zéro coupon maturité 10 ans



Dans ce test on considère un portefeuille dans lequel on achète une obligation zéro coupon de maturité 10 ans dans le futur.

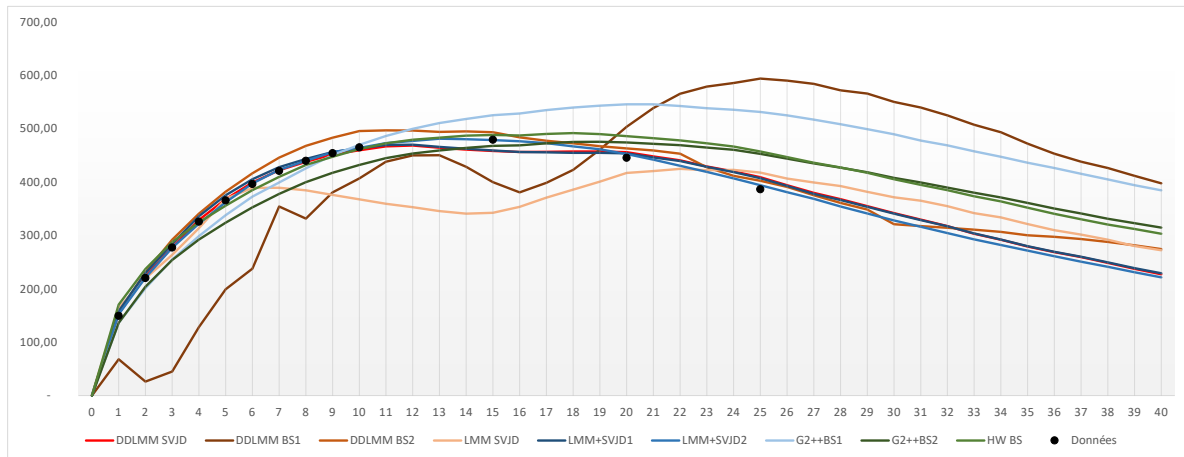
6.4. Volatilité implicite actions



On calcule le prix d'un call pour chaque maturité et on en déduit la volatilité implicite en utilisant un modèle de Black et Scholes et la courbe de taux de calibrage. On compare avec les volatilités utilisées pour calibrer (données). La plupart des modèles passent par des valeurs proches des données de calibrage. On voit aussi que la plupart des modèles tendent vers une volatilité proche des dernières données.

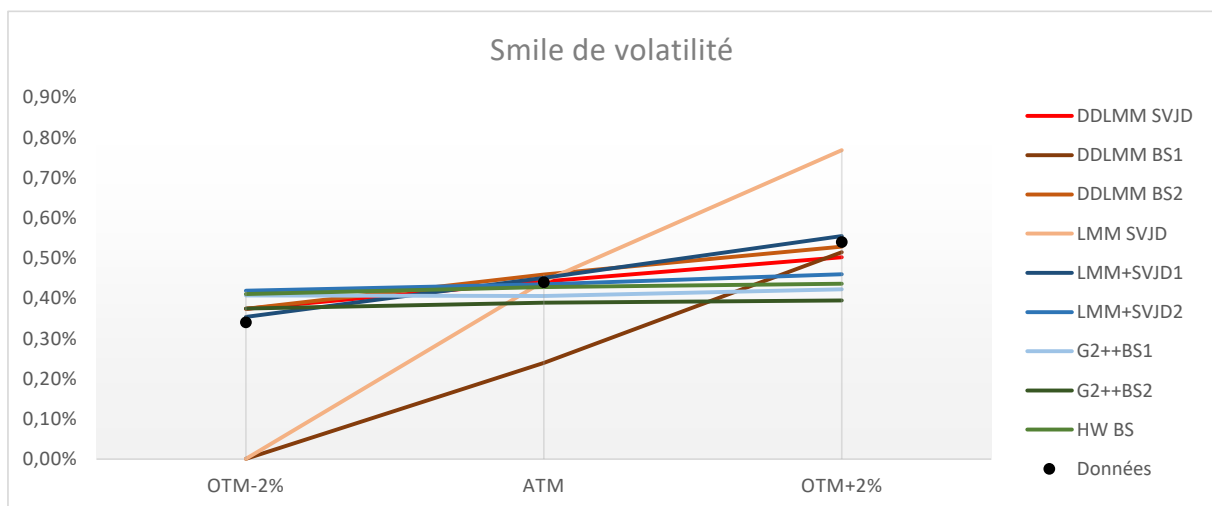
6.4.1. Prix des swaptions de Tenor 10 ans

Les tests présentés dans cette section sont des tests de matérialité où l'objectif est de tester si les écarts sont matériels pour un portefeuille simple.



On calcule le prix des swaptions avec un ténor de 10 ans pour chaque maturité. On compare avec les prix déduits des volatilités utilisées pour calibrer (données) en utilisant un modèle de Bachelier et la courbe de taux de calibrage. La plupart des modèles passent par des valeurs proches des données de calibrage.

6.4.2. Smile de volatilité



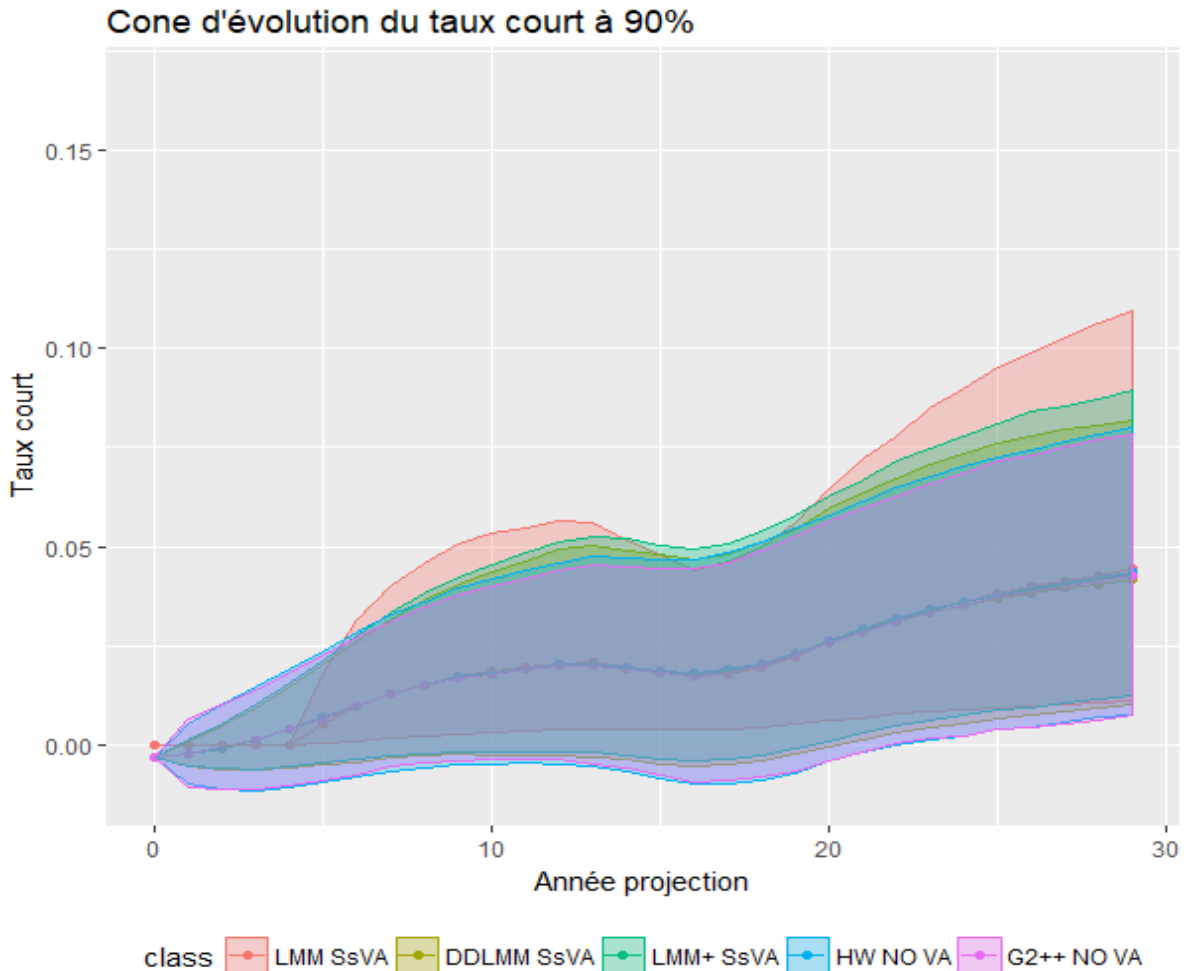
On a estimé les prix de swaptions tenor 5 ans à la monnaie (ATM) et hors de la monnaie (OTM-2% et +2%). En utilisant le modèle de Bachelier et la courbe de taux de calibrage on a déduit la volatilité implicite. Cette volatilité est comparée avec les volatilités de calibrage (données).

On constate que :

- Les modèles gaussiens (G2++ et HW) ont la même volatilité de Bachelier pour différents niveaux de strike
- Le smile de volatilité est mieux reproduit par les modèles lognormaux décalés (LMM+ et DDLMM). Il existe un lien direct entre la « pente » du smile de volatilité et le décalage du DDLMM.
- Le modèle lognormal (LMM) produit trop de smile. En particulier la volatilité en OTM-2% est nulle car le strike est un taux négatif et le modèle ne produit pas de taux négatifs.

6.5. Résultats après implémentation

6.5.1. Analyse des résultats par flux de simulation

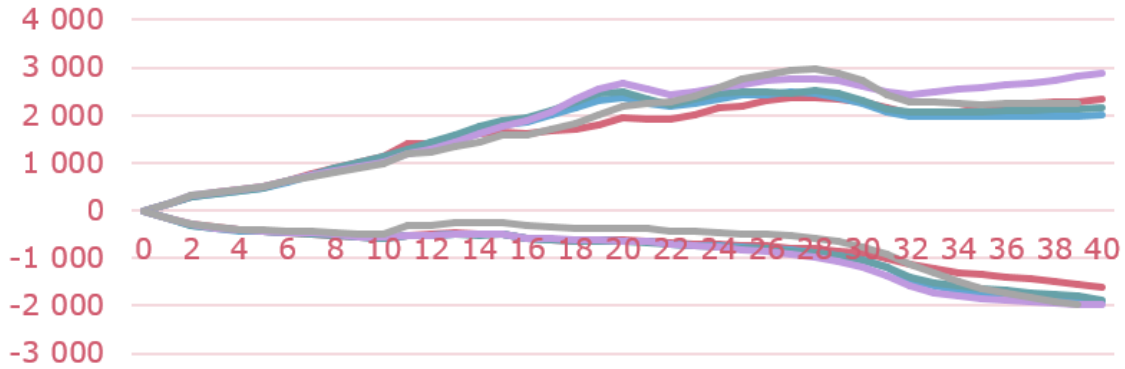


Le graphique ci-dessus représente l'aire entre les quantiles 10% et 90% au long de la projection pour le taux court des différents modèles. On remarque que le taux LMM reste à zéro les 4 premières années, cela est le résultat du fait que le modèle LMM ne peut pas produire des taux négatifs alors que la courbe de taux en contient. On remarque aussi que le modèle LMM est le plus explosif, suivi des modèles LMM+ et DDLMM. Les modèles HW et G2++ produisent les taux les moins explosifs mais sont aussi les modèles qui ont les taux les plus négatifs.

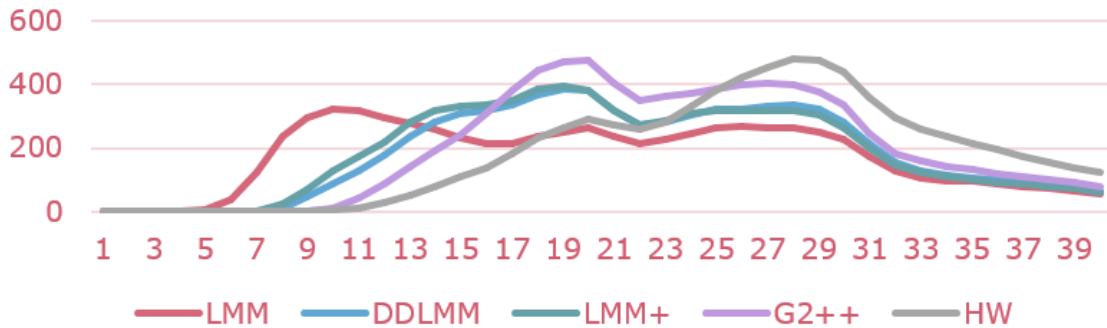
Le graphique ci-dessous représente :

- le cône d'évolution des cash flows du BEL entre les quantiles 10% et 90%.
- Le montant actualisé moyen des rachats dynamiques quand on calcule le BEL.

Cône d'évolution cash flows BE 90% - CEV



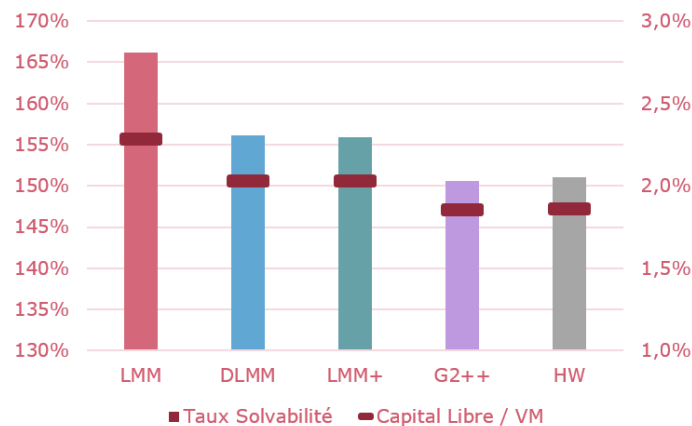
Rachat dynamique actualisé moyen



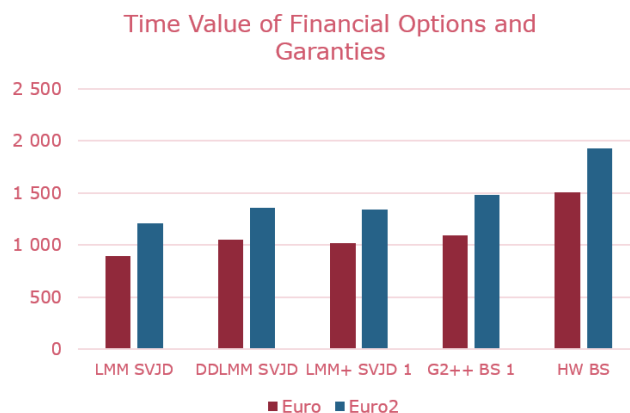
On constate que

- Le LMM a des taux plus élevés qui entraînent des rachats dynamiques plus importants en début de projection
- G2++ et HW ont plus de taux négatifs et des taux moins élevés, moins de rachats dynamiques en début de projection mais plus à la fin (quand la richesse est épuisée pour payer les garanties).
- DDLMM et LMM+ sont intermédiaires en termes de niveau de taux et de rachats dynamiques.

6.5.2. Capital libre et ratio de couverture



Un ratio de Solvabilité simplifié est calculé²⁸. Le ratio correspond à l'échelle à gauche du graphique et est représenté par les barres de couleurs tandis que le Capital Libre / Valeur de Marché est estimé et représenté par des rectangles rouges.

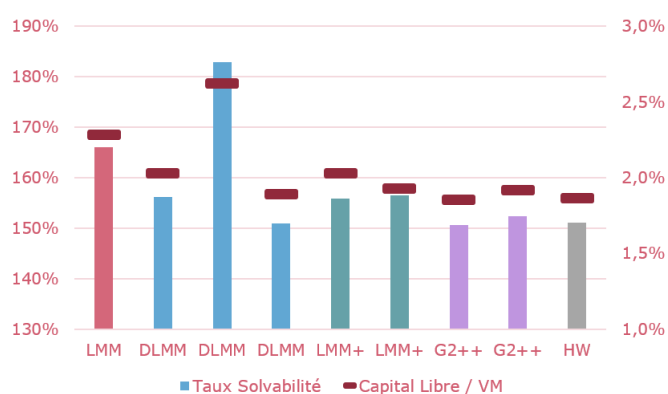


La Valeur Temps des Options et Garanties est un indicateur intéressant pour comparer des GSEs. C'est du fait de leur existence qu'on a recours aux GSE, notamment pour en déterminer la valeur (la valeur intrinsèque actualisée de ces options ne nécessite pas le recours à un GSE).

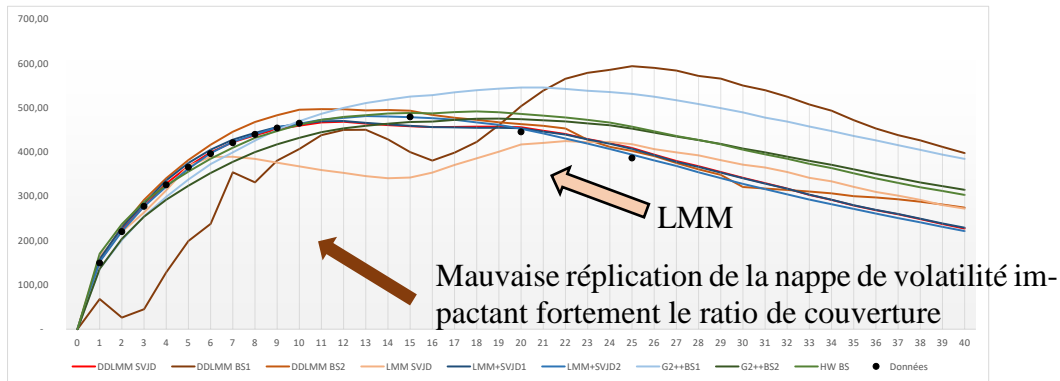
Il faut remarquer que :

- Les modèles gaussiens sont les plus coûteux dans le sens où ils fournissent les trajectoires de taux négatifs les plus marquées.
- Le LMM sous-estime probablement le risque réel pesant sur le portefeuille en ne fournissant que des trajectoires de taux positives
- In fine le ratio de couverture semble osciller entre 165 % et 155% (soit une amplitude de 10%).
- Il est à noter qu'en présence d'un marché plus volatil, un écart plus important serait sûrement constaté

6.5.3. Impact du paramétrage du modèle de taux

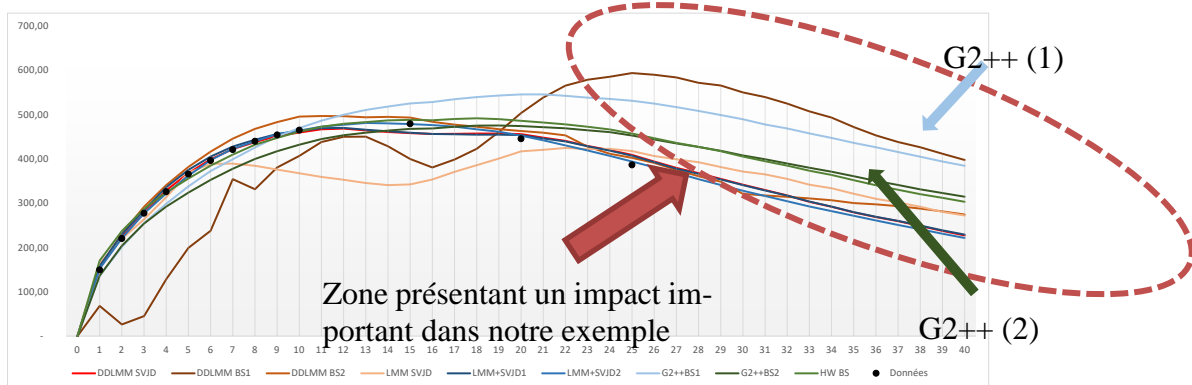


²⁸ Les chocs appliqués sont : action, taux, immobilier, spread, rachat et frais



- Au-delà de l'impact modèle, les écarts de « market consistency » présentent un très fort impact sur les résultats. La phase de calibrage doit donc être réalisée avec soin (notamment au niveau de la capacité à répliquer correctement la nappe de volatilité).

Ce constat plaide pour l'utilisation de modèles parfaitement maîtrisés qui pourront être facilement backtestés (quitte à présenter un paramétrage plus simple).



Le choix de la maturité des dérivés utilisés pour la calibration présente un impact fort : une mauvaise « market consistency » en fin de projection ne présente qu'un faible impact sur le ratio de couverture (les deux G2++ conduisent à des résultats similaires).

6.5.4. Conclusions et recommandations

Il est important de rappeler que tous les résultats présentés ici ont été obtenus sur des tables fournies par des sources différentes, mais partant des mêmes données de calibrage.

Les résultats de ces valorisations économiques montrent toute la volatilité des valeurs sous-jacentes à la réglementation. Dans l'article El Karoui et al. (2017) les auteurs font état, toute chose égale par ailleurs, de la volatilité des fonds propres économiques, en fonction de différents calibrages des modèles de taux (sur différentes matrices de volatilités implicites de swaption), menant à des écarts relatifs dépassant les 100%. Ici, nous confirmons qualitativement cette volatilité et élargissons le champ à celui du choix des modèles eux-mêmes, notamment des modèles de taux mais pas uniquement.

Il est important de noter que les résultats présentés et analysés sont très dépendants de la date de valorisation. Il est très difficile d'évaluer a priori comment évolueront les écarts relatifs observés dans le temps. La dépendance des chiffres donnés à la situation économique est connue mais il serait intéressant de réimplémenter cette étude dans les années à venir afin d'étudier la stabilité comparée des valeurs obtenues selon les différents modèles.

Du fait de l'évolution probable de nos observation dans le temps il est délicat, en toute généralité, d'écarter ou de favoriser des modèles. Toutefois, concernant les modèles de taux, certains critères essentiels permettent de mettre certains modèles de côté dans des cas précis. En présence de taux négatifs dans la courbe réglementaire il s'agira ainsi de choisir des modèles de taux (et d'adapter les modèles ALM) permettant de produire des taux négatifs. Mais aussi de privilégier un calibrage sur volatilités implicites de swaptions normales (Bachelier), cohérentes avec la présence de taux swap négatifs..

Le présent document a donc finalement comme ambition d'aider les actuaire dans leur choix de GSE : il s'agit de privilégier la cohérence entre les modèles et les données disponibles pour les calibrer, la bonne adaptation au bilan de l'assureur (les produits d'épargne au passif et la structure de l'actif), sans oublier la gouvernance.

Les principaux enjeux du GSE doivent pouvoir être partagés avec le Top Management de l'entreprise du fait d'impacts potentiellement significatifs sur la solvabilité. La présentation de mesures d'impact pourra contribuer à mieux les comprendre.

A ce titre, le choix des générateurs de scénarios, des données et des méthodes de calibrage, la présentation des résultats et de leurs limites doivent faire l'objet d'une communication claire, documentée et précise dans le cadre d'une gouvernance ad-hoc.

7. Synthèse

Le présent document a eu pour vocation de présenter de manière synthétique les éléments d'intérêt induits par l'utilisation des Générateurs de Scénarios Economiques (GSE). Après un retour rapide sur les notions majeures introduites par la valorisation économique en assurance, puis sur les grandes lignes de l'histoire des GSE, nous nous sommes concentrés sur les nombreuses problématiques liées à leur choix, plus particulièrement dans le cas d'une approche risque-neutre. Ce travail a ainsi montré que la structure des GSE dépendait de plusieurs éléments structurels fortement impactants, en particulier :

- Le choix des modèles de diffusions, nombreux et souvent très différents, qui ont évolué au cours des années de manière à, notamment, capter de manière la plus efficace possible la structure par terme des taux (cas des modèles de taux), la volatilité des trajectoires et la prise en compte de scénarios atypiques tels que des courbes de taux négatives ;
- Les méthodes de calibrage des modèles, complexes, qui visent à reconstituer la market consistency, condition *sine qua non* pour une projection de scénarios en phase avec les critères réglementaires de valorisation ;
- Les données de calibrage dont les sources, la profondeur et la granularité peuvent varier.

Toutes ces composantes ont un impact très significatif sur la volatilité des résultats. En effet, l'exercice qui a consisté à considérer, pour un même portefeuille de contrats en assurance vie, plusieurs exemples de modèles de diffusions « sérieux », calibrés sur des données similaires a montré combien le choix des modèles et de leur méthode de calibrages pouvaient conduire à des résultats affichant des différences significatives (best estimate, TVFOG ou ratios de couverture...).

Il est important de garder à l'esprit, ce que notre rapport a permis de souligner, que le choix des modèles, leur calibrage et leur gouvernance relèvent d'une expertise essentielle et que leur impact dépend fortement du contexte financier des portefeuilles à modéliser, de leurs caractéristiques intrinsèques en termes de garanties et autres sources d'optionalité.

Enfin au niveau de la gouvernance des générateurs et des résultats qu'il produisent, il est à rappeler que les principes de la norme NPA 1 définis par l'Institut des actuaire s'appliquent dans le cas présent.

En tout état de cause, le choix des générateurs de scénarios, des données et des méthodes de calibrage, la présentation des résultats et de leurs limites doivent faire l'objet d'une communication claire, documentée et précise dans le cadre d'une gouvernance ad-hoc.

8. Bibliographie

◆ VASICEK

O.Vasicek. An equilibrium characterisation of the term structure. *Journal Financial Economics*, 5:177–188, 1977

D. Brigo and F. Mercurio. *Interest rate models—theory and practice*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006. With smile, inflation and credit.

◆ BLACK-KARASINSKI

Black F. and P. Karasinski (1991) Bond and option pricing when short rates are lognormal, *Financial Analysts Journal* 47(4), 52-59.

Peterson S. , C. Stapleton and Marti Subrahmanyam (2003), A Multi-Factor Spot Rate Model for the Pricing of Interest-Rate Derivatives.

Peterson S. , C. Stapleton and Marti Subrahmanyam (1999), A two-factor lognormal model of the term structure and the valuation of American-style options on bonds, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.

Ho. T.S., R.C. Stapleton, and M.G. Subrahmanyam (1995), Multivariate Binomial Approximations for Asset Prices with Non- Stationary Variance and Covariance Characteristics," *Review of Financial Studies*, 8, 1125-1152.

Peterson, S.J., R.C. Stapleton, and M.G. Subrahmanyam (2002), "The Valuation of Bermudan-Style Swaptions in a Multi-Factor Spot-Rate Model", forthcoming, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.

◆ HESTON

HESTON, S.L.A. [1993], Closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of financial studies*, vol. 6, no 2, pp. 327-343.

◆ SVJD

BATES, D.S. [1996], Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options. *Review of financial studies*, vol. 9, no 1, pp. 69-107.

◆ JY et FM

Robert Jarrow et Yildiray Yildirim, « Pricing Treasury Inflation Protected Securities and related derivatives using an HJM model », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, June 2003

Fabio Mercurio, « Pricing Inflation-Indexed Derivatives », *Banca IMI*, 2004

◆ LMM

MILTERSEN, K.R., SANDMANN, K., et SONDERMANN, D. [1997], Closed form solutions for term structure derivatives with log-normal interest rates. *The Journal of Finance*, vol. 52, no 1, pp. 409-430.

BRACE, A., MUSIELA, M. [1997], The market model of interest rate dynamics. *Mathematical finance*, vol. 7, no 2, pp. 127-155.

JAMSHIDIAN, F. [1997], LIBOR and swap market models and measures. *Finance and Stochastics*, vol. 1, no 4, pp. 293-330.

◆ MERTON

JARROW, R.A. et ROSENFELD, E R. [1984], Jump risks and the intertemporal capital asset pricing model. *Journal of Business*, pp. 337-351.

JORION, P. [1988], On jump processes in the foreign exchange and stock markets. *Review of Financial Studies*, 1988, vol. 1, no 4, pp. 427-445.

MAHEU, J.M. et MCCURDY, T.H. [2004], News arrival, jump dynamics, and volatility components for individual stock returns. *The Journal of Finance*, vol. 59, no 2, pp. 755-793.

MERTON, R.C. [1976], Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of financial economics*, vol. 3, no 1-2, pp. 125-144.

◆ **DD LMM**

AMETRANO, F. M. et JOSHI, M. S. [2008], Smooth simultaneous calibration of the LIBOR market model to caplets and co-terminal swaptions.

◆ **SVDD LMM**

JOSHI, M. et REBONATO, R. [2003], A stochastic-volatility, displaced-diffusion extension of the LIBOR market model. *Quantitative Finance*, vol. 3, no 6, pp. 458-469.

◆ **Diffusion log normale**

BLACK, F. et SCHOLES, M. [1973], The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, pp. 637-654.

◆ **JLT**

JARROW, R.A., LANDO, D., et TURNBULL, S.M. [1997], A Markov model for the term structure of credit risk spreads. *Review of Financial studies*, vol. 10, no 2, p. 481-523.

LANDO David. [1998] On cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives research*, 2(2-3) :99–120.

MUNI TOKE Ioane [2011] Modèles stochastiques de taux d'intérêts.

9. Textes Réglementaires

EIOPA. Directive 2009/138/ce du parlement européen et du conseil du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II).

<https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/PDF/?uri=CELEX:32009L0138&from=FR>

EIOPA. Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II).

<https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/PDF/?uri=CELEX:32015R0035&from=FR>

EIOPA. EIOPA-BoS-14/166 FR - Orientations sur la valorisation des provisions techniques.

https://eiopa.europa.eu/Publications/Guidelines/TP_Final_document_FR.pdf