



Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du
Diplôme d'Actuaire EURIA
et de l'admission à l'Institut des Actuaire

le 20 Septembre 2024

Par : Jules Romain AKAKPO DE ZOLOU ATCHOU
Titre : Construction d'une table de mortalité d'expérience unisexe et mesure d'impact sur le provisionnement en normes prudentielles.

Confidentialité : Non

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

**Membre présent du jury de l'Institut
des Actuaire :**

Nom Jury IA2 : Marine HABART

Nom Jury IA2 : Julien DEJONGHE

Signature :

Entreprise :

Ensemble Protection Sociale

Signature :

Membres présents du jury de l'EURIA : Directeur de mémoire en entreprise :

Nom Jury A : Franck VERMET

TCHIVONGOU Roméo

Signature :

Invitée :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion
de documents actuariels**
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

Résumé

Les tables de mortalité restent des outils essentiels pour comprendre les phénomènes liés à la mortalité et, par conséquent, à la survie d'un individu. Dans le secteur de l'assurance, elles sont couramment utilisées, conformément à la réglementation en vigueur, pour évaluer les engagements des assurés et des assureurs lors de la tarification ou pour estimer les provisions, que ce soit selon les normes sociales ou prudentielles, notamment dans le cadre du Best Estimate.

De plus, le cadre réglementaire a évolué avec la loi n° 2023-973 du 23 octobre 2023 relative à l'industrie verte, qui élargit l'interdiction de l'utilisation des tables différenciées par sexe pour la tarification. Cette loi modifie, en principe, l'article L111-7 du Code des Assurances, qui depuis 2013 permettait une dérogation pour les contrats collectifs. L'objectif de cette extension est d'harmoniser la législation nationale avec le droit européen, notamment la « Gender Directive ».

Ce mémoire présente les méthodes et approches ayant conduit à l'élaboration des tables de mortalité prospectives d'expérience unisexes. Les travaux s'appuient sur les données des affiliés au Régime de Retraite Supplémentaire de l'Institution de Prévoyance Caisse Générale de Prévoyance des Caisses d'Épargne (CGP).

Ces travaux s'inscrivent non seulement dans le cadre des évolutions réglementaires, mais répondent également au besoin exprimé par le responsable de la Fonction Actuarielle de disposer d'un outil indispensable pour la gestion des risques inhérents aux branches à longues, telles que le Régime de Retraite Supplémentaire de la CGP.

Étant donné que ce régime, instauré en janvier 2000, est relativement récent, les données historiques sur le nombre de décès observés par génération sont limitées. Ainsi, des modèles endogènes adaptés, tels que les modèles Log Poisson, SMR généralisé et Brass, ont été retenus pour construire les tables de mortalité prospectives unisexes. Deux approches ont été utilisées pour déterminer ces tables non différenciées par sexe : la première, dite globale, est similaire à celle des tables segmentées par sexe, tandis que la seconde, dite « moyenne pondérée », s'appuie sur deux tables segmentées par sexe.

Abstract

Mortality tables remain essential tools for understanding mortality-related phenomena and, consequently, an individual's survival. In the insurance sector, they are commonly used, in accordance with current regulations, to assess the commitments of both insured parties and insurers when pricing or estimating reserves, whether based on social or prudential standards, particularly within the framework of the Best Estimate.

Furthermore, the regulatory framework has evolved with Law No. 2023-973 of October 23, 2023, relating to the green industry, which extends the prohibition of using gender-differentiated tables for pricing purposes. This law, in principle, modifies Article L111-7 of the Insurance Code, which since 2013 had allowed an exemption for group contracts. The aim of this extension is to align national legislation with European law, particularly the "Gender Directive."

This thesis presents the methods and approaches that led to the development of prospective unisex experience mortality tables. The work is based on data from the members of the Supplementary Retirement Scheme of the General Provident Fund for Savings Banks (CGP).

This work is not only part of regulatory developments but also responds to the need expressed by the person responsible for the Actuarial Function to have an indispensable tool for managing the risks inherent to long-term branches, such as the CGP Supplementary Retirement Scheme.

Given that this scheme, established in January 2000, is relatively recent, historical data on the number of observed deaths by generation is limited. Therefore, adapted endogenous models, such as the Log Poisson, generalized SMR, and Brass models, were chosen to construct the prospective unisex mortality tables. Two approaches were used to determine these gender-neutral tables : the first, known as the global approach, is similar to that of gender-segmented tables, while the second, known as the "weighted average" approach, is based on two gender-segmented tables.

Note de Synthèse

Contexte et problématique

Ce mémoire vise à établir un processus de création de tables d'expérience genrées et unisexes pour le Service Actuariat Inventaires Techniques, suite à l'évolution de la réglementation. En effet, la loi dite **Industrie verte** de 2023 élargit aux contrats collectifs l'interdiction de l'utilisation de tables différenciées par sexe pour la tarification. L'objectif est de développer une approche structurée pour produire des tables de mortalité non différenciées par le sexe, conformes aux exigences réglementaires, tout en apportant des solutions adaptées à l'analyse des risques, notamment le risque de longévité.

Objectifs et approches

Afin d'atteindre les objectifs du mémoire, quatre tables de mortalité ont été construites : deux tables genrées et deux tables unisexes. La construction de ces tables a nécessité plusieurs étapes, notamment la validation des données du périmètre, la présentation de différents modèles et les critères de qualité. Compte tenu de la faible profondeur historique des données, seuls trois modèles exogènes ont été retenus : le modèle Linéaire, le modèle Log-Poisson et le modèle de Brass. Les modèles ont été ajustés sur une plage d'observation réduite, couvrant les âges de 55 ans à 80 ans et les années de 2011 à 2018.

Les deux principales méthodes d'évaluation des taux d'expérience des tables de mortalité unisexes sont l'approche globale et l'approche par la moyenne. L'approche globale évalue les taux bruts de mortalité, puis les ajuste à l'aide de modèles de construction de tables de mortalité. L'approche par la moyenne pondère les tables de mortalité genrées réglementaires, existantes ou issues des travaux de ce mémoire.

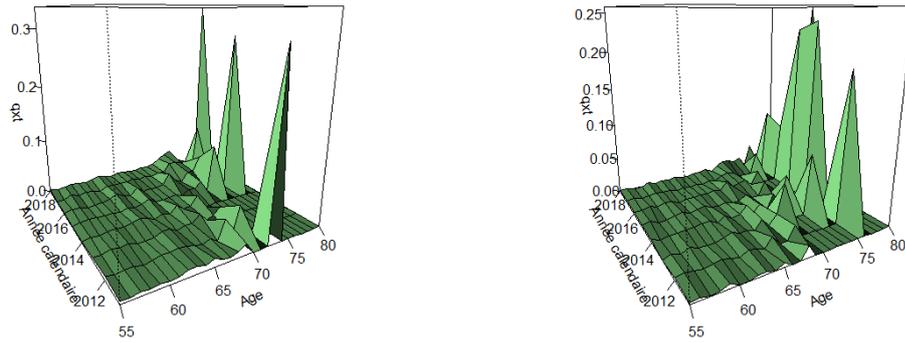
Processus de construction de la table unisexe : Approche par la moyenne

La construction d'une table de mortalité unisexe via l'approche par la moyenne s'est déroulée en quatre grandes étapes :

1. Détermination de deux tables de mortalité genrées à partir de l'approche globale ;
2. Fiabilisation de la base de données ;

3. Calcul des taux bruts de mortalité selon la méthode de Hoem, jugée plus pertinente que celle de Kaplan-Meier pour une meilleure adéquation entre observations empiriques et projections théoriques ;
4. Pondération des tables générées pour obtenir la table de mortalité unisexe finale.

Les graphiques ci-dessous présentent les taux bruts de mortalité déterminés selon la méthode de Hoem :



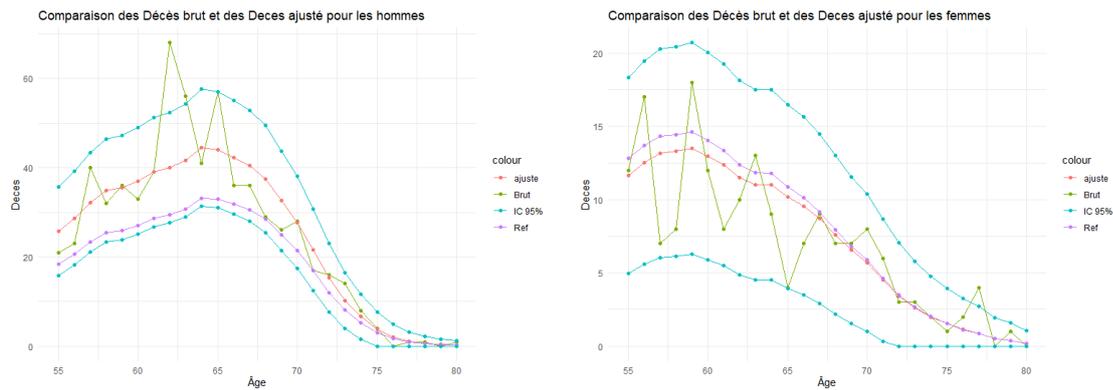
(a) Taux bruts de mortalité de hommes

(b) Taux bruts de mortalité de femmes

FIGURE 1 – taux Bruts de mortalités

Suite à une analyse des taux bruts, l'estimateur de Hoem a été ajusté selon trois modèles exogènes ou à référence externe. Après comparaison notamment par des mesures de qualité, seule la méthode de Brass a été retenue, car elle fournissait les ajustements les plus cohérents avec les tendances passées.

Les graphiques ci-après présentent des taux d'expérience ajustés, ainsi que les intervalles de confiance à 95 %, obtenus à partir du modèle de Brass pour les populations masculine et féminine du portefeuille des affiliés.

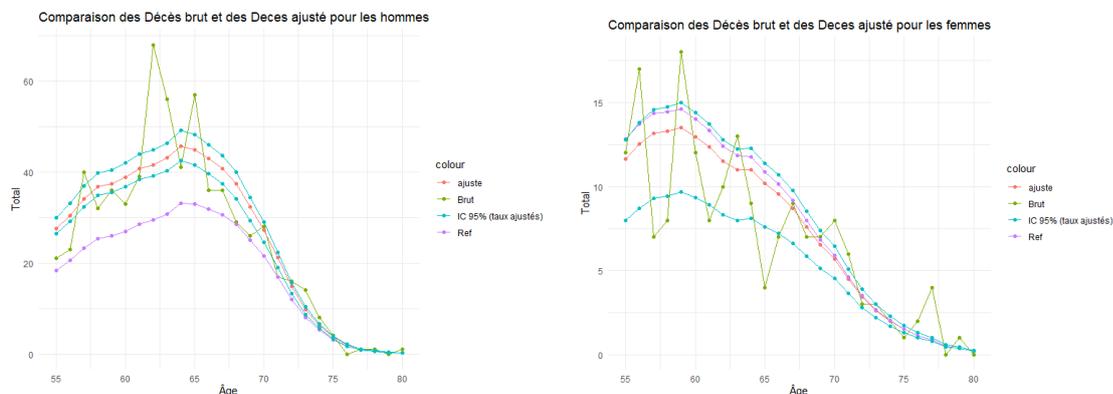


(a) Comparaison du nombre de décès observés et ajustés par âges pour les hommes

(b) Comparaison du nombre de décès observés et ajustés par âges pour les femmes

FIGURE 2 – Comparaison du nombre de décès observés et ajustés par âges

En résumé, le processus de détermination des taux d'expérience pour les âges extrêmes a nécessité une extrapolation à partir des tables de référence TGH/TGF 05. La validation des tables d'expérience a ensuite été effectuée en analysant leurs tendances passées et futures à l'aide de différents critères de qualité (le khi-deux χ^2 , le R^2 , le SMR "Standardized Mortality Ratio" et le MAPE "Mean Absolute Percentage Error") et les espérances de vie générationnelles résiduelles. De plus, une étude de robustesse du modèle utilisé a été menée en appliquant une méthode de bootstrap sur les nombres de décès, permettant ainsi de construire des intervalles de confiance pour les taux d'expérience. Le résumé de cette étude de robustesse est illustré par le graphique suivant :



(a) Intervalle aux titres de fluctuation d'échantillonnage pour les hommes

(b) Intervalle aux titres de fluctuation d'échantillonnage pour les femmes

FIGURE 3 – Intervalle aux titres de fluctuation d'échantillonnage

Les intervalles de confiance construits par simulation, selon le principe de bandes de

confiance, démontrent la robustesse du modèle face aux fluctuations d'échantillonnage. Pour la tranche d'âge de 55 ans à 80 ans, ces intervalles englobent les taux ajustés, offrant une estimation plus pertinente que les intervalles ponctuels à 95%. Pour établir la table unisexe, l'approche par la moyenne utilise le sexe-ratio observé hommes-femmes (45/55%) pour pondérer ponctuellement les taux d'expérience des tables genrées obtenues, permettant ainsi de construire la table unisexe par la moyenne.

Processus de construction de la table d'expérience unisexe : Approche globale

L'approche globale a été utilisée pour construire une table d'expérience unisexe, en considérant la période d'observation de 2011 à 2018 pour les âges de 55 ans à 80 ans. Les taux bruts de mortalité de Hoem ont été évalués pour l'ensemble de la population assurée, sans distinction de sexe, afin de dégager la dynamique des taux en fonction de l'âge et de l'année d'observation. Le graphique ci-après récapitule les taux obtenus :

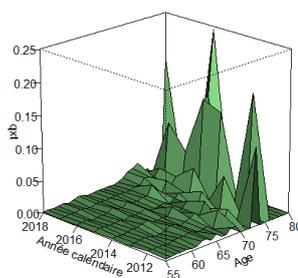


FIGURE 4 – Taux bruts de mortalités unisexe

Le modèle Brass a été choisi pour estimer les taux d'expérience unisexes, en l'absence d'une table unisexe de référence. Les tendances passées et futures issues du modèle de mortalité ont été analysées. Faute de table unique réglementaire, les tables TGH/TGF 05 ont été utilisées comme références pour les ajustements, en menant une analyse critique sur les axes de validation des taux d'expérience. Le tableau suivant résume les résultats obtenus :

Fonctions d'optimisation	$\Phi_2(a, b)$ avec TGH 05	$\Phi_2(a, b)$ avec TGF 05
χ^2	31.0329%	32.8183%
$\mathcal{R}2$	87.2020%	86.7023%
Incertitude d'échantillonnage moyen	1.0773	1.0563
SMR	1.0406	1.0418
MAPE(%)	19.1736%	20.4555%

TABLE 1 – Critères de qualités pour la population générale

Les résultats ont validé les observations sur la dynamique de la population générale affiliée au régime. La dynamique des décès tend à se rapprocher de celle de la population masculine, justifiant l'utilisation de la table TGH 05 comme référence pour ajuster la mortalité de la population générale, car elle conduit à de meilleurs ajustements par rapport aux tendances passées.

Afin de renforcer les résultats des critères de qualité, les graphiques ci-après illustrent l'ajustement des taux d'expérience sur la période d'observation selon la table de référence utilisée, avec des intervalles de confiance ponctuels à 95

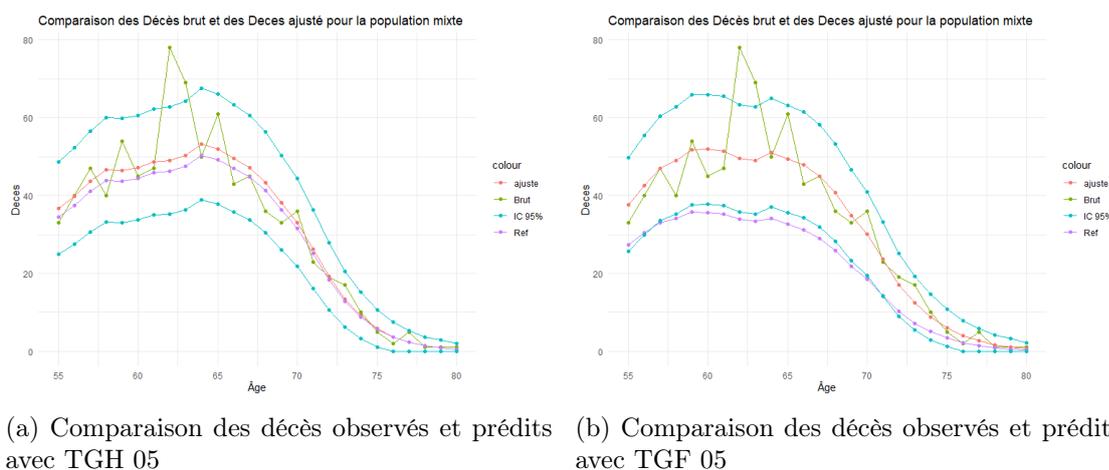


FIGURE 5 – Comparaison des décès observés et prédits pour la population générale

Une analyse critique des espérances de vie générationnelles résiduelles issues du modèle a conduit à retenir la table TGH 05 comme référence externe. En outre, une étude complémentaire a été réalisée pour évaluer la robustesse du modèle concernant les taux d'expérience de la table unisexe. Des intervalles de confiance ont été construits à l'aide de simulations de taux de décès pour la population générale affiliée au régime, illustrant ainsi la stabilité du modèle face aux variations.

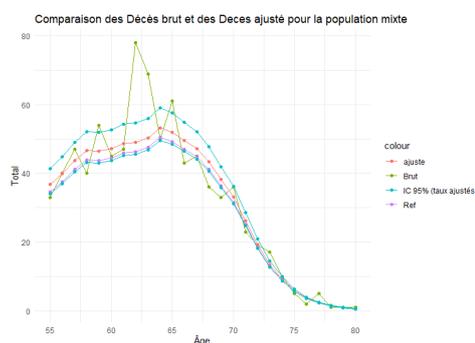


FIGURE 6 – Intervalles de confiances aux titres de fluctuations d'échantillonnages

Les intervalles de confiance ainsi déterminés offrent une plage de valeurs possibles pour les taux d'expérience plus pertinents que les intervalles de confiance ponctuels à 95 %.

Sensibilités sur le Best Estimate des provisions

Une analyse comparative a été menée entre les tables générées en vigueur avec celles établies dans le mémoire. L'analyse a porté sur les espérances de vie générationnelles résiduelles et les écarts entre les flux de prestations issus des tables d'expérience fournies par Prim'Act et ceux déterminés dans le mémoire. Les résultats montrent que les espérances de vie générationnelles des tables générées sont très proches, tout comme les tendances de projection des flux de prestations. Cependant, les flux de prestations associés à la table unisexe présentent un écart sensible par rapport aux autres tables en comparaison avec les tables en vigueur.

Le graphique ci-dessous récapitule les projections de flux de prestations selon les tables en vigueur (Prim'Act – “générées”), les tables générées issues de ce mémoire (EPS – “générées”) et les deux tables unisexes issues de ce mémoire :

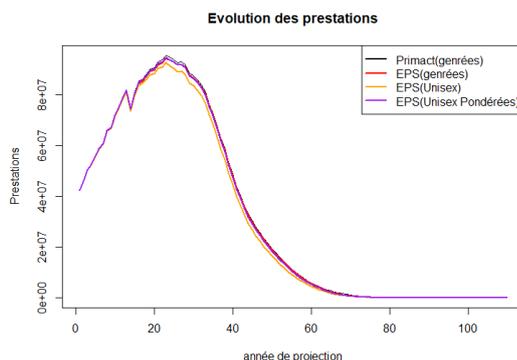


FIGURE 7 – Écoulement des prestations à partir du portefeuille au 31/12/2023

Le Best Estimate calculé, en utilisant les tables générées issues du mémoire, s'établit à 2 869 millions d'euros, soit un écart peu significatif de -0,83% par rapport au BE du Régime de Retraite Supplémentaire au titre de l'exercice 2023.

Le mémoire révèle un écart entre la mortalité observée dans la population générale affiliée au régime et la mortalité des hommes ainsi que celle des femmes. Bien que les femmes représentent 55% de la population affiliée, la mortalité de la population générale affiliée au régime tend à converger vers celle observée chez les affiliés hommes. Cette convergence inattendue suggère que l'utilisation de tables unisexes ou des tables exclusivement féminines peut conduire à une surévaluation des engagements. Un suivi de l'évolution de la mortalité est recommandé et une étude d'impact des tables unisexes reste à mener sur la tarification et l'impact de l'équilibre du régime sur le long terme.

Summary Note

Context and Issue

This dissertation aims to establish a process for creating gender-specific and unisex experience tables for the Technical Inventory Actuarial Service, following regulatory developments. Indeed, the so-called **Green Industry** law of 2023 extends to collective contracts the prohibition of using gender-differentiated tables for pricing. The objective is to develop a structured approach to produce mortality tables that are non-gender-differentiated, compliant with regulatory requirements, while providing solutions adapted to risk analysis, notably longevity risk.

Objectives and Approaches

To achieve the objectives of this dissertation, four mortality tables were constructed : two gender-specific tables and two unisex tables. The construction of these tables required several steps, including the validation of data within the scope, presentation of different models, and quality criteria. Given the limited historical depth of the data, only three exogenous models were retained : the Linear model, the Log-Poisson model, and the Brass model. The models were adjusted over a reduced observation range, covering ages from 55 to 80 years and the years from 2011 to 2018.

The two main methods for evaluating the experience rates of unisex mortality tables are the global approach and the average approach. The global approach evaluates raw mortality rates, then adjusts them using mortality table construction models. The average approach weights the regulatory gender-specific mortality tables, existing ones, or those derived from this dissertation's work.

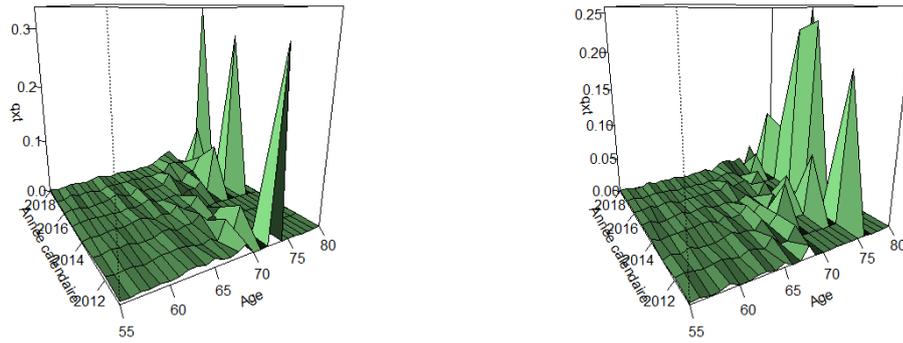
Unisex Table Construction Process : Average Approach

The construction of a unisex mortality table using the average approach was carried out in four main steps :

1. Determination of two gender-specific mortality tables based on the global approach ;
2. Securing the database ;

3. Calculation of raw mortality rates according to the Hoem method, considered more relevant than the Kaplan-Meier method for better alignment between empirical observations and theoretical projections ;
4. Weighting of gender-specific tables to obtain the final unisex mortality table.

The charts below present the raw mortality rates determined according to the Hoem method :



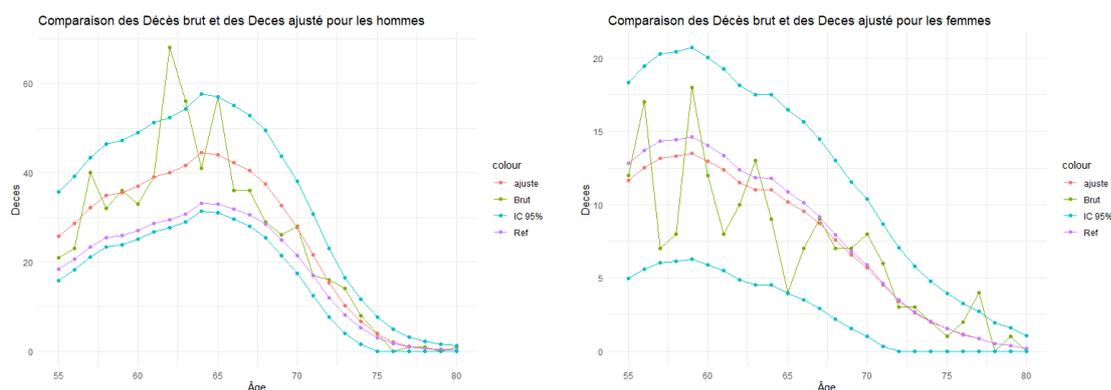
(a) Taux bruts de mortalité de hommes

(b) Taux bruts de mortalité de femmes

FIGURE 8 – taux Bruts de mortalités

Following an analysis of the raw rates, the Hoem estimator was adjusted according to three exogenous or external reference models. After comparison, particularly through quality measures, only the Brass method was retained, as it provided the most consistent adjustments with past trends.

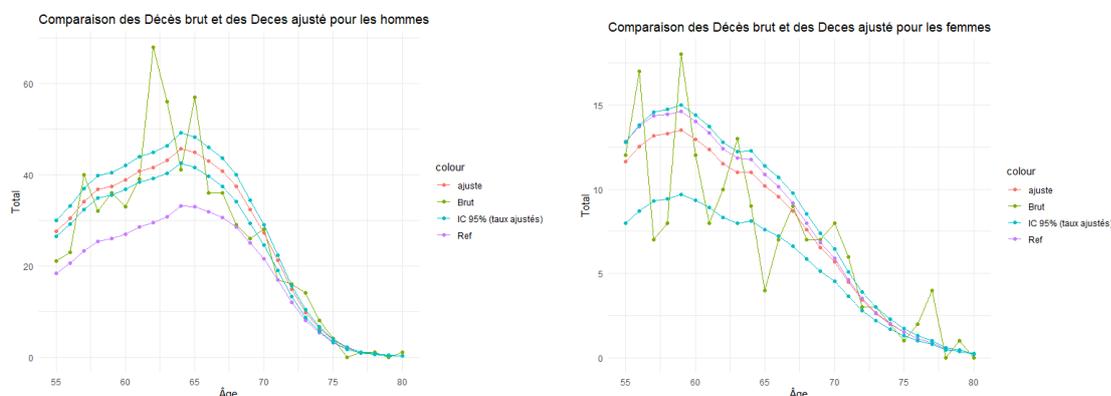
The charts below present the adjusted experience rates, along with the 95% confidence intervals, obtained from the Brass model for the male and female populations within the affiliate portfolio.



(a) Comparaison du nombre de décès observés et ajustés par âges pour les hommes (b) Comparaison du nombre de décès observés et ajustés par âges pour les femmes

FIGURE 9 – Comparaison du nombre de décès observés et ajustés par âges

In summary, the process of determining experience rates for extreme ages required extrapolation from the TGH/TGF 05 reference tables. The validation of experience tables was then conducted by analyzing their past and future trends using various quality criteria (chi-square χ^2 , R^2 , SMR “Standardized Mortality Ratio,” and MAPE “Mean Absolute Percentage Error”) and residual generational life expectancies. Additionally, a robustness study of the model used was conducted by applying a bootstrap method to the number of deaths, thereby constructing confidence intervals for the experience rates. The summary of this robustness study is illustrated by the following chart :



(a) Intervalle aux titres de fluctuation d'échantillonnage pour les hommes (b) Intervalle aux titres de fluctuation d'échantillonnage pour les femmes

FIGURE 10 – Intervalle aux titres de fluctuation d'échantillonnage

The confidence intervals constructed through simulation, based on the principle of confidence bands, demonstrate the robustness of the model against sampling fluctuations. For the age range of 55 to 80 years, these intervals encompass the adjusted rates, providing

a more relevant estimate than 95% point intervals. To establish the unisex table, the average approach uses the observed male-to-female sex ratio (45/55%) to weight the experience rates of the gender-specific tables, thereby constructing the unisex table by averaging.

Unisex Experience Table Construction Process : Global Approach

The global approach was used to construct a unisex experience table, considering the observation period from 2011 to 2018 for ages 55 to 80. Hoem's raw mortality rates were evaluated for the entire insured population, without gender distinction, to determine the rate dynamics by age and observation year. The chart below summarizes the rates obtained :

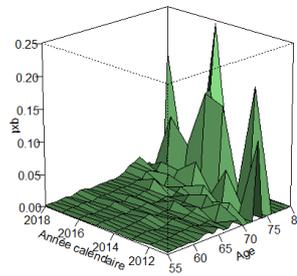


FIGURE 11 – Taux bruts de mortalités unisexes

The Brass model was chosen to estimate unisex experience rates, in the absence of a reference unisex table. Past and future trends derived from the mortality model were analyzed. In the absence of a single regulatory table, the TGH/TGF 05 tables were used as references for the adjustments, conducting a critical analysis on the axes of validation for the experience rates. The table below summarizes the results obtained :

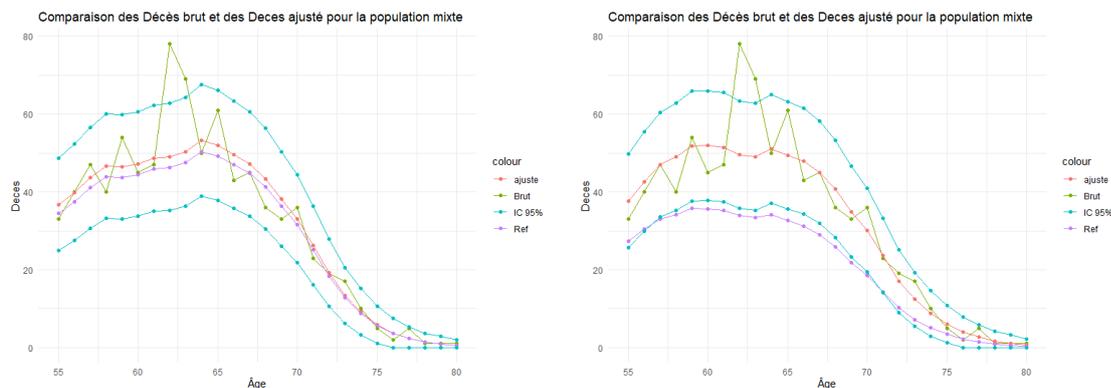
Fonctions d'optimisation	$\Phi_2(a, b)$ avec TGH 05	$\Phi_2(a, b)$ avec TGF 05
χ^2	31.0329%	32.8183%
$\mathcal{R}2$	87.2020%	86.7023%
Incertitude d'échantillonnage moyen	1.0773	1.0563
SMR	1.0406	1.0418
MAPE(%)	19.1736%	20.4555%

TABLE 2 – Critères de qualités pour la population générale

The results validated the observations regarding the dynamics of the general population affiliated with the scheme. The dynamics of deaths tend to align more closely with those of the male population, justifying the use of the TGH 05 table as a reference to

adjust the mortality of the general population, as it leads to better adjustments relative to past trends.

To reinforce the results of the quality criteria, the charts below illustrate the adjustment of experience rates over the observation period according to the reference table used, with 95% point confidence intervals.



(a) Comparaison des décès observés et prédits avec TGH 05 (b) Comparaison des décès observés et prédits avec TGF 05

FIGURE 12 – Comparaison des décès observés et prédits pour la population générale

A critical analysis of the residual generational life expectancies derived from the model led to the selection of the TGH 05 table as the external reference. Additionally, a complementary study was conducted to evaluate the robustness of the model concerning the experience rates of the unisex table. Confidence intervals were constructed using simulations of death rates for the general population affiliated with the scheme, thereby illustrating the stability of the model in the face of variations.

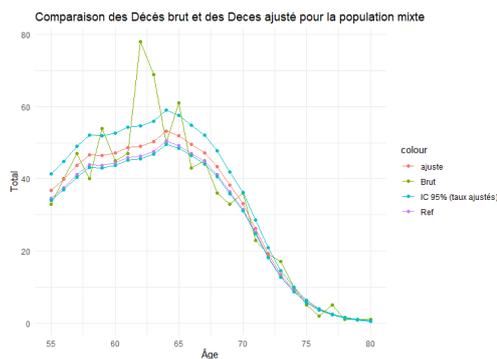


FIGURE 13 – Intervalles de confiances aux titres de fluctuations d'échantillonnages

The confidence intervals thus determined provide a range of possible values for the experience rates that are more relevant than the 95% point confidence intervals.

Sensitivity Analysis on the Best Estimate of Provisions

A comparative analysis was conducted between the current gender-specific tables and those established in this dissertation. The analysis focused on the residual generational life expectancies and the discrepancies between the benefit flows derived from the experience tables provided by Prim'Act and those determined in the dissertation. The results show that the generational life expectancies of the gender-specific tables are very close, as are the projection trends of the benefit flows. However, the benefit flows associated with the unisex table present a significant gap compared to the other tables in comparison to the current tables.

The chart below summarizes the projections of benefit flows according to the current tables (Prim'Act – “gender-specific”), the gender-specific tables derived from this dissertation (EPS – “gender-specific”), and the two unisex tables derived from this dissertation :

The confidence intervals thus determined provide a range of possible values for the experience rates that are more relevant than the 95% point confidence intervals.

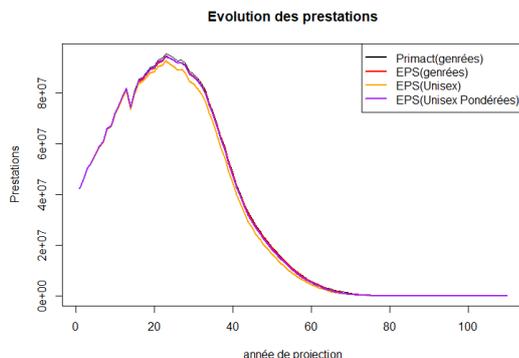


FIGURE 14 – Écoulement des prestations à partir du portefeuille au 31/12/2023

The calculated Best Estimate, using the gender-specific tables derived from the dissertation, is €2,869 million, representing a minor discrepancy of -0.83% compared to the Best Estimate of the Supplementary Retirement Scheme for the year 2023.

The dissertation reveals a gap between the mortality observed in the general population affiliated with the scheme and the mortality of both men and women. Although women represent 55% of the affiliated population, the mortality of the general population affiliated with the scheme tends to converge towards that observed among male affiliates. This unexpected convergence suggests that the use of unisex tables or exclusively female tables may lead to an overestimation of liabilities. Ongoing monitoring of mortality trends is recommended, and an impact study of unisex tables remains to be conducted regarding pricing and the long-term impact on the scheme's balance.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon encadrant académique, M. Franck VERMET, pour son soutien et la qualité de son accompagnement durant les deux années de formation au sein de l'Euria.

Je voudrais exprimer ma gratitude en particulier à Mme Gaëtane DENIS, Directrice Générale Déléguée de la **SGAPS EPS**, et à mon encadrant professionnel, M. Roméo TCHIVONGOU, responsable de la Fonction Actuarielle et du Service Actuariat Inventaire Technique. Ils m'ont donné l'opportunité d'enrichir mon parcours professionnel. En plus des travaux relatifs au mémoire, j'ai pu travailler sur deux missions, l'une liée à la **LCB-FT** et l'autre au développement d'un **outil de provisionnement** des engagements du Régime de Prévoyance Collective de la CGP (Caisse Générale de Prévoyance des Caisses d'Épargne). Cet outil sera utilisé lors du prochain arrêté annuel des comptes sociaux, ce qui constitue un véritable accomplissement personnel.

Mes remerciements s'adressent également à mes collègues de la Direction Technique, dont la disponibilité et la convivialité ont grandement contribué à mon épanouissement au sein de la SGAPS EPS. Je tiens à souligner leurs contributions précieuses en réponse à mes interrogations liées aux travaux et à la rédaction de ce mémoire.

Enfin, je remercie l'ensemble de mes collègues pour le bon accueil qui m'a été réservé, facilitant ainsi mon intégration au sein de l'entreprise. Une mention spéciale à l'équipe des Ressources Humaines qui a joué un rôle clé dans cette intégration.

Merci.

Liste des abreviations

EPS : Ensemble de Protection Sociale

CGP : Caisse Générale de Prévoyance

BPCE Mutuelle : Banque Populaire et Caisse Épargne

PER : Plan d'Épargne Retraite

Ircantec : Institution de Retraite Complémentaire des Agents Non Titulaire de l'Etat et des Collectivités publiques

RAFP : Retraite Additionnelle de la Fonction Publique

L'ERAFP : Établissement de Retraite Additionnelle de la Fonction Publique

RMD : Régime de Maintien de Droit (Régime de retraite en Run off)

RS : Retraite Supplémentaire

Table des matières

Introduction	1
1 Généralités	3
1.1 Contexte	3
1.2 Dispositif de retraite en France	4
1.2.1 Les régimes de base	5
1.2.2 Les régimes complémentaires	5
1.2.3 Les régimes supplémentaires	6
1.3 Le mode de fonctionnement des régimes	6
1.3.1 Régime par répartition	6
1.3.2 Régime en points	7
1.3.3 Régime par capitalisation	8
1.4 Présentation du cadre d'étude	8
1.4.1 Présentation de la branche 26	8
1.4.2 Retraite Supplémentaire cadre EPS	8
1.5 Introduction de la nouvelle réglementation : Gender directive	9
1.5.1 Un peu d'histoire	9
1.5.2 Renforcement de la réglementation : Loi industrie verte	10
1.6 Types de tables de mortalité retenues	11
1.6.1 Contexte des tables utilisées	11
1.7 Les types de tables de mortalité	12
1.7.1 Les tables de mortalité du moment	13
1.7.2 Les tables de mortalité prospectives	13
2 Présentation des modèles de construction de tables de mortalité	15
2.1 Origine et utilisation des modèles de durée	15
2.2 Modèles de construction de tables de mortalité prospectives	15
2.2.1 Modèles à référence interne ou endogène	16
2.2.2 Modèles à référence externe ou exogène	18
2.2.3 Présentation des modèles à référence externe	18
2.3 Sélection de modèles utilisés et testés	22
2.3.1 Choix des modèles paramétriques	23
2.3.2 Risques relatifs au choix des modèles	24
2.3.3 Détermination des taux d'expérience à partir du modèle retenu	24

3	Processus de construction de tables	27
3.1	Approche globale ou usuelle	27
3.1.1	Validation des données	28
3.1.2	Estimation des taux bruts	28
3.1.3	Ajustement ou lissage des taux bruts	31
3.1.4	Extrapolation aux âges extrêmes	34
3.1.5	Tables de mortalité	34
3.2	Approche par la moyenne	39
4	Construction de la table de mortalité unisexe : <i>Approche par la moyenne</i>	41
4.1	Validation des données	41
4.1.1	Présentation des données	41
4.1.2	Analyse des données	43
4.1.3	Base de données finale	45
4.2	Quelques statistiques et période d'observation	47
4.2.1	Répartition des affiliés par année de naissance	47
4.2.2	Choix de la période d'observation (âges et années)	49
4.3	Estimation des taux bruts	50
4.3.1	Estimateur retenu	50
4.3.2	Dynamique du nombre de décès et du niveau d'exposition	50
4.3.3	Dynamique du niveau d'exposition	52
4.3.4	Taux bruts de mortalité	52
4.4	Ajustement ou lissage des taux bruts	53
4.4.1	Estimation des paramètres	53
4.4.2	Mesure de la qualité d'ajustement et sélection de modèle	54
4.5	Extrapolation aux âges extrêmes	61
4.5.1	Extrapolation des taux d'expérience au delà de la plage d'observation	61
4.6	Tables de mortalité différenciées par le sexe	64
4.6.1	Tendances passées	64
4.6.2	Tendances futures	65
4.6.3	Bandes de confiance	66
4.6.4	Bootstrap	67
4.6.5	Intervalles de confiance aux titres de la fluctuation d'échantillonnage	69
4.7	Table de mortalité unisexe	70
5	Construction de table mortalité d'expérience unisexe : <i>Approche globale</i>	71
5.1	Estimation des taux bruts – table unisexe	71
5.1.1	Dynamique du nombre de décès et du niveau d'exposition	71
5.1.2	Taux bruts de mortalité	73
5.2	Ajustement ou lissage des taux bruts – table unisexe	74
5.2.1	Estimation des paramètres	74
5.2.2	Mesure de la qualité d'ajustement	74
5.3	Tables de mortalité – table unisexe	75

5.3.1	Tendances passées	75
5.3.2	Tendances futures	76
5.3.3	Bandes de confiance	79
5.3.4	Bootstrap	80
5.3.5	Intervalles de confiance au titre de la fluctuation d'échantillonnage	81
6	Impact des tables d'expérience sur le provisionnement	83
6.1	Rapprochement des tables de mortalité	83
6.2	Impact sur le provisionnement	84
6.2.1	Incidence des tables genrées sur le Best Estimate	85
6.2.2	Incidence des tables unisexes sur le Best Estimate	88
	Conclusion	93
	A Annexe	95
	Bibliographie	97

Introduction

Le secteur des assurances est soumis à une réglementation en constante évolution, et la loi dite "Industrie verte" en est une illustration récente. Pour rappel, la Loi n° 2023-973 du 23 octobre 2023, appelée **Industrie verte**, introduit plusieurs mesures, dont la suppression de l'utilisation des tables de mortalité différenciées selon le sexe pour la tarification des contrats. Cette loi modifie l'article L111-7 du Code des Assurances, qui permettait depuis 2013 une exception pour les contrats collectifs. Cette généralisation vise à harmoniser la législation nationale avec le cadre européen, en particulier la **Gender Directive** et à étendre les précédentes dispositions, jusqu'ici appliquées aux contrats individuels, aux contrats collectifs.

Les tables de mortalité restent des outils essentiels pour modéliser les phénomènes de durée liés à la mortalité individuelle. Dans le secteur assurantiel, elles sont notamment utilisées, conformément aux réglementations, pour évaluer les engagements des assurés et des assureurs, tant pour la tarification que pour le provisionnement, en normes sociales ou prudentielles.

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de ces évolutions réglementaires tout en répondant aux besoins exprimés par le responsable de la Fonction Actuarielle, à savoir disposer d'un outil indispensable pour gérer le risque de longévité lié aux branches longues, telles que le Régime de Retraite Supplémentaire de la CGP. L'objectif principal est la construction de tables de mortalité prospectives d'expérience, non différenciées par sexe.

À l'avenir, des études comparatives pourront être menées sur la tarification des valeurs d'acquisition ou d'achat des points, en utilisant différentes hypothèses de tables de mortalité : la table réglementaire générationnelle TGF05, les deux tables prospectives d'expérience unisexes élaborées dans ce mémoire, ainsi que la table unique proposée par le Trésor (composée de 60% de la TGH05 et 40% de la TGF05). Cependant, ces études comparatives et leurs impacts sur l'équilibre du régime à long terme n'ont pas pu être approfondis en raison du temps imparti.

Néanmoins, des estimations plus précises des provisions des engagements ont été réalisées en utilisant les tables de mortalité établies, afin de mesurer leur impact sur le provisionnement, hors marge pour risque.

Le mémoire est structuré en six chapitres. Le premier présente le cadre général, l'environnement et le contexte des travaux. Le deuxième chapitre expose les modèles de durée, les différentes approches de construction de tables de mortalité et leurs principes, tels que les modèles de Lee-Carter, Hoem, Log-Poisson, le SMR généralisé ou encore celui de Brass. Le troisième chapitre détaille les étapes clés de la construction d'une table de mortalité. Les deux chapitres suivants sont consacrés à la construction des tables de mortalité prospectives d'expérience unisexes selon deux approches, tout en présentant

les données de l'étude. Enfin, le dernier chapitre évalue la sensibilité des tables sur le provisionnement en normes prudentielles.

Chapitre 1

Généralités

Cette section est consacrée au contexte réglementaire et aux facteurs structurels à l'origine des travaux de ce mémoire. Elle débute par un rappel succinct de quelques dispositifs de retraite en France, avant de mettre en lumière le cadre de l'étude ainsi que les spécificités du Régime de Retraite Supplémentaire de la CGP, membre de la Société de Groupe Assurantiel de Protection Sociale (SGAPS EPS). Cette section présente également les différents types de tables de mortalité ainsi que leurs caractéristiques.

1.1 Contexte

La réglementation définit un cadre strict pour l'utilisation de certaines hypothèses dans la tarification des contrats d'assurance, qu'ils soient individuels ou collectifs. Parmi ces hypothèses, les taux techniques et les tables de mortalité sont des éléments techniques encadrés. Les tables autorisées incluent :

- Les tables réglementaires, homologuées par arrêté du ministre de l'Économie et des Finances, telles que les tables par génération des femmes et des hommes TGF/TGH 05.
- Les tables d'expérience, différenciées ou non par sexe, certifiées par un actuinaire indépendant agréé par une des associations d'actuaire reconnues par l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR), notamment l'Institut des Actuaire. Ces tables sont élaborées à partir des données propres à la population assurée par l'entreprise.

L'objectif est de s'appuyer sur une table de mortalité permettant une tarification prudente. Certains assureurs préfèrent utiliser des tables d'expérience, qui reflètent plus fidèlement le risque de mortalité ou de longévité de leur portefeuille. D'autres choisissent d'appliquer des tables réglementaires, voire une table unique pour tous les assurés, comme la table par génération des femmes de 2005 (TGF 05), pour la tarification.

Cependant, en matière de provisionnement sous les normes prudentielles, l'utilisation de tables réglementaires reste à la discrétion des assureurs, à condition que les hypothèses employées soient pertinentes et justifiables auprès de l'ACPR.

La réglementation européenne encadre également certaines conditions relatives à la tarification, notamment en ce qui concerne la segmentation par sexe. Depuis le 21 décembre 2012, la « Gender Directive » interdit de prendre en compte le sexe des assurés comme facteur de risque pour établir les tarifs des contrats d'assurance. Certains contrats collectifs bénéficiaient toutefois d'une exemption, laquelle a été modifiée par la loi n° 2023-973 du 23 octobre 2023, dite « industrie verte ».

Au-delà du cadre réglementaire qui généralise l'interdiction des tables différenciées par sexe pour la tarification, la gestion des risques demeure au cœur de la gestion technique des risques liés aux branches longues, telles que la retraite. Le risque de longévité est particulièrement crucial dans la branche retraite, tant pour la tarification que pour le provisionnement.

Le risque de longévité est défini comme l'incertitude entourant la durée de vie résiduelle par rapport aux hypothèses des tables de mortalité utilisées. En cas de baisse de la mortalité, les dérives peuvent entraîner une augmentation sensible des prestations à verser, et inversement, une baisse de la mortalité peut réduire les prestations. Cela peut affecter l'équilibre technique d'un régime de retraite.

Les données de l'étude se concentrent sur le portefeuille d'un régime de retraite supplémentaire de la branche 26, géré par la Caisse Générale de Prévoyance des Caisses d'Épargne (CGP) au sein de la SGAPS EPS.

Avant de présenter le cadre et les données retenues pour l'étude, nous rappellerons brièvement les dispositifs de retraite en France et présenterons les différents types de tables de mortalité.

1.2 Dispositif de retraite en France

Il est utile de rappeler qu'un régime de retraite est un dispositif de transfert de richesse qui permet aux individus, sous certaines conditions liées à l'âge entre autres, de pouvoir liquider leurs droits puis de bénéficier de prestations financières.

En France, le système de retraite compte trois types de régimes régis par des dispositifs réglementaires : les régimes de base, les régimes complémentaires et les régimes sur-complémentaires ou supplémentaires. Le schéma suivant illustre parfaitement lesdits régimes ainsi que les dispositifs qui les encadrent :

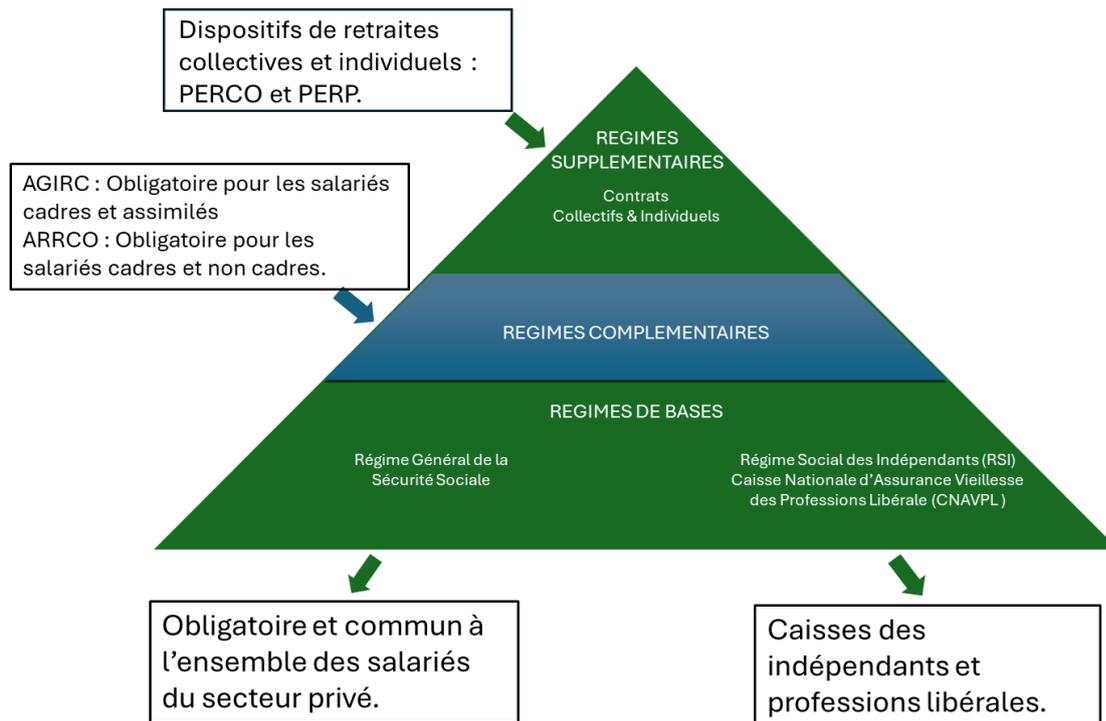


FIGURE 1.1 – Présentation des régimes

1.2.1 Les régimes de base

Les **régimes de base** sont des régimes de retraite obligatoires qui constituent le socle du dispositif de retraite en France c'est l'Assurance Retraite de base. Ce système qui repose sur le principe de solidarité intergénérationnelle est géré par la Sécurité Sociale. Ce système dit par répartition est financé par les cotisations salariales et patronales tout au long de la vie active.

1.2.2 Les régimes complémentaires

La **retraite complémentaire** est un dispositif de retraite destiné aux salariés du privé. Ce système mis en place en supplément de la retraite de base est obligatoire et fonctionne en régime en points.

Les employés du secteur privé sont tenus, en plus des cotisations au régime de retraite de base, de participer aux cotisations du régime de retraite complémentaire. Cette obligation concerne généralement les employés **non-cadres** et **cadres**. En France, les cotisations pour la retraite complémentaire sont obligatoires et prélevées à la source pour tous les salariés du secteur privé. Ce système est géré par l'**Agirc-Arrco**.

Pour la petite histoire, le régime de retraite complémentaire **Agirc-Arrco** est constitué de deux niveaux : **l'Agirc** pour les cadres et **l'Arrco** pour les non-cadres. Ces deux niveaux ont été fusionnés en 2019 pour simplifier le système de gestion et assurer l'équité entre les salariés. Il est important de noter que, contrairement à la retraite de base, la retraite complémentaire permet également des versements libres.

1.2.3 Les régimes supplémentaires

La retraite supplémentaire a pour objet d'assurer des prestations supplémentaires de retraite à ses bénéficiaires. Ces prestations viennent en complément de celles versées par le régime général de **la Sécurité Sociale** et par les régimes complémentaires inter-professionnels **l'Agirc-Arrco**. Ce système de pension peut être mis en place par certaines entreprises ou organismes pour fournir des prestations supplémentaires de retraite à leurs collaborateurs. Ce régime de retraite supplémentaire peut être financé par les entreprises, par les employés ou par les deux. En général, ce régime de retraite n'est pas obligatoire dans les entreprises du secteur privé ou public.

Cependant, certaines dispositions légales ou conventions collectives dans certains secteurs d'activité ou pays peuvent obliger les employeurs à offrir un régime de retraite supplémentaire à leurs salariés. Les institutions les plus souvent appelées à gérer ces régimes sont des entreprises privées, telles que des fonds de pension ou des compagnies d'assurance, pour plusieurs raisons :

- **Capacité d'adaptation** : Les entreprises privées peuvent s'adapter plus rapidement aux besoins spécifiques des employeurs et de leurs salariés.
- **Expertise** : Les sociétés privées possèdent une expertise approfondie dans la gestion des régimes de retraite, leur permettant d'administrer ces fonds de manière efficace.
- **Concurrence** : Employeurs et salariés bénéficient d'un large éventail d'options en matière de régimes de retraite, souvent à des prix compétitifs grâce à la concurrence entre plusieurs entreprises privées, ce qui améliore la qualité des services offerts.

1.3 Le mode de fonctionnement des régimes

1.3.1 Régime par répartition

Un régime par répartition est un système où les cotisations des travailleurs actuels financent directement les pensions des retraités. Ce mode de fonctionnement repose sur un concept de solidarité intergénérationnelle. Les contributions des travailleurs actuels financent en grande partie les pensions de ceux qui ne sont plus en activité, ainsi que les droits futurs que ces mêmes travailleurs auront lorsqu'ils seront à la retraite.

1.3.2 Régime en points

Dans le régime en points, les salariés acquièrent chaque année des points par les cotisations salariales et patronales, ainsi que par des versements libres dans certains cas. Les points accumulés pendant la période d'activité serviront de base pour calculer le niveau de retraite correspondant aux droits acquis sur le régime. Ainsi, le montant des droits acquis durant la période d'activité est équivalent au nombre total de points multiplié par la valeur de service ou valeur du point.

Détermination du nombre de points acquis

Chaque année, les salariés et leurs employeurs versent des cotisations qui donnent lieu à des droits aux salariés sous forme de points. La conversion en points des cotisations s'obtient grâce à la valeur d'achat ou la valeur d'acquisition du point exprimée en euros. Les points acquis sont ainsi inscrits au plan d'épargne retraite du salarié.

Cette valeur d'acquisition est intrinsèquement liée à l'âge du salarié et à l'année d'acquisition du point. La formule suivante montre comment est calculé le nombre de points acquis par un salarié au cours d'une année :

$$n_{ij} = \frac{\tau_j * S_{ij}}{VA_j} \quad (1.1)$$

- τ_j : représente le taux de cotisation en vigueur pendant l'année j.
- S_{ij} : représente le salaire de l'employé soumis à la cotisation.
- VA_j : représente la valeur d'acquisition du point dans l'année.

De même que la formule ci-dessus donne la valeur du nombre de points acquis au cours de chaque année, la formule ci-dessous donne le nombre total de points acquis par l'assuré i durant son activité.

$$N_i = \sum_j n_{ij} \quad (1.2)$$

Détermination de la valeur de service

La valeur de service est un montant exprimé en euros fixé par le Conseil d'administration d'une société du secteur privé ou d'un organisme, permettant de calculer les prestations ou les droits acquis au titre du plan d'épargne retraite.

Cette valeur de service représente la valeur en euros des prestations correspondant à un point de retraite. Pour déterminer les droits acquis par le salarié au moment de la liquidation de ses droits, la valeur de service en vigueur durant l'année de liquidation des droits est multipliée par le nombre de points acquis au titre du plan d'épargne retraite. La formule ci-dessous montre comment sont calculées les prestations perçues par l'assuré lors de la liquidation de ses droits.

$$\text{Prestations perçues} = N_{ij} \times VS_j \quad (1.3)$$

- N_{ij} : Nombre de points acquis par un retraité au cours de l'année j .
- VS_j : Valeur de service en vigueur au cours de l'année j .

1.3.3 Régime par capitalisation

Le régime de retraite par capitalisation est un système de retraite où l'épargnant investit pour sa propre retraite. Il dispose d'un compte de retraite individuel dans lequel il effectue des versements pour constituer une part du capital. Une autre part du capital provient des sommes investies sur les marchés financiers sur des actifs tels que des actions, des obligations, des devises ou encore l'immobilier. Le rendement annuel des placements permet de revaloriser la valeur acquise dans des comptes individuels.

Ainsi, chaque salarié ou épargnant cotisant à un régime de retraite par capitalisation est responsable du niveau de ses prestations de retraite, celles-ci dépendant des rendements des investissements et du montant accumulé dans le compte.

Après avoir succinctement présenté les différents régimes de retraite en France et leur mode de fonctionnement, il convient de présenter le cadre d'étude de ce mémoire ainsi que la réglementation qui motive les travaux réalisés dans ce cadre.

1.4 Présentation du cadre d'étude

Dans le cadre de ce mémoire et afin de définir un périmètre d'étude, il est nécessaire de présenter la **branche 26**, car notre analyse sera restreinte à ce périmètre.

1.4.1 Présentation de la branche 26

La **branche 26** du régime de retraite, également appelée **régime du 4 juin**, en référence au décret fondateur du 4 juin 1964, concerne des opérations de nature collective.

Ces opérations sont régies par les dispositions de l'article L.932-24 du code de la **Sécurité Sociale** lorsqu'elles sont effectuées par des organismes de prévoyance, et par les dispositions de l'article L.222-2 du code de la **mutualité** lorsqu'elles impliquent des mutuelles. Le système de gestion des droits acquis par un individu est basé sur un système de points.

1.4.2 Retraite Supplémentaire cadre EPS

À EPS, le plan d'épargne retraite (PER) est collectif, avec une adhésion obligatoire, et repose sur un système de points. Ce plan d'épargne retraite permet aux actifs d'EPS de bénéficier d'une rente viagère ou d'un versement en capital, payable aux salariés au

moment de la liquidation de leur pension de retraite principale ou à l'âge légal de départ à la retraite.

Les prestations versées aux participants à la date de liquidation des droits sont dues en contrepartie des cotisations effectuées au bénéfice du salarié pendant leur période d'activité. À EPS, ces cotisations sont prélevées à la source et sont à la fois salariales et patronales. Toutefois, le participant peut effectuer des versements libres ou transférer les droits acquis sur un autre plan d'épargne retraite au titre du présent plan.

Ainsi, le présent Plan d'épargne retraite (PER) est constitué de trois compartiments où sont versés les montants correspondant aux cotisations salariales des employés, aux cotisations patronales de l'employeur, aux versements libres du participant ou provenant d'un autre dispositif d'épargne salariale que le présent plan d'épargne.

Ces trois compartiments sont dénommés « C1 », « C2 » et « C3 ».

- **Compartiment C1** : Correspond aux versements libres que peut effectuer le salarié.
- **Compartiment C2** : Correspond à l'épargne salariale.
- **Compartiment C3** : Correspond aux cotisations salariales et patronales prélevées à la source dans le cadre de la retraite supplémentaire.

1.5 Introduction de la nouvelle réglementation : Gender directive

1.5.1 Un peu d'histoire

Dans le but de promouvoir l'égalité des sexes et d'éliminer toute discrimination, de nombreux pays ont adopté des règles interdisant la tarification basée sur le genre dans le secteur de l'assurance.

Aux États-Unis, des États comme la Californie ont adopté des lois interdisant aux assureurs d'établir les tarifs en fonction du genre. Par exemple, la loi californienne sur la non-discrimination basée sur le genre en matière d'assurance (**California Insurance Gender Non-Discrimination Act**) en est une illustration. Les études pour réglementer le secteur de l'assurance aux États-Unis ont débuté dans les années 1970. Cependant, des progrès significatifs ont été observés plus tard. Il faut également noter qu'aux États-Unis, la loi interdisant la tarification basée sur le genre dans le secteur de l'assurance n'a pas été adoptée au niveau national. Le processus aux États-Unis a été plus discontinu que dans d'autres pays, notamment ceux de la zone euro. Cette réglementation a évolué progressivement à travers les différents États, puis au niveau fédéral.

Au niveau fédéral, bien que des lois sur la non-discrimination par le sexe aient été adoptées dans plusieurs domaines, il n'y a pas eu de **loi fédérale spécifique dans le**

domaine de l'assurance interdisant aux assureurs de tarifer selon le sexe. Cependant, on peut constater que cette loi, bien que non spécifique au domaine de l'assurance aux États-Unis, a joué un rôle significatif dans la promotion des pratiques non discriminatoires dans le secteur de l'assurance aux États-Unis. Ainsi, bien que les discussions et les actions pour réglementer le secteur de l'assurance aux États-Unis aient commencé plusieurs années auparavant, des lois plus strictes et spécifiques ont vu le jour et sont entrées en vigueur plus récemment, dans les années 2000.

En Europe, la directive interdisant aux assureurs de baser leur tarification sur le genre dans l'accès aux biens et services, y compris dans le domaine de l'assurance, est entrée en vigueur à partir du 21 décembre 2012. La première loi ou réglementation interdisant la discrimination par le sexe en matière d'assurance a été mise en place au niveau européen avec **l'adoption de la directive sur l'égalité de traitement en matière d'assurance en 2004**. Contrairement aux États-Unis, où il n'était pas spécifiquement interdit d'établir des tarifs selon le sexe, en Europe, cela n'a pas été le cas.

Ainsi, on peut dire que l'Union européenne a été le premier ensemble de pays à introduire une réglementation spécifique interdisant la tarification basée sur le sexe dans le secteur de l'assurance. Cependant, de 2004 au 1er mars 2011, le secteur des assurances bénéficiait d'une dérogation leur permettant de tarifer selon le sexe. Mais, suite aux décisions prises le 1er mars 2011, la Cour de justice de **l'Union Européenne** a décidé de mettre fin à la dérogation dont bénéficiaient les acteurs du secteur de l'assurance pour établir des tarifs basés sur le genre.

De ce fait, en France, les compagnies d'assurance ne peuvent plus fixer les cotisations d'assurance en se basant sur le sexe de l'assuré. Cette réglementation s'applique à toutes sortes de compagnies d'assurance, qu'il s'agisse d'assurances non-vie telles que les assurances automobiles, l'assurance habitation, l'assurance santé ou d'assurances vie telles que les assurances épargne, retraites, etc.

1.5.2 Renforcement de la réglementation : Loi industrie verte

La Loi n°2023-973 du 23 octobre 2023 dit « loi Industrie Verte » élargit l'interdiction de l'utilisation de tables de mortalité différenciées par sexe aux contrats de retraite collectifs, pour plus de conformité à la Directive européenne transposée en loi française et entrée en vigueur depuis 2013. Les contrats collectifs bénéficiaient jusqu'ici d'une certaine exemption. Avec l'entrée en vigueur de la Loi de l'industrie verte en octobre 2024, les décisions s'étendent désormais aux contrats collectifs. Le régime de retraite supplémentaire de la CGP serait désormais soumis à cette réglementation. Pour rappel, le plan d'épargne retraite de la CGP est un plan d'épargne collectif.

Au-delà de remettre en question le principe de segmentation qui prévalait notamment en tarification, cette loi pose une problématique de gestion de risques viagers. L'enjeu est le choix de la table de mortalité appropriée pour déterminer les engagements : faut-il

se restreindre à une table réglementaire féminine type TGF05 ou une table d'expérience féminine certifiée ? Faut-il construire une table unique par une approche par la moyenne à partir des tables de mortalité existante ? Ou simplement construire une table de mortalité d'expérience à faire certifier par une structure agréée par l'ACPR ?

Il convient de noter que la réglementation n'impose pas de méthode spécifique. Parmi les méthodes possibles, pour une approche non différenciée par sexe, une moyenne pondérée des tables existantes est admise avec un juste équilibre dans les proportions femmes/hommes retenues. Les tables réglementaires peuvent être utilisées au même titre que des tables d'expérience certifiées.

Le mémoire analyse les enjeux de cette évolution, notamment sur la tarification et le provisionnement, et la pertinence de construire des tables de mortalité prospectives d'expérience unisexe.

Afin d'atteindre les différents objectifs de ce mémoire, il est essentiel de rappeler les principes des diverses tables de mortalité construites jusqu'à présent, d'analyser les risques associés à la construction de ces tables, et d'expliquer pourquoi, dans notre étude, nous privilégions la construction de tables prospectives plutôt que l'utilisation de tables de moments.

1.6 Types de tables de mortalité retenues

1.6.1 Contexte des tables utilisées

Pour les branches longues en assurance vie comme le régime de retraite supplémentaire, les assurés ou les affiliés transfèrent leur risque viager à un assureur. L'assureur se doit d'évaluer correctement ce risque à l'aide de tables de mortalité appropriées afin de mieux valoriser les engagements futurs. Par ailleurs, plusieurs études montrent que la mortalité évolue par cohorte : à titre d'exemple, un individu né en 1960 et âgé de 25 ans a une probabilité de décès plus forte qu'un individu de 25 ans né en 1999.

Depuis plusieurs années, les assureurs en France utilisent des tables de mortalité prospectives pour la valorisation des engagements des risques viagers. Ces tables présentent l'intérêt de prise en compte de l'effet de cohorte, c'est-à-dire la prise en compte de l'augmentation de l'espérance de vie résiduelle. La norme Solvabilité 2 et les normes IFRS a renforcé les pratiques des assureurs pour réévaluer leurs engagements avec l'utilisation des hypothèses dit best estimate dans l'évaluation des risques. Pour les régimes de retraite, les assureurs peuvent avoir recours à des tables de mortalité prospectives spécifiques à leur portefeuille, il s'agit des tables d'expérience qui doivent faire l'objet d'une approbation officielle par des structures agréées par l'ACPR. Lors de la projection de la mortalité, les assureurs prennent en compte plusieurs paramètres afin d'intégrer les risques auxquels la population affiliée est exposée.

Les assureurs intègrent le caractère systématique des risques auxquels les assurés font face y compris leur caractère mutualisable.

- **Caractère mutualisable** : Il s’agit de tenir compte des risques susceptibles d’affecter un grand nombre de personnes de manière aléatoire et indépendante. Ces risques peuvent être éliminés grâce aux principes de mutualisation.
- **Caractère systématique** : Il s’agit de tenir compte des risques touchent de manière systématique l’ensemble de la population. Ce risque est souvent qualifié de risque marché car il affecte l’ensemble du marché ou une partie spécifique de la population assurée plutôt que des individus spécifiques. Contrairement aux risques spécifiques qui peuvent être éliminés par la diversification, ce type de risque est qualifié de risque non-mutualisable et est potentiellement plus dangereux pour l’assureur ou pour le régime auquel il est associé.

Dans la construction de nos tables de mortalité, nous nous intéresserons uniquement aux risques systématiques. Les risques systématiques mis en jeu dans notre table de mortalité sont répartis en trois classes :

- **Le risque d’estimation** : il est dû à une mauvaise estimation des paramètres. Cela est souvent dû à une mauvaise spécification de la fonction de perte à optimiser pour déterminer les paramètres du modèle, mais aussi souvent dû à de grandes fluctuations des données retenues pour effectuer le calibrage des paramètres.
- **Le risque de modèle** : il provient d’une mauvaise spécification du modèle retenu pour l’évaluation des taux de mortalité.
- **Le risque d’avis d’expert** : il est dû à un mauvais jugement de l’expert lors de la prise en compte de certaines informations externes.

1.7 Les types de tables de mortalité

Dans le cadre de la construction de tables de mortalité, il est important de maîtriser les objets étudiés et les résultats et les informations qui en découlent.

Une table de mortalité est un outil statistique utilisé en actuariat pour modéliser en fonction de l’âge les probabilités de décès au sein d’une population bien définie. Une table de mortalité fournit des informations nécessaires à la détermination des probabilités de survie ou de décès d’un individu.

Le principe général dans la lecture et même dans la construction d’une table de mortalité est qu’au début de notre étude, on se fixe un effectif fictif de 100 000 individus nés à la même date. En partant de ce principe, la table de mortalité donne par âge le nombre

d'individus encore en vie.

Il faut savoir que certaines tables tiennent compte de l'évolution de la mortalité et d'autres pas. Par conséquent, on distingue deux types de tables :

- **Les tables instantanées** : appelées aussi tables du moment.
- **Les tables prospectives** : appelées aussi tables générationnelles.

1.7.1 Les tables de mortalité du moment

Les tables de mortalité du moment permettent de caractériser et d'évaluer la mortalité d'une population pendant une période précise, indépendamment des générations. Elles fournissent les probabilités de décès estimées pour une année donnée à partir des données empiriques observées. Ces tables de mortalité du moment supposent une certaine stabilité de la mortalité future, donc elles ne permettent pas de mesurer l'évolution de la mortalité future. Par exemple, le taux de mortalité d'un individu âgé de 20 ans aujourd'hui est différent du taux de mortalité d'un individu âgé de 20 ans il y a 5 ans. Les taux de mortalité fournis par les tables de mortalité du moment ne tiennent pas compte de l'évolution de la mortalité (effet de cohorte ou de génération). Avec cette table, une même probabilité de décès peut être appliquée à un individu, quelle que soit son année de naissance. On construit généralement ces tables sur une fenêtre de données de 3 années, afin de couvrir les aléas d'une seule année, qui est l'année de vigueur de la table.

1.7.2 Les tables de mortalité prospectives

Les tables de mortalité prospectives intègrent deux dimensions pour le calcul des probabilités de décès, la dimension âge x et la dimension année calendaire t (souvent identifiée comme l'année de naissance). Ces tables permettent d'observer la mortalité en fonction de l'année de naissance et sont construites à partir de générations réelles, ce qui n'est pas le cas des tables de mortalité du moment.

En outre, les tables de mortalité prospectives permettent aux assureurs de pouvoir tarifier leurs produits d'assurance et de provisionner leurs engagements en tenant compte de l'évolution de la mortalité au cours du temps.

Chapitre 2

Présentation des modèles de construction de tables de mortalité

Dans ce chapitre, nous allons exposer les principes et les méthodes adoptés pour la construction des tables de mortalité prospectives et d'expérience. L'objectif est de présenter les modèles qui seront utilisés pour élaborer les tables de mortalité d'expérience.

2.1 Origine et utilisation des modèles de durée

L'analyse mathématique des données sur la durée de vie a débuté au 17ème siècle en Angleterre, avec les premières études sur la mortalité. Ces recherches avaient pour objectif de comprendre les tendances générales de la mortalité, en mesurant le nombre de décès et en analysant l'évolution démographique, dans le but de développer des théories sur la population.

La construction des tables de mortalité requiert une solide maîtrise des mathématiques et des concepts statistiques. Parmi ces notions, celles relatives à la durée de vie et à l'espérance de vie occupent une place centrale. Ces concepts sont généralement abordés dans les cours portant sur les modèles de durée.

Aujourd'hui, les modèles de durée en actuariat sont appliqués dans divers domaines, tels que la modélisation de la durée de vie humaine, les arrêts de travail, la durée d'incapacité et d'invalidité, ou encore le temps avant une ruine financière. Bien que cette liste ne soit pas exhaustive, elle illustre quelques champs d'application courants.

2.2 Modèles de construction de tables de mortalité prospectives

Pour mieux appréhender les tendances passées et prédire les tendances futures liées aux taux de décès, il existe différents modèles permettant d'estimer le niveau de mortalité

d'une population donnée. Ces modèles sont généralement regroupés en deux catégories :

- Les modèles à référence interne ou endogène
- Les modèles à référence externe ou exogène

2.2.1 Modèles à référence interne ou endogène

Les modèles à référence interne ou endogène reposent sur les observations propres à un portefeuille ou à une population donnée. Cette méthode nécessite la détermination des taux bruts de mortalité qui reflètent les taux observés dans la population étudiée. Un modèle paramétrique approprié permet d'ajuster ces taux bruts de mortalité. Ces modèles utilisent également des phénomènes aléatoires, par application des fonctions de hasard, afin de mieux appréhender les variations liées au portefeuille ou à la population étudiée.

Les modèles à référence interne ou endogène couramment utilisés, on retrouve les modèles de :

- Lee-Carter
- Gompertz-Makeham
- Cairns-Blake-Dowd
- Heligman-Pollard

Il convient de noter que le modèle de Lee-Carter et ses variantes sont parmi les plus populaires lorsqu'il s'agit de modéliser les taux bruts de mortalité sans recours aux tables de référence pour l'ajustement. Ci-après la présentation de ce modèle :

Le modèle de Lee-Carter

Le modèle de Lee-Carter peut être défini comme suit :

$$\log(\mu_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{x,t}$$

où :

- $\mu_{x,t}$ est le taux de mortalité à l'âge x et à l'année calendaire t ,
- α_x est une fonction de l'âge, correspondant à la valeur moyenne de mortalité pour chaque âge, en supposant que $\sum_t \kappa_t = 0$,
- β_x est une fonction de l'âge, correspondant à la réponse relative de la mortalité à l'âge x aux variations dans le temps, ainsi qu'à la sensibilité du taux instantané de décès par rapport à une variation de κ_t , car $\frac{\partial}{\partial t} \ln(\mu_{x,t}) = \beta_x \frac{\partial \kappa_t}{\partial t}$,
- κ_t est l'indice de mortalité au cours du temps, capturant les variations temporelles de la mortalité,
- $\epsilon_{x,t}$ est le terme d'erreur.

Ce modèle de Lee-Carter est un modèle paramétrique introduit par Ronald Lee et Lawrence Carter en 1992. Ce modèle propose une hypothèse sur l'évolution de la mortalité en projetant les taux de mortalité futurs à partir d'une extrapolation des tendances de mortalité passées. Pour estimer le taux de mortalité, le modèle de Lee-Carter décompose la mortalité en une structure à deux dimensions : **la dimension de l'âge** et **la dimension de l'année calendaire**. Dans le cadre du modèle de Lee-Carter, la **notion de cohorte** est prise en compte, car des études statistiques ont montré que l'année de naissance d'un individu a une influence significative sur sa mortalité.

Les paramètres α_x , β_x , et κ_t sont estimés à partir des données historiques de mortalité par une méthode des moindres carrés.

Le modèle de Lee-Carter est très populaire en actuariat pour analyser et projeter la mortalité future. Cette popularité est due à plusieurs avantages :

Avantages :

- **Flexibilité du modèle :** Le modèle de Lee-Carter est très utile pour capter les variations temporelles de la mortalité, notamment par l'estimation de κ_t .
- **Simplicité du modèle :** Le modèle de Lee-Carter est facile à comprendre et à implémenter malgré sa nature paramétrique.

Cependant, le modèle de Lee-Carter, bien qu'efficace dans la projection de la mortalité future, possède des limites non négligeables :

Limites et contraintes :

- **Hypothèse forte :** Il suppose une forme log-linéaire de la mortalité future, ce qui peut ne pas toujours être vérifié.
- **Instabilité des paramètres :** Les paramètres ont tendance à être très erratiques pour des sous-populations ou lors de changements de fenêtres ou périodes d'ajustement des données.
- **Volume de données historiques :** Le modèle nécessite des données historiques sur une longue période, idéalement plusieurs décennies, pour capter les tendances temporelles significatives. Il faut que les données historiques couvrent une **large gamme d'âges** et incluent **les variations** et **les tendances** dans l'évolution de la mortalité, prenant en compte les changements dus à des événements historiques (ex. : Covid, grippe espagnole), des avancées médicales ou des changements socio-économiques.

Le modèle de Lee-Carter : Ce modèle est généralement appliqué sur des périodes d'observation très longues, idéalement couvrant plusieurs décennies. Une période d'au moins 30 ans est souvent recommandée pour capturer les tendances à long terme et obtenir des estimations plus robustes. De plus, la stabilité des paramètres peut être problématique pour une population restreinte, surtout avec des périodes d'ajustement courtes. Par conséquent, le modèle de Lee-Carter ne semble pas adapté à la construction de nos tables d'expérience en raison de la durée limitée de la période d'observation.

2.2.2 Modèles à référence externe ou exogène

Les modèles à référence externe ou exogène dépendent des données ainsi que des tables de mortalité de sources externes d'une taille conséquente (tables de référence). Pour ces types de modèles, l'ajustement des taux de mortalité se fait en utilisant une méthode de lissage pour adapter les taux de mortalité d'une population de référence afin de les faire correspondre à ceux d'une population cible. De plus, pour ces modèles, les taux bruts de mortalité servent de base pour l'ajustement.

Ces modèles sont privilégiés pour construire des tables de mortalité à partir d'un échantillon de taille peu significative. Les modèles à référence externe ou exogène couramment utilisés, on retrouve les modèles de :

- **Le modèle Hoem**
- **Le modèle Lineaire ou SMR généralisés**
- **Le modèle Log-Poisson**
- **Le modèle de Brass**

Compte tenu de la taille de l'échantillon et du peu de profondeur historique en données, les modèles testés et utilisés sont ceux de cette catégorie (i.e les modèles à référence externe ou exogène).

2.2.3 Présentation des modèles à référence externe

Cette est dédiée à la présentation des modèles à référence externe susmentionnés.

Le modèle de Hoem

Le modèle de Hoem peut être décrit comme suit :

$$\lambda_{ij}(t|X) = \lambda_{0,ij}(t) \exp(\beta_{ij} \cdot X)$$

où :

- $\lambda_{ij}(t|X)$ est le taux de transition instantané de l'état i à l'état j à l'instant t pour un individu ayant les variables explicatives X .
- $\lambda_{0,ij}(t)$ est la fonction de risque de base pour la transition de l'état i à l'état j .
- β_{ij} est un vecteur de coefficients pour la transition de l'état i à l'état j .

Le modèle de Hoem est très utilisé en actuariat et dans le domaine de la démographie. Ce modèle permet d'analyser plus efficacement **les phénomènes de transitions** tels que les changements d'états ou de statuts. Par exemple, il permet d'analyser les transitions entre les états de mariage et de divorce, de salarié à retraité, ou encore d'emploi à chômage. Développé par le démographe **suédois Jan Hoem**, ce modèle permet également de modéliser les processus de vie et les événements pouvant se produire au cours du temps.

Cependant, le modèle de Hoem présente quelques avantages et inconvénients.

Avantages :

- **Flexibilité :** Le modèle permet de modéliser des transitions entre plusieurs états (multi-états).
- **Prise en compte des variables explicatives :** Il intègre des variables explicatives, permettant une modélisation précise des taux de transition.
- **Modélisation des taux de transition :** Le modèle de Hoem modélise directement les taux de transition.

Limites et contraintes :

- **Exigence en données :** Il requiert des données de bonne qualité.
- **Hypothèses fortes :** Le modèle repose sur certaines hypothèses fortes pouvant biaiser les résultats si celles-ci ne sont pas vérifiées.
- **Interprétation des paramètres :** L'interprétation des paramètres peut être complexe.
- **Sensibilité aux choix de modèle :** Les résultats peuvent varier selon les choix de la fonction de base et des variables explicatives utilisées dans le modèle.
- **Variabilité des données :** Les données peuvent présenter une grande hétérogénéité entre les individus (par exemple, d'importantes différences dans les taux de transition en fonction du sexe ou d'autres facteurs significatifs). Pour capter cette variabilité, il est nécessaire d'avoir une importante base de données.

Modèle Linéaire ou SMR généralisé

Ce modèle de mortalité repose sur l'hypothèse forte d'une relation linéaire entre les taux de mortalité observés $q_{x,t}$ et les taux de mortalité de la population de référence $q_{x,t}^{\text{Ref}}$. Cette relation est formulée comme suit :

$$q_{x,t} = b + a \cdot q_{x,t}^{\text{Ref}} + \epsilon_{x,t}$$

où :

- $q_{x,t}$ est le taux de mortalité de la population assurée à l'âge x et pendant l'année d'observation t .
- $q_{x,t}^{\text{Ref}}$ est le taux de mortalité de la population de référence à l'âge x et pendant l'année d'observation t .
- a et b sont des paramètres à estimer.

Ce modèle n'est pas couramment utilisé en actuariat pour la construction de tables de mortalité d'expérience. Néanmoins, comme tout autre modèle, il présente des avantages mais aussi des inconvénients.

Avantages :

- **Simplicité** : Le modèle linéaire est facile à comprendre et à appliquer.
- **Adaptabilité** : Il peut être ajusté pour refléter les particularités d'une population assurée en se basant sur une table de référence fiable.

Limites et contraintes :

- **Hypothèse de linéarité** : Le modèle repose sur une hypothèse forte de linéarité entre les taux de mortalité de la population assurée et ceux de la table de référence, ce qui peut ne pas toujours être approprié.
- **Dépendance à la table de référence** : La qualité des prédictions dépend fortement de la pertinence de la table de référence utilisée, en particulier si les données empiriques sont insuffisantes.

Le modèle Log-poisson

Le modèle log-Poisson est une méthode couramment utilisée en actuariat pour la construction de tables de mortalité à partir **d'un effectif très modeste**. Ce modèle repose sur l'hypothèse que le nombre de décès suit une loi de Poisson, $D_{x,t} \sim \mathcal{P}(R_{x,t} \cdot q_{x,t})$ (où $R_{x,t}$ représente l'exposition à l'âge x et pendant l'année d'observation t), et que les taux de mortalité d'expérience peuvent être exprimés comme une fonction exponentielle des taux de mortalité d'une table de référence.

Ainsi, le modèle log-Poisson permet d'établir une relation linéaire entre les logarithmes des taux de mortalité observés $\log(q_{x,t})$ et ceux de la population de référence $\log(q_{x,t}^{\text{Ref}})$. Cette relation est généralement formulée comme suit :

$$\log(q_{x,t}) = b + a \cdot \log(q_{x,t}^{\text{Ref}}) + \epsilon_{x,t}$$

Ce modèle est largement utilisé en actuariat pour la construction de tables de mortalité d'expérience. Cependant, comme tout modèle, il présente des avantages et des inconvénients.

Avantages :

- **Flexibilité :** Le modèle permet d'ajuster les taux de mortalité de la population assurée en tenant compte de la table de référence, tout en capturant les déviations spécifiques de la population assurée.
- **Adaptabilité :** Ce modèle est particulièrement adapté lorsque le nombre de décès observés est faible. En effet, la distribution de Poisson convient bien aux situations où les décès observés sont peu nombreux, ce qui est souvent le cas dans certaines populations assurées.

Limites et contraintes :

- **Hypothèse de linéarité dans le log :** Le modèle repose sur l'hypothèse d'une relation linéaire entre les logarithmes des taux de mortalité, ce qui peut ne pas toujours correspondre à la réalité.
- **Complexité :** Le modèle est plus complexe à comprendre et à interpréter que les modèles linéaires simples.

Modèle de Brass

Le modèle de Brass est un modèle paramétrique permettant de calculer les niveaux de mortalité d'une population à partir **d'un effectif très modeste**. Ce modèle construit les taux de mortalité à partir d'une table de référence. Il est similaire au modèle semi-paramétrique de Cox, qui projette également son niveau de mortalité à partir d'un niveau de mortalité de base. Ce modèle repose sur l'hypothèse forte qu'il existe une relation linéaire entre les logits des taux de référence et les logits des taux d'expérience.

Dans le cadre de notre étude, le modèle de Brass que nous considérons s'écrit comme suit :

$$\ln\left(\frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}}\right) = a \cdot \ln\left(\frac{q_{x,t}^{\text{ref}}}{1 - q_{x,t}^{\text{ref}}}\right) + b + \epsilon_{x,t}$$

où :

- $q_{x,t}^{ref}$ représente le taux de mortalité d'une population de référence,
- $q_{x,t}$ représente les taux bruts de mortalité observés,
- $\hat{q}_{x,t} = q_{x,t}(\hat{a}, \hat{b})$ représente le taux de décès d'expérience déterminé après l'ajustement du modèle,
- x représente l'âge,
- t représente l'année calendaire.

Cependant, comme tout modèle, le modèle de Brass présente à la fois des avantages et des inconvénients. Ces avantages et limites sont résumés ci-dessous :

Avantages :

- **Adapté aux données insuffisantes** : Permet d'estimer les taux de mortalité dans des contextes où les données directes sont insuffisantes.
- **Flexibilité** : Flexible et adaptable à divers contextes démographiques.

Limites et contraintes :

- **Hypothèses fortes** : Les estimations reposent sur des hypothèses et des modèles qui ne reflètent pas toujours parfaitement la réalité.
- **Qualité des estimations** : Moins précis que les données directes de mortalité lorsqu'elles sont disponibles.

Il convient de noter que **les modèles linéaires ou SMR généralisés, le modèle Log-Poisson et le modèle de Brass** permettent d'établir une relation entre deux populations à partir d'un nombre restreint de paramètres (seulement deux : a et b). Ces modèles répercutent ainsi la tendance de l'évolution de la mortalité de la population de référence sur la population étudiée ou assurée. Cette approche, qui consiste à **calibrer** ou à **transposer** la mortalité d'une table de référence sur une table d'expérience ou une table que l'on souhaite construire, est pertinente car les tables de référence choisies sont généralement des tables réglementaires qui reflètent les caractéristiques de notre population assurée. Ces modèles sont d'autant plus adaptés que notre population d'assurés constitue une **sous-population** ou fait partie de la génération qui a servi de base pour l'ajustement des tables réglementaires. De plus, ils tiennent compte des particularités spécifiques de notre population assurée, car ils sont calibrés sur les taux bruts de mortalité observés, $q_{x,t}$.

2.3 Sélection de modèles utilisés et testés

Cette partie est réservée à l'analyse de chaque modèle qui a conduit à retenir trois des quatre modèles pour l'ajustement des taux bruts obtenus ainsi que des projections

des taux de mortalité future.

2.3.1 Choix des modèles paramétriques

Le choix des modèles dépend également de la taille du portefeuille ainsi que de la profondeur historique. Comme susmentionné, un modèle à référence interne ou endogène sera privilégié lorsque les données disponibles et la profondeur historique remonte à au moins trente années.

Le périmètre de l'étude est un régime de retraite supplémentaire relativement récent. Le régime ayant été créé début janvier 2000, on dispose d'un jeu de données limité pour observer les décès parmi la population des rentiers. Les données disponibles couvrent environ 8 années d'observation, ce qui est insuffisant pour observer les décès à certains âges. Le chapitre 4 revient en détail sur l'analyse de la base des données retenue.

Lors de l'analyse des modèles, en tenant compte du périmètre de l'étude et des données disponibles, trois modèles ont été sélectionnés pour poursuivre les travaux, tandis qu'un autre a été écarté :

Le modèle linéaire (retenu) : Ce modèle est facile à appliquer et peut être utilisé pour la construction de tables de mortalité, même en présence de données insuffisantes. Bien que le modèle présente des limites en raison de l'hypothèse de linéarité directe entre les taux observés $q_{x,t}$ et les taux de référence $q_{x,t}^{\text{Ref}}$, ainsi que de sa dépendance à la table de référence, il reste un outil précieux pour évaluer le niveau de mortalité de la population cible. Par conséquent, ce modèle a été retenu initialement pour l'évaluation des niveaux de mortalité de la population assurée.

Le modèle log-Poisson (retenu) : Ce modèle permet d'estimer le niveau de mortalité de la population assurée en tenant compte de la table de référence, tout en capturant les déviations spécifiques à cette population. Bien que le modèle présente des limites en raison de l'hypothèse de linéarité entre les logarithmes des taux observés $\log(q_{x,t})$ et les logarithmes des taux de référence $\log(q_{x,t}^{\text{Ref}})$, ainsi que de sa complexité d'interprétation, il reste pertinent pour l'évaluation du niveau de mortalité d'une population assurée. Par conséquent, ce modèle a également été retenu dans un premier temps pour l'évaluation des niveaux de mortalité de la population assurée.

Le modèle de Brass (retenu) : Ce modèle est flexible et couramment utilisé pour l'évaluation du niveau de mortalité d'une population assurée. Il est particulièrement adapté aux données avec une faible profondeur historique. Bien que le modèle présente des limites en raison de l'hypothèse de relation linéaire entre les logits des taux observés $\text{logit}(q_{x,t})$ et les logits des taux de référence $\text{logit}(q_{x,t}^{\text{Ref}})$, il reste un modèle de référence pour l'évaluation du niveau de mortalité d'une population assurée avec une faible profondeur historique. Par conséquent, ce modèle a également été retenu dans un premier

temps pour l'évaluation des niveaux de mortalité de la population assurée.

Le modèle de Hoem (non retenu) : Nos données empiriques montrent une grande hétérogénéité entre les individus selon le sexe lors de l'évaluation des décès observés. Pour capturer cette variabilité, le modèle de Hoem nécessiterait une base de données plus importante. Ainsi, ce modèle n'a pas été retenu pour la détermination des tables d'expérience. Toutefois, les taux bruts de mortalité issus de l'estimateur de Hoem seront utilisés pour l'évaluation des taux bruts de mortalité.

En synthèse, les modèles paramétriques retenus pour la construction des tables d'expérience sont **le modèle linéaire**, **le modèle log- Poisson** et **le modèle de Brass**.

2.3.2 Risques relatifs au choix des modèles

Pour cette étude, le risque systématique lié à l'avis d'expert sera peu pris en compte. Ce risque est associé au choix des données ou des informations externes, telles que l'utilisation d'une table de référence réglementaire. Ce choix est justifié par le fait que la construction de notre table de mortalité se base sur un groupe restreint d'assurés.

La table de référence réglementaire sélectionnée est la table réglementaire française (TGF/TGH 05), qui décrit la survie des rentiers de portefeuilles d'assurance. Comme notre population assurée appartient à la génération ayant servi à modéliser cette table ou du moins possède des caractéristiques similaires, nous utilisons les tables réglementaires TGH/TGF 05 comme référence externe pour la construction des tables de mortalité prospectives d'expérience.

En résumé, pour la construction des tables prospectives de mortalité d'expérience relatives à la population étudiée, nous nous concentrerons principalement sur le risque d'estimation des paramètres et, dans une moindre mesure, sur le risque d'avis d'expert. Ces deux risques sont cruciaux pour les régimes de retraite, et leurs conséquences peuvent être significatives pour l'évaluation de certains risques.

2.3.3 Détermination des taux d'expérience à partir du modèle retenu

Cette section explique comment les taux d'expérience ont été déterminés en s'appuyant sur un modèle de construction de table de mortalité.

Dans ce mémoire, pour la construction des tables de mortalité d'expérience, des modèles basés sur des références externes ou endogènes ont été utilisés. Les tables de mortalité prospectives d'expérience s'appuient sur des sources externes, à savoir des tables de mortalité réglementaires. Les tables par génération TGH/TGF 05, qui sont des tables prospectives réglementaires, ont été choisies comme références pour cette étude.

Les différents modèles de calibration utilisés sont les suivants :

— **Modèle linéaire** : Pour le modèle linéaire, la formulation calibrée est la suivante :

$$q_{x,t} = b + a \cdot q_{x,t}^{\text{Ref}} + \epsilon_{x,t} \quad (2.1)$$

Ce modèle ne nécessite pas d'inversion pour déterminer les taux d'expérience ; il suffit d'appliquer la même équation en remplaçant les valeurs de a et b par leurs valeurs ajustées. Ainsi, les taux ajustés par la méthode linéaire sont décrits comme suit :

$$\hat{q}_{x,t} = \hat{q}_{x,t}(\hat{a}, \hat{b}) = \hat{b} + \hat{a} \cdot q_{x,t}^{\text{Ref}} \quad (2.2)$$

— **Modèle log-poisson** : Pour le modèle log-poisson, la formulation calibrée est la suivante :

$$\log(q_{x,t}) = b + a \cdot \log(q_{x,t}^{\text{Ref}}) + \epsilon_{x,t} \quad (2.3)$$

Ce modèle, à l'instar du modèle linéaire, nécessite une inversion pour la détermination des taux d'expérience. Une fois l'inversion effectuée, il suffit d'appliquer les valeurs estimées de a et b . Ainsi, la formule des taux d'expérience dans le cadre du modèle log-Poisson s'écrit comme suit :

$$\hat{q}_{x,t} = \hat{q}_{x,t}(\hat{a}, \hat{b}) = \exp(\hat{b} + \hat{a} \cdot \log(q_{x,t}^{\text{Ref}})) \quad (2.4)$$

— **Modèle de Brass** : Dans le cadre du modèle de Brass, la formulation calibrée est la suivante :

$$\ln\left(\frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}}\right) = a \cdot \ln\left(\frac{q_{x,t}^{\text{Ref}}}{1 - q_{x,t}^{\text{Ref}}}\right) + b + \epsilon_{x,t} \quad (2.5)$$

En inversant l'équation ci-dessus, les taux d'expérience ajustés sont exprimés comme suit :

$$\hat{q}_{x,t} = \hat{q}_{x,t}(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{\exp(y_{x,t})}{1 + \exp(y_{x,t})} \quad (2.6)$$

$$\text{où } y_{x,t} = a \cdot \ln\left(\frac{q_{x,t}^{\text{Ref}}}{1 - q_{x,t}^{\text{Ref}}}\right) + b.$$

Concernant l'ensemble des modèles retenus, les paramètres $\theta = (a, b)$ sont déterminés à l'aide d'une fonction de perte que nous définirons dans les sections suivantes.

Chapitre 3

Processus de construction de tables

Dans ce chapitre, nous allons présenter essentiellement les deux approches utilisées pour établir les deux tables de mortalité prospectives d'expérience unisexes construites dans ce mémoire. La première approche est nommée **approche globale ou usuelle**, et la seconde approche sera nommée **approche par la moyenne**.

- **Approche globale** : Cette approche usuelle consiste à évaluer les taux bruts de mortalité, puis à les ajuster à l'aide d'un modèle de construction de tables de mortalité. Pour l'obtention d'une des deux tables unisexes, aucune segmentation notamment par le sexe n'est effectuée.
- **Approche par la moyenne** : Cette approche consiste à obtenir une table unique en appliquant une moyenne pondérée entre deux tables différenciées par le sexe. Le sex-ratio du portefeuille est utilisé pour établir la table unique ou la table unisexe.

3.1 Approche globale ou usuelle

Il s'agit d'une approche usuelle de construction de tables d'expérience répartie en cinq étapes. Dans cette section, nous allons présenter et décrire chacune des cinq étapes et expliquer les principes associés. Les différentes étapes de l'approche usuelle sont les suivantes :

- Étape 1 : **Validation des données**
- Étape 2 : **Estimation des taux bruts**
- Étape 3 : **Ajustement ou lissage des taux bruts**
- Étape 4 : **Extrapolation aux âges extrêmes**

— Étape 5 : **Tables de mortalité**

3.1.1 Validation des données

Dans cette étape, trois axes principaux sont abordés. Dans un premier temps, il s'agit de **présenter la base de données**. Ensuite, une **analyse des données** est effectuée, comprenant une vérification de la cohérence et, si nécessaire, des retraitements ou suppressions de données. Enfin, il s'agit de construire **la base de données finale**, qui servira à l'évaluation des taux bruts de mortalité. Cette étape est cruciale, car elle garantit la qualité des données utilisées.

3.1.2 Estimation des taux bruts

Dans cette étape, il s'agit d'évaluer les taux bruts de mortalité. Parmi les estimateurs traditionnels, deux estimateurs ont fait l'objet d'une analyse mais un seul a été retenu, celui qui conduit aux ajustements les plus pertinents.

Le premier estimateur utilisé pour évaluer les taux bruts de mortalité est l'estimateur de **Kaplan-Meier**, qui se décrit comme suit :

$$\hat{S}(s|x, t) = \prod_{s_{x,t} \leq s} \left(1 - \frac{D_{x,t}}{N_{x,t}} \right)$$

Où :

- $s_{x,t}$ représente les temps d'observation spécifiques pour un groupe donné défini par l'âge x et l'année t .
- $D_{x,t}$ est le nombre de décès par âge et année d'observation.
- $N_{x,t}$ est le nombre de personnes exposées par âge et année d'observation.

Le second estimateur utilisé pour évaluer les taux bruts de mortalité est l'estimateur de **Hoem** qui se décrit comme suit :

$$q_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{R_{x,t}}$$

- $D_{x,t}$ est le nombre de décès par âge et année d'observation.
- $R_{x,t}$ est le nombre de personnes exposées par âge et année d'observation.

Pour calculer les taux bruts, il faut évaluer le nombre de décès par année calendaire et entre deux âges. En effet, le nombre de décès doit être ventilé sur deux dimensions (âge x année calendaire), l'âge sur l'axe des ordonnées et l'année calendaire sur l'axe des abscisses. Ce critère de ventilation est également appliqué pour le nombre d'expositions. $R_{x,t}$ et le nombre de personnes exposées $N_{x,t}$.

Le nombre de décès au cours d'une année calendaire t et pour un âge x entier donné est égal au nombre de décès observés et survenus pour les individus dont la partie entière de leur âge au décès est égale à x et dont l'année de décès est l'année t .

Ainsi, le nombre total de décès à l'âge entier x pour l'année calendaire t s'évalue comme suit :

$$D_{x,t} = \sum_{i=1}^n D_{x,t}^{(i)} \quad (3.1)$$

où :

- $D_{x,t}^{(i)}$: est égale à 1 si l'individu i est décès ,
- n : représente le nombre d'individus observés,
- t : représente l'année calendaire donnée.

Il est important de noter que le calcul du nombre de personnes exposées $N_{x,t}$ suit la même méthode que celui des décès présenté précédemment.

Le nombre d'expositions au cours d'une année calendaire t et pour un âge x entier donné est égal au nombre total d'individus exposés dont la partie entière de leur âge pendant la période d'observation est égale à x et dont l'année d'exposition correspond à l'année calendaire t .

Ainsi, le nombre total de d'expositions à l'âge entier x pour l'année calendaire t s'évalue comme suit :

$$R_{x,t} = \sum_{i=1}^n R_{x,t}^{(i)} \quad (3.2)$$

où :

- $R_{x,t}^{(i)}$: est égale à la contribution d'un individu à l'exposition pour l'âge entier x et pour l'année calendaire t ,
- n : représente le nombre d'individus observés,
- t : représente l'année calendaire donnée.

Considérant que l'individu i est observé pendant l'année calendaire t et qu'il passe de l'âge x à $x + 1$ au cours de cette période, sa contribution à l'exposition du régime pour

chaque âge est évaluée de la manière suivante :

À l'âge x pendant l'année t , la contribution de l'individu i à l'exposition du régime s'exprime ainsi :

$$R_{x,t}^{(i)} = ([X_{i,t}^d] + 1) - X_{i,t}^d = (x + 1) - X_{i,t}^d \quad (3.3)$$

où : $X_{i,t}^d$ représente l'âge en années de l'individu i au début de l'année calendaire t et on a $[X_{i,t}] = x$.

Concernant l'âge $x + 1$ au cours de cette même année calendaire t , la contribution de l'individu i à l'exposition du régime est donnée par :

$$R_{x+1,t}^{(i)} = \min(\mathbf{Age\ Fin\ Obs}, X_{i,t}^f) - (x + 1) \quad (3.4)$$

où :

- $X_{i,t}^f$ représente l'âge en années de l'individu i en fin de l'année calendaire t ,
- **Age Fin Obs** : représente l'âge en années d'un individu à la fin d'observation.

D'autre part, en considérant que l'individu i observé pendant l'année calendaire t ne change pas d'âge pendant cette année, la contribution de l'individu à l'exposition du régime s'évalue à chaque âge comme suit :

Dans un premier cas, concernant l'âge x et pendant l'année calendaire t , la contribution de l'individu i à l'exposition du régime est égale à :

$$R_{x,t}^{(i)} = \min(\mathbf{Age\ Fin\ Obs}, X_{i,t}^f) - X_{i,t}^d \quad (3.5)$$

Dans un second et dernier cas, concernant l'âge $x+1$ et aussi pendant l'année calendaire t , l'évaluation de la contribution de l'individu i est égale à :

$$R_{x+1,t}^{(i)} = 0 \quad (3.6)$$

Cette équation, qui donne une exposition nulle, montre que l'on n'enregistre pas une exposition pour un autre âge entier que x pour l'année calendaire t pour cet individu i . En effet, comme l'individu i n'a pas changé d'âge pendant l'année calendaire t , toute sa contribution à l'exposition dans le régime pour l'année calendaire t a déjà été évaluée dans l'équation 3.5.

De plus, cette méthode d'évaluation de la contribution à l'exposition d'un individu i pendant l'année calendaire t n'est pas applicable pour la dernière année d'observation de cet individu. En effet, pour calculer la contribution à l'exposition d'un individu au cours de sa dernière année, deux cas de figure doivent être considérés.

Dans le premier cas, si l'individu i change d'âge pendant sa dernière année calendaire t , c'est-à-dire qu'il passe de l'âge x à $x + 1$, la contribution de cet individu à l'exposition du régime pour cette année calendaire t est évaluée comme suit :

$$R_{x,t}^{(i)} = ([X_{i,t}^d] + 1) - X_{i,t}^d = (x + 1) - X_{i,t}^d \quad (3.7)$$

et d'autre part pour l'âge $x+1$ et concernant aussi la même année calendaire t , la contribution à l'exposition de l'individu i est égale à :

$$R_{x+1,t}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu } i \text{ est décédé durant } t \\ \min(\mathbf{Age Fin Obs}, X_{i,t}^f) - (x + 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans un deuxième cas, en considérant que l'individu i , pendant sa dernière année calendaire t , ne change pas d'âge, c'est-à-dire ne passe pas de l'âge x à $x+1$, la contribution à l'exposition du régime de l'individu i pendant cette dernière année calendaire t s'évalue comme suit :

$$R_{x,t}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu } i \text{ est décédé durant } t \\ \min(\mathbf{Age Fin Obs}, X_{i,t}^f) - X_{i,t}^d & \text{sinon} \end{cases}$$

et d'autre part pour l'âge $x+1$ et concernant aussi la même année calendaire t , la contribution à l'exposition de l'individu i est égale à :

$$R_{x+1,t}^{(i)} = 0 \quad (3.8)$$

L'exposition à l'âge $x+1$ est réduite à zéro pour ne pas enregistrer d'exposition à cet âge car l'individu n'a pas effectué de changement d'âge pour cette année calendaire. De ce fait, toute la contribution à l'exposition dans le régime pour l'année calendaire t a déjà été évaluée dans le système 3.1.2.

Ces étapes sont cruciales, car les taux bruts déterminés et sélectionnés serviront de base pour les ajustements nécessaires à la construction des tables d'expérience.

3.1.3 Ajustement ou lissage des taux bruts

Dans cette étape, il s'agit d'ajuster les taux bruts de mortalité retenus en utilisant les modèles de tables de mortalité que nous avons sélectionnés au chapitre précédent : le **modèle linéaire**, le **modèle log-Poisson**, et le **modèle de Brass**.

En plus de l'ajustement, il est nécessaire de prendre en compte la fonction d'optimisation des paramètres le mieux adaptés à notre jeu de données. Après avoir ajusté les données avec les trois modèles sélectionnés, il sera également nécessaire de procéder à une sélection du modèle en retenant celui qui est associé à une fonction d'optimisation

conduisant à des ajustements pertinents.

Pour ce faire, nous avons considéré les trois modèles mentionnés précédemment combinés à deux fonctions d'optimisation. Les deux fonctions d'optimisation sont la fonction des moindres carrés et la fonction de coût L_1 .

Afin de sélectionner le modèle de construction de table de mortalité et la fonction d'optimisation les plus adaptés, il est nécessaire d'effectuer une analyse des tendances passées à l'aide des critères de qualité suivants : le **critère du χ^2** , le **critère du mean absolute percentage error (MAPE)**, le **critère du R^2** , le **critère de l'erreur d'échantillonnage (EE)** et le **critère du standardized mortality ratio (SMR)**. Ces différents critères sont définis comme suit :

- **Critère du χ^2** : il s'agit d'un indicateur permet de porter un avis sur la qualité de l'ajustement du modèle. La valeur du χ^2 est :

$$\chi^2 = \sum_{(x,t)} \frac{(D_{x,t} - E_{x,t}\hat{q}_{x,t})^2}{E_{x,t}\hat{q}_{x,t}(1 - \hat{q}_{x,t})}$$

- **Critère du mean average percentage error (MAPE)** : C'est un critère qui permet de mesurer le niveau d'exactitude de l'ajustement par rapport aux observations. Cet indicateur est égal à la moyenne des écarts absolus entre les valeurs ajustées et les valeurs observées..

$$MAPE = \frac{\sum_{(x,t)} |(D_{x,t}/E_{x,t} - \hat{q}_{x,t})/(D_{x,t}/E_{x,t})|}{\sum_{(x,t)} D_{x,t}} * 100$$

C'est donc un pourcentage, ce qui en fait un indicateur pratique pour les comparaisons. Cependant, en présence d'observations nulles, une division par zéro peut survenir, il est donc nécessaire de retirer ces observations avant de calculer le MAPE.

- **Critère du R^2** : Le coefficient de détermination, dont la valeur se situe entre 0 et 1, évalue la qualité de l'ajustement en mesurant dans quelle mesure le modèle correspond aux données empiriques.

$$R^2 = 1 - \left(\frac{\sum_{(x,t)} (D_{x,t}/E_{x,t} - \hat{q}_{x,t})^2}{\sum_{(x,t)} (D_{x,t}/E_{x,t} - (\sum_{(x,t)} (D_{x,t}/E_{x,t})/n))^2} \right)$$

où n est le nombre d'observations.

- **Critère de l'erreur d'échantillonnage (EE)** : Il s'agit de la moyenne des erreurs que l'on commet à chaque estimation ponctuelle. Cet indicateur correspond à la moyenne du rapport entre les valeurs observées et les valeurs ajustées.

$$EE = \sum_{(x,t)} \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}\hat{q}_{x,t}}$$

- **Critere du standardized mortality ratio (SMR)** : C'est le rapport entre le nombre de décès observés et ajustés. On fait l'hypothèse que les décès suivent une loi de Poisson $D_{x,t} \sim \mathcal{P}(E_{x,t}\hat{q}_{x,t})$.

$$SMR = \frac{\sum_{(x,t)} D_{x,t}}{\sum_{(x,t)} E_{x,t}\hat{q}_{x,t}}$$

Ainsi, si le $SMR > 1$ les décès ajustés sont sous-estimés et réciproquement si $SMR < 1$.

En plus des critères présentés, les fonctions d'optimisation retenues et exploitées à cette étape sont les suivantes :

$$\Phi_1(a, b) = \sum_{x,t} R_{x,t} \cdot (q_{xt} - \hat{q}_{x,t}(a, b))^2 \quad (3.9)$$

et

$$\Phi_2(a, b) = \sum_x \left| \sum_t R_{x,t} \cdot \hat{q}_{x,t}(a, b) - D_{x,t} \right| + \sum_t \left| \sum_x R_{x,t} \cdot \hat{q}_{x,t}(a, b) - D_{x,t} \right| \quad (3.10)$$

où $R_{x,t}$ représente l'exposition au risque à l'âge x de l'année calendaire t . L'optimisation de ces fonctions est effectuée sur la plage d'observations des données.

La fonction de perte $\Phi_1(a, b)$ est formulée de manière à tenir compte de l'exposition des bénéficiaires du régime de retraite dans l'estimation des paramètres du modèle. On constate que ce critère d'optimisation est très proche de celui des moindres carrés. En effet, si l'on suppose que ϵ suit une loi normale, alors la méthode du maximum de vraisemblance coïncide avec la méthode des moindres carrés.

De plus, la fonction de perte $\Phi_1(a, b)$ possède l'avantage de permettre que les taux observés $q_{x,t}$ soient nuls, ce qui est fréquent dans les groupes de populations assurées avec un effectif restreint. En effet, dans une population assurée d'effectif restreint et avec peu d'années d'observation, tous les âges ne sont pas couverts en termes d'événements d'intérêt (décès), notamment pour les âges élevés.

La fonction de perte $\Phi_2(a, b)$ évalue la distance absolue et ponctuelle entre les décès observés et les décès ajustés. De même que la fonction de perte $\Phi_1(a, b)$, elle autorise que les taux observés $q_{x,t}$ soient nuls. La différence entre les deux fonctions de perte réside dans le fait que l'une évalue l'erreur quadratique entre les taux observés et les ajustés, tandis que l'autre évalue plutôt l'erreur absolue.

3.1.4 Extrapolation aux âges extrêmes

Dans cette étape, il s'agit d'extrapoler les taux d'expérience pour les âges et les générations où ces derniers ne sont pas disponibles. Après l'étape 4, nous disposons des taux d'expérience sur la période d'observation ainsi que d'un modèle de construction de tables de mortalité associé à une fonction d'optimisation donnée. Pour obtenir les taux d'expérience pour tous les âges et toutes les générations, il est nécessaire d'extrapoler la table de référence pour les générations où ces taux sont absents.

En effet, les modèles retenus sont relationnels, établissant un lien entre les taux bruts et les taux de référence. Étant donné que les taux de référence ne sont pas disponibles pour certains âges et générations, nous devons d'abord les déterminer avant d'extrapoler nos propres taux d'expérience. Pour ce faire, nous utiliserons des fonctions d'extrapolation et analyserons leurs tendances afin de vérifier leur cohérence avec la dynamique observée du nombre de décès.

3.1.5 Tables de mortalité

Après avoir déterminé les taux d'expérience pour tous les âges, il est essentiel d'évaluer l'ajustement de ces taux par rapport aux **tendances passées**, puis de formuler un avis sur les **espérances de vie partielles et résiduelles générationnelles** issues des tables d'expérience construites. Enfin, il est important de mener des études sur la **robustesse** du modèle retenu.

Pour l'analyse **des tendances passées**, celle-ci est réalisée à l'aide de critères de qualité, suivie d'une évaluation critique de l'ajustement des taux d'expérience par rapport aux taux bruts de mortalité observés et aux intervalles de confiance ponctuels à 95 % construits.

Pour rappel, les intervalles de confiance ponctuels à 95 % des décès ajustés sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \text{IC}_{\text{inf}}(95\%) &= \sum_t R_{x,t} \times \hat{q}_{x,t}(\hat{a}, \hat{b}) - 1.96 \times \sqrt{\sum_t R_{x,t} \times \hat{q}_{x,t}(\hat{a}, \hat{b})} \\ \text{IC}_{\text{sup}}(95\%) &= \sum_t R_{x,t} \times \hat{q}_{x,t}(\hat{a}, \hat{b}) + 1.96 \times \sqrt{\sum_t R_{x,t} \times \hat{q}_{x,t}(\hat{a}, \hat{b})} \end{aligned}$$

où $\sum_t R_{x,t} \times \hat{q}_{x,t}(\hat{a}, \hat{b})$ représente la variance théorique.

Ensuite, pour l'analyse **des tendances futures**, nous le faisons via les espérances de vie générationnelles partielle ou résiduelle qui découlent des tables construites et des intervalles de confiance à 95% associés.

L'espérance de vie générationnelle est considérée comme une représentation des tables de mortalité prospectives sur une tranche d'âges donnée. Elle est évaluée précisément entre les âges x_0 et $x_0 + n$. Les âges avancés (au-delà de 120 ans) ne sont pas pris en compte, donc $x_0 + n$ est strictement inférieur à l'âge limite de la table. La non-prise en compte des âges avancés est due au faible niveau d'exposition à ces âges et à leur faible impact sur l'analyse de l'évolution de l'espérance de vie.

Dans le cadre de l'évaluation des espérances de vie générationnelles, on note $EV_{x,t}(x; x+n)$ l'espérance de vie à l'âge x ($x = x_0$) et pour l'année calendaire t . La formule de l'espérance de vie à l'âge x pour l'année t s'écrit alors comme suit : (a,b)

$$EV_{x,t}(x; x+n) = \sum_{h=1}^n \prod_{u=0}^{h-1} (1 - \hat{q}_{x+u,t+u}(a, b)) \quad (3.11)$$

où $\hat{q}_{x,t}(a, b) = \hat{q}_{x,t}(\hat{a}, \hat{b})$ représente les taux théoriques.

Pour les études concernant la robustesse du modèle retenu, il s'agit d'analyser la dispersion des taux d'expérience après application de la méthode du bootstrap, puis de construire des intervalles de confiance au titre des fluctuations. Pour mener cette étude, il est nécessaire d'introduire plusieurs éléments, dont les suivants : **principe des bandes de confiance, bootstrap des taux bruts de mortalité, et intervalles de confiance** (bandes de confiance) au titre des fluctuations d'échantillonnage.

Bandes de confiance

Nous cherchons à proposer une bande de confiance pour encadrer nos taux de décès ajustés sur une plage d'âges $[[x_0; x_0 + n]]$ (où n représente le nombre d'années sur lesquelles nous souhaitons encadrer nos taux de décès ajustés). Dans ce cadre, l'encadrement des décès théoriques ne se fait plus par un intervalle de confiance ponctuel, mais par une bande de confiance.

Généralement, pour construire des bandes de confiance, on s'appuie sur les estimateurs de fonction de survie, ou du moins sur leurs propriétés de convergence, comme celles de l'estimateur de **Kaplan-Meier**. Cependant, ici, nous ne cherchons pas à déterminer les bandes de confiance des fonctions de survie, mais plutôt celles des taux de décès théoriques. Nous cherchons donc à évaluer la variance estimée suivante :

$$\frac{q_{x,t}(1 - q_{x,t})}{R_{x,t}}$$

Ainsi, pour une année t donnée, nous avons :

$$\mathcal{P} \left(\hat{q}_{x,t}(\hat{a}, \hat{b}) \in q_{x,t} \pm \mu_{\alpha/2} \sqrt{\frac{q_{x,t}(1-q_{x,t})}{R_{x,t}}}, \forall x \in [x_0, x_0 + n] \right) = 1 - \alpha \quad (3.12)$$

Nous partons de l'hypothèse qu'une bande de confiance peut être perçue comme une famille d'intervalles de confiance pour tous les âges $x \in [x_0; x_0 + n]$, construite de sorte qu'en superposant tous ces intervalles, nous obtenons un intervalle des taux de décès théoriques pour toute la plage d'âges $x \in [x_0; x_0 + n]$ de probabilité égale à $1 - \alpha$.

Cette construction se fait alors par récurrence en supposant un encadrement indépendant entre deux âges. Nous avons ainsi l'égalité suivante :

$$\mathcal{P} \left(\hat{q}_{x,t}(a, b) \in q_{x,t} \pm \mu_{\beta/2} \sqrt{\frac{q_{x,t}(1-q_{x,t})}{R_{x,t}}}, \forall x \in [x_0; x_0 + n] \right) = 1 - \alpha \quad (3.13)$$

Avec

$$\beta = 1 - (1 - \alpha)^{1/(n+1)}$$

Contrairement aux intervalles de confiance des décès théoriques construites, les formules des bandes de confiance des taux de décès théoriques décrites ci-dessus permettent d'encadrer les taux de décès d'expérience en tenant compte du risque de fluctuations d'échantillonnage.

Bootstrap

Les taux de décès bruts présentent des irrégularités dues aux fluctuations d'échantillonnage. Ces fluctuations créent une incertitude lors de l'estimation des paramètres du modèle retenu pour l'ajustement de nos taux bruts. Cette incertitude liée à l'estimation des paramètres est appelée **risque d'estimation**.

En effet, les taux ajustés déterminés par notre modèle sont entièrement décrits par les paramètres que nous déterminons lors de l'ajustement. La description des taux ajustés uniquement par ces paramètres estimés est insuffisante. Il semble donc nécessaire de décrire le taux de décès ajusté par d'autres critères quantitatifs complémentaires.

À cet effet, dans cette étape, nous cherchons à évaluer l'impact des fluctuations d'échantillonnage sur l'estimation des paramètres du modèle choisi pour ajuster les taux bruts de mortalité.

Pour ce faire, nous adoptons la méthode proposée par **Kamega** et **Planchet** en 2010 pour obtenir un ensemble d'échantillons des taux de décès bruts. Cette méthode consiste à simuler K échantillons des taux bruts en supposant que les observations $D_{x,t} \sim \mathcal{B}(R_{x,t}, q_{x,t})$. Pour chaque simulation k (avec $k \in [1 : K]$, K étant le nombre total de simulations), les taux de décès bruts rééchantillonnés sont déterminés par la formule suivante :

$$q_{x,t}^k = \frac{D_{x,t}^k}{R_{x,t}}$$

Après avoir déterminé les décès bruts rééchantillonnés pour chaque k , nous obtenons une nouvelle estimation des paramètres $\theta = (a, b)$ pour chaque simulation k , notée $\theta^k = (a^k, b^k)$. Ces nouveaux paramètres sont estimés en minimisant la fonction de perte, par exemple :

$$\Phi(\hat{a}^k, \hat{b}^k) = \sum_x \left| \sum_t R_{x,t} \cdot \hat{q}_{x,t}^k(\hat{a}^k, \hat{b}^k) - D_{x,t}^k \right| + \sum_t \left| \sum_x R_{x,t} \cdot \hat{q}_{x,t}^k(\hat{a}^k, \hat{b}^k) - D_{x,t}^k \right|$$

Après chaque ajustement k , les taux ajustés peuvent être obtenus à l'aide de la formule suivante :

$$\hat{q}_{x,t}^k = \hat{q}_{x,t}^k(\hat{a}^k, \hat{b}^k) = \frac{\exp(y_{x,t}^k)}{1 + \exp(y_{x,t}^k)}$$

$$\text{avec } y_{x,t}^k = \hat{a}^k \cdot \ln \left(\frac{q_{x,t}^{ref}}{1 - q_{x,t}^{ref}} \right) + \hat{b}^k.$$

Les différents taux ajustés déterminés pour chaque simulation k forment ainsi une famille de taux théoriques, qui représente la dispersion des taux due à la prise en compte du risque d'estimation des paramètres dans le cadre des fluctuations d'échantillonnage.

Pour quantifier cette dispersion, nous calculons pour chaque âge x et année d'observation t les coefficients de variation des taux théoriques, à l'aide de la formule suivante :

$$Coe f_{x,t} = \frac{\sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_k (\hat{q}_{x,t}^k - \frac{1}{K} \sum_k \hat{q}_{x,t}^k)^2}}{\frac{1}{K} \sum_k \hat{q}_{x,t}^k} = \frac{sd(Q_{aj}^k)}{mean(Q_{aj}^k)}$$

où :

- $Q_{aj}^k = (\hat{q}_{x,t}^k)_{x,t}$ représente les taux théoriques pour une simulation k ,
- $sd(Q_{aj}^k)$ représente l'écart-type des taux théoriques pour une simulation k ,
- $mean(Q_{aj}^k)$ représente la moyenne des taux théoriques pour une simulation k .

Intervalles de confiance aux titres de la fluctuation d'échantillonnage

La construction d'intervalles de confiance aux titres de la fluctuation d'échantillonnage passe l'évaluation des espérances de vie générationnelle après applications du bootstrap. En considérant les taux théoriques issus des simulations réalisées dans le cadre des fluctuations d'échantillonnage, la formule de l'espérance de vie pour une simulation k devient :

$$EV_{x,t}^k(x; x+n) = \sum_{h=1}^n \prod_{u=0}^{h-1} \left(1 - \hat{q}_{x+u,t+u}^k(a, b)\right) \quad (3.14)$$

En résumé, pour encadrer les taux théoriques en tenant compte des fluctuations d'échantillonnage avec une probabilité $1 - \alpha$, on utilise le même principe que pour déterminer les intervalles de confiance des espérances de vie générationnelles partielles entre x et $x+n$. En considérant EV^i et EV^s comme les intervalles de confiance inférieure et supérieure de l'espérance de vie générationnelle partielle avec un niveau de confiance $1 - \alpha$, l'encadrement de l'espérance de vie générationnelle partielle pour une simulation k prend la forme suivante :

$$\mathcal{P} \left(EV_{x,t}^i < EV_{x,t}^k \leq EV_{x,t}^s, x = x_0 \right) = 1 - \alpha$$

où $\alpha \in]0; 1[$.

Compte tenu des K simulations réalisées, on dispose alors, pour $t = t_0$, de K espérances de vie générationnelles partielles simulées. En considérant un seuil α et en retenant le quantile $\alpha/2$ pour l'intervalle de confiance inférieur et le quantile $1 - \alpha/2$ pour l'intervalle de confiance supérieur, on peut construire à l'instant $t = t_0$ des bornes de confiance EV^i et EV^s telles que :

$$EV_{x,t}^i = \inf \left(EV_{x,t}^g \in [EV_{x,t}^1, \dots, EV_{x,t}^K] \mid P \left(EV_{x,t}^k \leq EV_{x,t}^g \right) \geq \alpha/2, x = x_0 \right)$$

et

$$EV_{x,t}^s = \sup \left(EV_{x,t}^g \in [EV_{x,t}^1, \dots, EV_{x,t}^K] \mid P \left(EV_{x,t}^k \leq EV_{x,t}^g \right) \geq 1 - \alpha/2, x = x_0 \right)$$

où $g \in [1, K]$ pour une année d'observation t ($t = t_0$) et un âge x ($x = x_0$). Les bornes de confiance des espérances de vie générationnelles partielles ainsi déterminées permettent d'obtenir les indices de simulations i et s associés à chaque taux théorique simulé, dans notre cas $q_{x,t}^i$ et $q_{x,t}^s$. De cette manière, on dispose d'un intervalle de confiance avec un niveau de confiance $1 - \alpha$ des taux théoriques au titre du risque d'estimation, en tenant compte des fluctuations d'échantillonnage.

3.2 Approche par la moyenne

Comme défini précédemment, cette méthode consiste à obtenir une table unique en appliquant une moyenne pondérée entre deux tables différenciées par le sexe. Le sex-ratio du portefeuille est utilisé pour établir la table unique ou la table unisexe.

Comme mentionné, les poids attribués à chaque table dépendent du ratio hommes-femmes sur la période considérée pour l'évaluation des taux d'expérience par sexe. Une condition préalable est nécessaire pour établir une table d'expérience unisexe selon cette méthode. En effet, **il est indispensable de déterminer deux tables prospectives de mortalité différenciées par sexe**. Ces deux tables, l'une pour les femmes et l'autre pour les hommes, sont élaborées selon la méthode usuelle.

En outre, les deux tables de mortalité prospectives d'expérience genrées obtenues par l'approche globale ne servent pas uniquement à la construction de la table unisexe, mais visent également à répondre aux objectifs et aux enjeux de ce mémoire :

- Anticiper les impacts des évolutions réglementaires, notamment en matière de tarification et de provisionnement.
- Suivre les tables de mortalité prospectives d'expérience au sein du service actuariat.
- Évaluer le risque de longévité.

Chapitre 4

Construction de la table de mortalité unisexe : *Approche par la moyenne*

Ce chapitre est dédié à la construction de la première table unisexe obtenue par l'approche par la moyenne. Cette partie se concentre spécifiquement sur la construction des tables d'expérience genrées à partir de l'approche usuelle. Ainsi, la table unisexe est déduite des deux tables différenciées par le sexe en appliquant le sex-ratio. Durant ce processus, on a mené des analyses statistiques nécessaires à la validation des tendances passées et les projections futures issues du modèle choisi, et ce, afin d'assurer la fiabilité des tables d'expérience.

4.1 Validation des données

4.1.1 Présentation des données

Nous disposons d'un jeu de données du portefeuille du Régime de Retraite Supplémentaire de la CGP. Ces données sont issues du système de gestion et de la base des données techniques. Les données font l'objet d'analyses et de retraitements afin de garantir une qualité suffisante.

Il est important de souligner que ce jeu de données est le même ayant servi à la construction des tables de mortalité prospectives d'expérience différenciées par sexe en vigueur. Ces tables en vigueur ont été établies par le cabinet Prim'Act, cabinet de conseil indépendant mandaté par la SGAPS EPS. Aucune table d'expérience unique n'existe à ce jour sur l'ensemble des portefeuilles.

Aussi, l'analyse des données et les retraitements effectués dans la section de validation des données ont été réalisés en s'appuyant également sur le rapport de construction des tables d'expérience en vigueur à la CGP. Cette démarche permet d'avoir une base de

données commune et fiable et facilite les analyses et les rapprochements notamment pour les deux tables de mortalités genrées utilisées pour établir la table unisexe par l'approche par la moyenne.

Le périmètre des données couvre la période allant du 01/01/2000 au 07/04/2020. Lors de l'extraction effectuée le 07/04/2020. Il y a 123 359 lignes de données à exploiter sur cette période. Ces données concernent les ouvrants droit ainsi que les ayants droit.

Le tableau suivant récapitule les lignes à exploiter après l'extraction des données :

	Lignes à l'extraction	Lignes retenues
Nombre de lignes	123 359	123 357
Dont Participants	122 125	122 125
Dont Conjointes	1 232	1 232
Doublons à supprimer	2	0
Autres lignes à supprimer	0	0
Nombre de décès	2 159	2 159
Dont Participants	2 159	2 159
Dont Conjointes	0	0

FIGURE 4.1 – Statistiques des données extraites

En plus des lignes à exploiter, la description des différents champs ou variables explicatives est résumée dans le tableau suivant :

Champs	Description
EXT CODE OD	Numéro d'ouvrant droit
EXT CODE AD	Numéro d'ayant droit
EXT DT DC AD	Date de décès ayant droit
EXT DT DC OD	Date de décès ouvrant droit
EXT DT NAIS AD	Date de naissance ayant droit
EXT DT NAIS OD	Date de naissance ouvrant droit
EXT SEXE AD	Sexe ayant droit
EXT SEXE OD	Sexe ouvrant droit
EXT DT AFFI CI	Date d'affiliation
EXT DT RAD	Date de radiation
EXT TYPE ALLOC	Type d'allocataire
EXT IS KU	Sortie en capital
TRANFERT/RACHAT	Infos sur la presence de rachat ou transfert
DT TRANFERT RACHAT	Date de transfert ou rachat
EXT STATUT DL	Statut de la liquidation
EXT MOTIF STATUT DL	Date du statut de la liquidation
EXT DT EFFET DL	Date d effet de la liquidation
EXT TYPOLOGIE	Etat
EXT DT LIQUIDATION	Date de liquidation

TABLE 4.1 – Base de données

Dans la suite de notre étude, nous procéderons à un contrôle de qualité des données en utilisant la base présentée précédemment, suivi d'un retraitement afin d'obtenir une base de données cohérente et synthétique.

4.1.2 Analyse des données

Afin d'assurer la qualité et la cohérence des données en collaboration avec le service de gestion, les contrôles effectués ont révélé les éléments suivants :

Suppressions des données

- **Suppressions des doublons** : 2 lignes supprimées.
- **Incompatibilités de dates** : 5 participants avaient une date de décès antérieure à leur date d'affiliation. D'après le service de gestion, cela est dû à des affiliations ayant eu lieu lors du changement de régime, avant que le décès des participants ne soit connu. Les 5 lignes concernées sont supprimées, mais les conjoints associés sont conservés.

-
- **Réversions non valables** : 120 lignes concernent des conjoints en réversion potentielle alors que les participants ont liquidé leurs droits et sont sortis en capital. Ces 120 lignes sont supprimées.
 - **Erreur dans la saisie des données** : Une date de naissance en 2018 a été constatée, alors que nous observons des individus actifs ou retraités et leurs conjoints. Ainsi, les individus dans la base de données doivent être nés avant 1991 pour être des jeunes actifs ou des conjoints. Cette ligne est supprimée.
 - **Données manquantes** : 15 individus ont une date de naissance inconnue, rendant impossible la détermination de leur âge pendant la période d'observation et leur contribution à l'exposition pour un âge et une année d'observation donnés. Ces lignes sont supprimées.

Cohérence et retraitements des données

- **Incompatibilités de date** : Une date de rachat est antérieure à la date d'affiliation. Conformément à la gestion, cette incohérence est due aux cotisations perçues après le rachat du participant, entraînant l'ouverture d'un nouveau contrat. La date d'affiliation a été modifiée pour correspondre à celle du dossier originel. De plus, nous avons deux dates de décès antérieures ou égales à la date de sortie en capital ; cette incohérence est due à un décès survenu entre **la demande de sortie en capital** et **la date effective de sortie en capital**. Ces deux dates sont traitées comme des sorties en capital.
- **Incohérence dans la situation du participant** : 31 participants ont un statut de liquidation des droits "**Suspendu**" et "**Droits fermés**". Ces 31 participants sont traités comme des sorties en capital.
- **Infos complémentaires** : Nous avons 173 lignes où un décès et une sortie en capital sont observés. Parmi ces cas, 158 décès sont enregistrés au titre du régime de maintien des droits (RMD), un régime en **run off** à **EPS**. Les 15 autres décès ont été renseignés suite à des recherches AGIRA. Ces 173 lignes sont traitées comme des sorties en capital.

En résumé, le nombre total de lignes supprimées est de 143. Pour effectuer nos analyses et statistiques descriptives sur la base de données, nous allons supprimer plusieurs champs et conserver les plus importants. De plus, nous allons créer certains champs essentiels pour la construction de notre base de données finale.

4.1.3 Base de données finale

Les champs créés pour la construction de notre base de données finale sont énumérés ci-dessous :

- **Date d'entrée dans le risque** : Ce champ indique la date d'entrée dans le risque des bénéficiaires du régime de retraite. Cette date est soit la **date de décès de l'ouvrant droit**, soit sa **date de liquidation des droits**.
- **État** : Ce champ indique la situation des bénéficiaires au sein du régime de retraite. Cette variable comporte 5 modalités : **Rachat Total ou Transfert Sortant**, **En cours**, **Sortie en capital**, **Décès** et **Remariage**.
- **Date de sortie du risque** : Ce champ indique la date de sortie du risque des bénéficiaires du régime de retraite. Les dates de sortie sont associées à l'état du bénéficiaire. En résumé, cette variable est construite à partir de la variable **État**.

Les critères et principes retenus pour la construction des nouveaux champs pour chaque bénéficiaire du régime de retraites (participants et conjoints) sont résumés ci-dessous :

Principes et critères retenus

- **Date d'entrée dans le risque** : Pour cette variable, la **date d'entrée dans le risque** du participant correspond à sa **date d'affiliation**, tandis que pour le conjoint, elle dépend du cas de figure. Pour le conjoint, la **date d'entrée dans le risque** peut être soit la date de décès du participant, soit la date de liquidation des droits de ce dernier.

Pour les liquidations avant le 01/01/2014, la **réversion était automatique**. La connaissance d'un éventuel conjoint était portée à la connaissance du régime au moment du décès du participant. Pour les liquidations après le 01/01/2014, le participant choisit s'il utilise l'**option de réversion**, ce qui permet de connaître le conjoint au moment du choix de la réversion.

- **État** : Pour cette variable, la modalité **Rachat Total ou Transfert Sortant** concerne uniquement l'ouvrant droit. Les rachats et transferts sont suivis hors système et répertoriés par la gestion dans un fichier Excel. Pour identifier les participants concernés, la base a été croisée avec le fichier de la gestion (arrêté au 20/04/2020).

La modalité **En cours** concerne à la fois les participants et les conjoints ayant encore des droits ouverts. Le participant ne doit pas être mentionné dans les fichiers de rachat total et de transfert et ne doit pas avoir de réversataire potentiel inconnu du régime.

La modalité **Sortie en capital** concerne uniquement les bénéficiaires (participants) sortis en capital selon les fichiers de gestion. Il est important d'avoir des informations sur les participants qui liquident leurs droits via une sortie en capital car ils sortent du périmètre de la RS, mais peuvent continuer à être observés au sein du périmètre RMD. La date de décès peut alors être renseignée sur des participants ayant quitté le régime RS avant le décès.

La modalité **Décès** concerne les participants et les conjoints. Cette modalité est attribuée aux bénéficiaires décédés tout en étant toujours dans le risque. Les bénéficiaires concernés n'ont aucune mention de transfert ou de rachat, ni de sortie en capital. Les bénéficiaires sortis en capital de la RS, mais toujours observés sur le périmètre RMD, ou dont le décès a été renseigné après des recherches AGIRA, sont exclus.

La modalité **Remariage** concerne uniquement les conjoints. Cette modalité a été retenue car, dans nos analyses qualitatives, nous avons constaté que 4 conjoints en réversion potentielle connus du régime n'avaient pas de remariage renseigné, mais leur statut de liquidation était clos. Les conjoints non remariés bénéficient de la réversion, tandis que ceux qui se sont remariés doivent avoir leur dossier clos au sein du régime. Pour ces 4 conjoints en réversion potentielle, un retraitement manuel a été appliqué conformément aux informations fournies par le service de gestion concernant ces dossiers.

- **Date de sortie du risque** : Pour cette variable, comme mentionné précédemment, elle a été construite à l'aide des modalités de la variable État.

Pour la modalité "**En cours**", la date d'extraction des données a été retenue comme date de sortie du risque pour les conjoints et les participants.

Pour la modalité "**Décès**", la date de décès de l'ouvrant droit a été retenue pour le participant, tandis que pour le conjoint, sa date de décès a été retenue comme date de sortie du risque.

Pour la modalité "**Sortie en capital**", la date de liquidation a été retenue pour le participant, tandis que pour le conjoint, la date de sortie en capital du participant a été retenue comme date de sortie du risque.

Pour la modalité "**Rachat Total ou Transfert Sortant**", la date de transfert ou de rachat a été retenue comme date de sortie du risque pour le participant, tandis que pour le conjoint, la date de sortie du risque est sans objet.

Pour la modalité "**Remariage**", la date de statut de liquidation a été retenue comme date de sortie du risque pour le conjoint, tandis que pour le participant,

la date de sortie du risque est sans objet.

Après avoir exposé les principes retenus pour la construction de notre base de données finale, le tableau ci-dessous récapitule les différents champs qui la composent.

Champs - Base finale	Champs d'extraction	Type
Identifiant	.	Chaîne de caractères
Statut	EXT TYP ALLOC	Chaîne de caractères
Sexe	EXT SEXE OD/EXT SEXE AD	Chaîne de caractères
Date de naissance	EXT DT NAIS OD/EXT DT NAIS AD	Date
Date d'entrée dans le risque		Date
Date de sortie du risque		Date
État		Chaîne de caractères

FIGURE 4.2 – Champs finaux

La structure de la base de données vise également à permettre la construction de **nos quatre tables de mortalité d'expérience**. En effet, cette base synthétise les informations essentielles à la détermination des taux bruts de mortalité, qui constitueront la base pour l'ajustement des taux d'expérience.

4.2 Quelques statistiques et période d'observation

Dans cette partie, une analyse statistique de la base de données a été effectuée afin de vérifier l'éventuelle présence des années atypiques. On y aborde également le choix de la période d'observation.

4.2.1 Répartition des affiliés par année de naissance

Des contrôles de cohérence en termes de points d'accumulation sont effectués sur certains champs de la base de données. Ces champs concernés sont les suivants :

- date de naissance,
- date d'entrée dans le risque,
- date de sortie du risque.

Ces contrôles ont pour but d'identifier d'éventuels points d'accumulation. Ces observations sur les dates énumérées ci-dessus permettent de mettre en évidence les caractéristiques de notre portefeuille ou de connaître quel type de population est présent au sein

du régime de retraite, et surtout de quelles générations d'assurés ils proviennent.

Le graphique ci-dessous présente la fréquence des naissances entre 1901 et 2000.

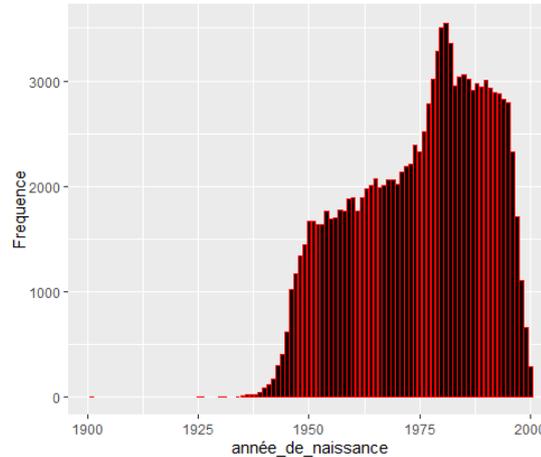


FIGURE 4.3 – Point d'accumulation sur la date de naissance

Cette répartition des naissances ne donne pas lieu à des commentaires particuliers. Les périodes de naissances des bénéficiaires du régime de retraite sont réparties de manière aléatoire sur la plage d'années de 1901 à 2000 sans qu'il y ait une entrée massive des bénéficiaires pendant une année ou une période donnée.

Le graphique suivant présente la fréquence des entrées dans le risque des bénéficiaires de régimes de retraite entre 1901 et 2000.

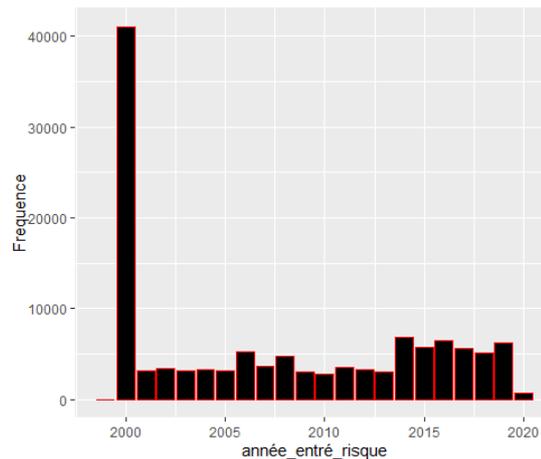


FIGURE 4.4 – Point d'accumulation sur la date d'entrée dans le risque

Sur cette répartition des dates d'entrées dans le risque, on constate que l'année 2000

est atypique puisqu'elle représente l'essentiel du nombre des affiliés au régime. Cette année correspond à la création du régime de retraite supplémentaire dont l'adhésion est obligatoire. Par conséquent, tous les salariés des entreprises adhérentes, notamment les salariés des Caisses d'Épargne, étaient dans l'obligation de s'affilier à ce régime.

Ce graphique présente la fréquence des sorties du risque des bénéficiaires de régimes de retraite entre 1999 et 2019.

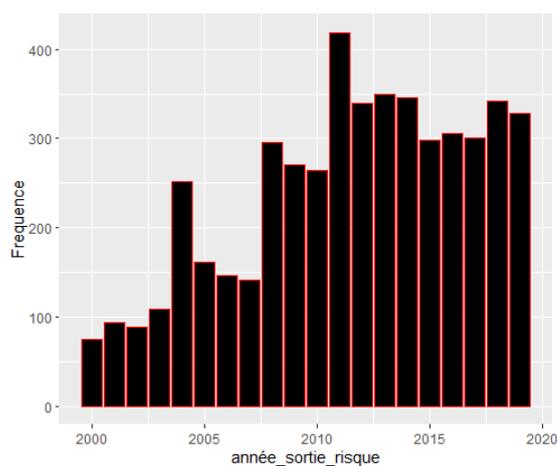


FIGURE 4.5 – Point d'accumulation sur la date de sortie du risque

Nous avons retenu la plage de dates allant de 1999 à 2019 pour observer la fréquence des sorties, car 1999 est l'année précédant la mise en place du nouveau régime de retraite et 2019 est l'année précédant l'extraction des données. La date d'extraction des données est également la date de sortie du risque des adhérents qui ont toujours les droits ouverts dans le régime ou qui continuent à cotiser pour le régime. Pour assurer la cohérence des analyses des données de sortie, nous avons opté pour la fin de la fenêtre d'observation des sorties des affiliés du régime en 2019.

Néanmoins, l'analyse des fréquences de sortie conduit à quelques points d'accumulation en fin d'année, correspondant à priori à des rachats.

4.2.2 Choix de la période d'observation (âges et années)

Pour effectuer l'évaluation du niveau des taux de mortalité d'une population donnée, l'une des premières étapes consiste à choisir une fenêtre d'observation sur laquelle les données seront exploitées. La fenêtre d'observation a été fixée du 01/01/2011 au 31/12/2018. Cette fenêtre d'observation nous permet de disposer des informations à jour sur l'ensemble des participants et des conjoints du présent régime. Cette fenêtre permet aussi d'observer le phénomène d'intérêt, c'est-à-dire le plus grand nombre de décès possible.

La date de début d'observation est fixée au 01/01/2011, afin de disposer d'assez d'observations lors de la ventilation des nombres de décès et d'expositions selon l'âge et les années calendaires d'observation « âge x année ».

La date de fin d'observation est fixée au 31/12/2018, compte tenu du fait que l'extraction de la base de données a été réalisée à la fin du second semestre de l'année 2020.

Pour disposer de données à jour et fiables sur les affiliés, la date de fin d'observation est fixée à deux ans avant la date d'extraction.

4.3 Estimation des taux bruts

Cette partie est dédiée au modèle ayant été retenu pour les calculs des taux bruts. Une analyse des dynamiques du nombre des décès et des expositions au risque de décès met en perspective la tendance des résultats obtenus avant ajustement.

4.3.1 Estimateur retenu

Dans notre étude, nous avons retenu deux estimateurs pour l'évaluation de nos taux bruts de mortalité : **le modèle de Hoem** et **le modèle de Kaplan-Meier**.

L'estimateur de Hoem a été privilégié par rapport à celui de Kaplan-Meier afin d'assurer la cohérence entre les données empiriques et ajustées, notamment en termes de nombre de sorties. Nous avons supposé que le rapport entre le nombre de décès et le nombre d'expositions, par âge et par année d'observation, était plus cohérent que le rapport entre le nombre de décès et le nombre d'individus à risque.

L'évaluation des expositions se révèle plus fiable pour mesurer le nombre de sorties que celle du nombre de personnes, comme dans le modèle de Kaplan-Meier. Cette cohérence découle du fait que la contribution de chaque individu à l'exposition, par âge et par année d'observation, reflète la durée pendant laquelle chaque individu est à risque. Et le modèle de Kaplan-Meier se limite à évaluer le nombre d'individus présents ou exposés à un moment donné, sans tenir compte de la durée exacte de cette exposition.

Dans la continuité de ce mémoire, les $q_{x,t}$ sont considérés comme les taux bruts calculés en utilisant l'estimateur de Hoem pour des valeurs $x = 55, \dots, 80$ et $t = 2011, \dots, 2018$.

4.3.2 Dynamique du nombre de décès et du niveau d'exposition

Les graphiques suivants illustrent la dynamique du nombre de décès et du niveau d'exposition selon l'âge et le sexe :

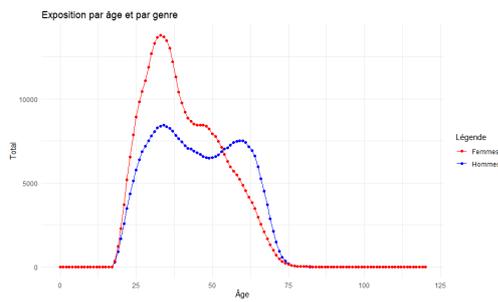


FIGURE 4.6 – Exposition au risque par âge

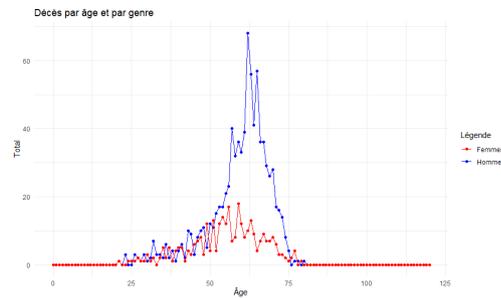


FIGURE 4.7 – Nombre de décès par âge

FIGURE 4.8 – Exposition au risque et nombre de décès par âge

On constate que le niveau d'exposition des femmes est généralement supérieur à celui des hommes pour les âges inférieurs à 60 ans. Ce niveau baisse sensiblement à partir de l'âge de 42 ans. En revanche, le niveau d'exposition au risque des hommes reste relativement constant jusqu'à l'âge de la retraite.

En ce qui concerne la dynamique du nombre de décès, on observe que le nombre de décès chez les femmes au sein de la population assurée est significativement inférieur à celui des hommes. Le pic du nombre de décès chez les hommes est enregistré à l'âge de 60 ans.

Il est important de noter qu'au sein de la population assurée, le nombre de femmes est relativement supérieur à celui des hommes. En effet, parmi la population observée entre le 01/01/2011 et le 31/12/2018, les femmes représentent 55 % de l'effectif total. Le nombre sensible de femmes dans la population observée contribue en partie à leur plus grande exposition aux risques à des âges plus jeunes.

On constate également qu'il y a peu de décès au-delà de 80 ans, et que l'exposition au risque de décès apparaît faible après 75 ans pour les hommes et 70 ans pour les femmes. Par conséquent, les taux de mortalité sont difficilement estimables à partir de ces âges et au-delà.

L'analyse combinée de la dynamique du nombre de décès et du niveau d'exposition révèle que les femmes sortent plus rapidement du risque que les hommes. Cette différence sensible provient des sorties autres que le décès, telles que les sorties en capital unique, les rachats ou les transferts.

4.3.3 Dynamique du niveau d'exposition

Dans cette section, nous présentons le niveau d'exposition en fonction de l'âge et de l'année d'observation. À cet égard, le graphique ci-dessous illustre le niveau d'exposition de la population masculine et féminine :

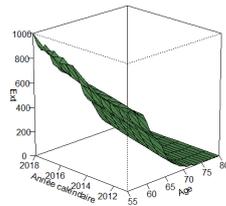


FIGURE 4.9 – Exposition au risque par âge et par année calendaire pour les Femmes

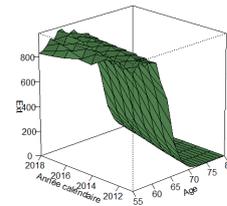


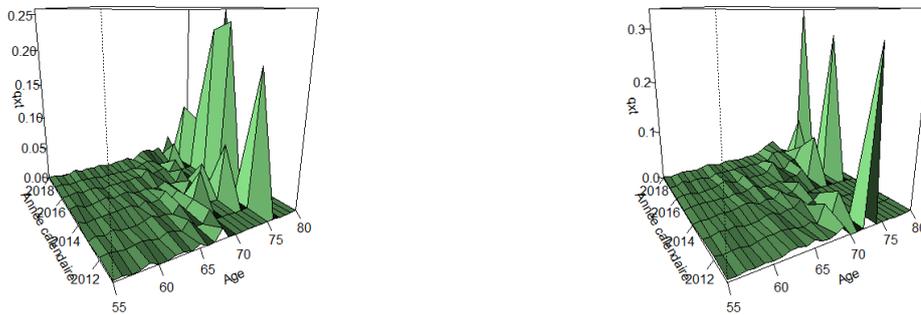
FIGURE 4.10 – Exposition au risque par âge et par année calendaire pour les Hommes

L'analyse combinée des expositions des hommes et des femmes révèle qu'il y a peu d'expositions pour les âges supérieurs à 70 ans. En revanche, pour les groupes d'âge plus jeunes, l'exposition au risque des femmes est très élevée par rapport à celle des hommes, et ce, quelle que soit l'année d'exposition.

En comparant les surfaces d'exposition aux risques entre les femmes et les hommes, nous arrivons à la même conclusion : les femmes cessent d'être exposées plus rapidement que les hommes.

4.3.4 Taux bruts de mortalité

Les graphiques ci-dessous illustrent les taux bruts de mortalité observés pour la population masculine et féminine du régime de retraite supplémentaire. Ces taux de mortalité sont présentés sur un graphique en trois dimensions, tenant compte de l'âge, de l'année calendaire (année d'observation) et du niveau de mortalité observé chez les bénéficiaires.



(a) Taux de mortalité bruts par âge et par année calendaire pour les Femmes

(b) Taux de mortalité bruts par âge et par année calendaire pour les Hommes

FIGURE 4.11 – Comparaison des taux de mortalité bruts par âge et par année calendaire pour les Femmes et les Hommes

Pour les populations masculine et féminine, on constate une faible volumétrie des données pour les âges de 55 à 65 ans sur l'ensemble des années d'observation, ce qui s'explique par un nombre de décès également faible durant cette période. Cependant, pour chaque groupe d'assurés, on observe un pic de mortalité pour les âges compris entre 70 et 75 ans, principalement durant les années 2011 et 2012. De plus, d'autres pics de mortalité se manifestent pour les âges compris entre 75 et 80 ans au cours des années 2015 à 2018.

4.4 Ajustement ou lissage des taux bruts

4.4.1 Estimation des paramètres

Pour estimer les paramètres, nous allons optimiser deux fonctions de perte et choisir la fonction de perte dont les paramètres estimés s'ajustent au mieux aux données disponibles. Après ajustement des modèles linéaire, de log-poisson et de Brass à l'aide des fonctions d'optimisation $\Phi_1(a, b)$ et $\Phi_2(a, b)$, et sans abattement des tables de références, les paramètres déterminés sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Critères d'optimisation	Modèle	Hommes	Femmes
$\Phi_1(a, b)$	Brass	$a = 0.88 ;$ $b = -0.29$	$a = 1.50 ;$ $b = 2.66$
$\Phi_1(a, b)$	Log-poisson	$a = 0.88 ;$ $b = -0.30$	$a = 1.50 ;$ $b = 2.64$
$\Phi_1(a, b)$	Linéaire	$a = 1.04 ;$ $b = 0.0016$	$a = 1.05 ;$ $b =$ -0.00051
$\Phi_2(a, b)$	Brass	$a = 0.94 ;$ $b = 3.42 * 10^{-8}$	$a = 1.05 ;$ $b = 0.26$
$\Phi_2(a, b)$	Log-poisson	$a = 0.94 ;$ $b = 8.6 * 10^{-7}$	$a = 1.06 ;$ $b = 0.27$
$\Phi_2(a, b)$	Linéaire	$a = 1.14 ;$ $b =$ 0.00085	$a = 0.84 ;$ $b =$ 0.00020

FIGURE 4.12 – Paramètres estimés pour hommes et femmes

L'analyse des résultats ci-dessus révèle que les modèles de Brass et de Log-Poisson sont similaires, quelle que soit la fonction de perte utilisée pour la détermination des paramètres. Il est également rappelé que pour optimiser les paramètres associés à la fonction ϕ_1 , nous avons utilisé la fonction 'nlm()' du logiciel R, et pour les paramètres associés à la fonction ϕ_2 , nous avons employé la fonction 'constrOptim()' du même logiciel.

Dans la suite de ce mémoire, nous procéderons à la sélection de l'une de ces deux fonctions de perte ainsi qu'au choix du modèle le plus adapté à nos données. La sélection des modèles s'effectuera à travers l'analyse des tendances passées, en utilisant des critères de qualité.

4.4.2 Mesure de la qualité d'ajustement et sélection de modèle

Pour évaluer la qualité de l'ajustement, deux analyses sont réalisées. La première consiste à vérifier si la mortalité de la population assurée est correctement représentée sur la période d'observation. La seconde porte sur l'évaluation de l'évolution de cette mortalité via les espérances de vie générationnelles qui en résultent.

Nous devons évaluer la qualité de l'ajustement pour chacune des deux fonctions de perte présentées. À cette fin, nous utiliserons des critères de **validation de la mortalité passée**. Ces critères permettent d'examiner la pertinence de l'ajustement à un niveau

local voire global en analysant les **résidus**.

Pour évaluer la qualité des modèles sur les tendances passées, nous avons d'abord réalisé une validation croisée en utilisant un taux d'abattement compris entre 0,1 % et 10 % à la table de référence, en utilisant les critères de qualité suivants : χ^2 , R^2 , incertitude moyenne, SMR et MAPE. Cependant, quel que soit le taux d'abattement appliqué, les critères de qualité s'améliorent très peu dans certains cas, et certains critères se détériorent. Par conséquent, nous avons décidé de ne pas appliquer d'abattement aux tables de référence, afin de permettre au modèle de mieux capturer les tendances de mortalité passées. Les résultats suivants sont le fruit de nos observations :

modèle linéaire :

Ainsi, pour les hommes, les résultats sont les suivants :

Critères de qualité	Fonctions d'optimisation	
	$\Phi_1(a, b)$	$\Phi_2(a, b)$
Khi-deux χ^2	40,07%	38,91%
R ²	83,37%	82,87%
Incertitude d'échantillonnage moyen	1,09	1,1
SMR	1,000075	1,04
MAPE(%)	22,52%	19,90%

FIGURE 4.13 – Critères de qualités pour les hommes

Et pour les femmes les résultats sont les suivants :

Critères de qualité	Fonctions d'optimisation	
	$\Phi_1(a, b)$	$\Phi_2(a, b)$
Khi-deux χ^2	16,72%	14,53%
R ²	67,89%	67,22%
Incertitude d'échantillonnage moyen	1,14	1,22
SMR	1,00017	0,98
MAPE(%)	33,73%	35,09%

FIGURE 4.14 – Critères de qualités pour les femmes

En examinant les résultats ci-dessus, on constate que la fonction ϕ_2 conduit aux ajustements les plus pertinents pour les hommes, tandis que la fonction ϕ_1 est plus adaptée pour les femmes.

- χ^2 : Pour les hommes comme pour les femmes, le χ^2 associé à ϕ_2 est inférieur à celui associé à ϕ_1 . Cela suggère que, selon le critère du χ^2 , le modèle linéaire utilisant la fonction ϕ_2 comme fonction d'optimisation offre les ajustements les plus pertinents.
- Incertitude d'échantillonnage moyenne : Tant pour les hommes que pour les femmes, l'incertitude d'échantillonnage moyenne associée à ϕ_2 est supérieure à celle associée à ϕ_1 . Cela indique que, selon ce critère, le modèle linéaire utilisant la fonction ϕ_1 comme fonction d'optimisation offre les ajustements les plus pertinents.
- R^2 : Indépendamment du sexe, le R^2 associé à ϕ_2 est inférieur à celui associé à ϕ_1 . Cela signifie que, selon le critère du R^2 , le modèle linéaire utilisant la fonction ϕ_1 comme fonction d'optimisation offre les ajustements les plus pertinents. Toutefois, il est important de noter que les valeurs de R^2 sont très proches dans les deux cas.
- *SMR* et *MAPE* : Ces deux critères nécessitent une analyse combinée de leurs résultats respectifs :
 - Pour la population masculine, il apparaît que le MAPE associé à ϕ_2 est inférieur à celui associé à ϕ_1 , le SMR pour ϕ_2 est cohérent avec son MAPE, tandis que le SMR observé pour ϕ_1 est proche de 1, ce qui n'est pas cohérent avec son MAPE, en raison d'effets de compensation dans les décès estimés.
 - Pour la population féminine, le MAPE associé à ϕ_2 est supérieur à celui associé à ϕ_1 , ce qui s'explique par l'effet de compensation du nombre total de décès estimés et le faible nombre de décès observés à certains âges, entraînant une importante fluctuation d'échantillonnage.

En conclusion, dans le cadre du modèle linéaire, il est recommandé d'utiliser la fonction de perte ϕ_2 pour l'ajustement des paramètres de la population masculine, et la fonction ϕ_1 pour la population féminine.

modèle log-poisson :

Ainsi, pour les hommes, les résultats sont les suivants :

Modèle Log-Poisson	Fonctions d'optimisation	
	$\Phi_1(a, b)$	$\Phi_2(a, b)$
Critères de qualité		
Khi-deux χ^2	38,24%	39,01%
R ²	83,83%	82,98%
Incertitude d'échantillonnage moyen	1,085	1,076
SMR	1,001	1,025
MAPE(%)	21,33%	19,62%

FIGURE 4.15 – Critères de qualités pour les hommes

Et pour les femmes les résultats sont les suivants :

Modèle Log-Poisson	Fonctions d'optimisation	
	$\Phi_1(a, b)$	$\Phi_2(a, b)$
Critères de qualité		
Khi-deux χ^2	18,66%	14,92%
R ²	65,58%	66,20%
Incertitude d'échantillonnage moyen	0,99	1,1
SMR	1,028	0,94
MAPE(%)	33,96%	35,35%

FIGURE 4.16 – Critères de qualités pour les femmes

En examinant les résultats ci-dessus, on constate que la fonction ϕ_1 conduit aux ajustements les plus pertinents pour les hommes, tandis que la fonction ϕ_2 est plus adaptée pour les femmes.

- χ^2 : Les observations relatives au χ^2 sont contradictoires entre les hommes et les femmes. Pour les hommes, le modèle log-poisson utilisant la fonction ϕ_1 comme fonction d'optimisation offre les ajustements les plus pertinents selon ce critère, tandis que pour les femmes, c'est la fonction ϕ_2 qui donne les meilleurs résultats.

- R^2 : Ici aussi, les observations sont contradictoires. Pour les hommes, le modèle log-poisson utilisant la fonction ϕ_1 comme fonction d'optimisation est le plus pertinent d'après le critère du R^2 , alors que pour les femmes, c'est la fonction ϕ_2 qui prédomine.
- Incertitude d'échantillonnage moyenne : Pour les hommes, l'incertitude d'échantillonnage moyenne associée à ϕ_2 est inférieure à celle associée à ϕ_1 , indiquant que la fonction ϕ_2 offre les ajustements les plus pertinents selon ce critère. Pour les femmes, on observe l'inverse : la fonction ϕ_1 produit une incertitude d'échantillonnage moyenne plus faible.
- *SMR* et *MAPE* : Ces deux critères nécessitent une analyse combinée :
 - Chez les hommes, le MAPE associé à ϕ_2 est inférieur à celui associé à ϕ_1 . Le SMR pour ϕ_2 est également cohérent avec son MAPE, tandis que le SMR observé pour ϕ_1 est proche de 1, ce qui n'est pas cohérent avec son MAPE, compte tenu d'effets de compensation dans les décès estimés.
 - Pour les femmes, le MAPE associé à ϕ_2 est supérieur à celui associé à ϕ_1 , ce qui peut être dû à un effet de compensation du nombre total de décès estimés et au faible nombre de décès observés à certains âges, entraînant une forte fluctuation d'échantillonnage.

En résumé, dans le cadre du modèle log-poisson, il est recommandé d'utiliser la fonction de perte ϕ_1 pour l'ajustement des paramètres de la population masculine, et la fonction ϕ_2 pour la population féminine.

modèle de Brass :

Ainsi, pour les hommes, les résultats sont les suivants :

Modèle de Brass	Fonctions d'optimisation	
	$\Phi_1(a, b)$	$\Phi_2(a, b)$
Critères de qualité		
Khi-deux χ^2	38,23%	38,96%
R ²	83,83%	82,99%
Incertitude d'échantillonnage moyen	1,08	1,07
SMR	1,00098	1,02
MAPE(%)	21,34%	19,64%

FIGURE 4.17 – Critères de qualités pour les hommes

Et pour les femmes les résultats sont les suivants :

Modèle de Brass	Fonctions d'optimisation	
	$\Phi_1(a, b)$	$\Phi_2(a, b)$
Critères de qualité		
Khi-deux χ^2	18,69%	16,21%
R ²	65,49%	66,20%
Incertitude d'échantillonnage moyen	0,99	1,1
SMR	1,028	0,94
MAPE(%)	34,01%	33,35%

FIGURE 4.18 – Critères de qualités pour les femmes

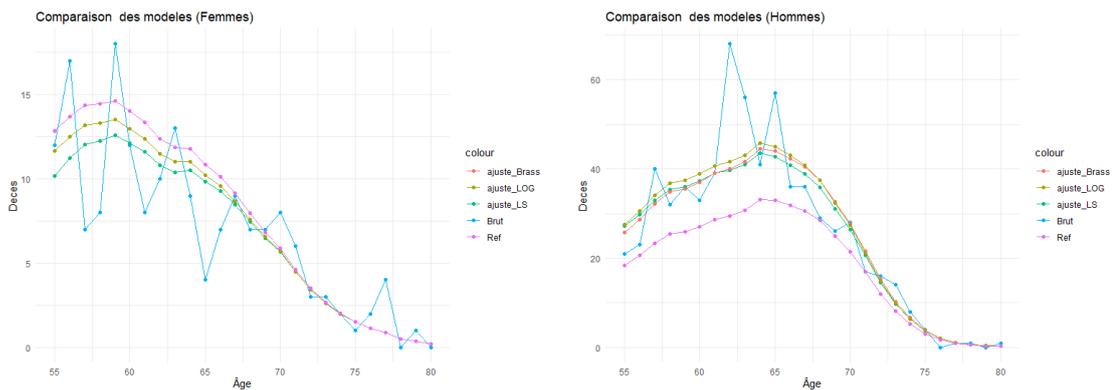
En examinant les résultats ci-dessus, on constate que la fonction ϕ_2 conduit aux ajustements les plus pertinents, tant pour les hommes que pour les femmes.

- χ^2 : Les observations concernant le χ^2 diffèrent pour les hommes et les femmes. Chez les hommes, le modèle de Brass utilisant la fonction ϕ_1 comme fonction d'optimisation offre les ajustements les plus pertinents, tandis que pour les femmes, c'est la fonction ϕ_2 qui prédomine. Cependant, les valeurs du χ^2 chez les hommes sont très proches, ce qui suggère que la fonction ϕ_2 pourrait également être rete-

nue comme fonction d'optimisation selon ce critère.

- R^2 : De même, les résultats pour le R^2 varient entre les sexes. Pour les hommes, le modèle de Brass utilisant la fonction ϕ_1 offre les ajustements les plus pertinents, alors que pour les femmes, c'est à nouveau la fonction ϕ_2 qui se révèle la plus adaptée.
- Incertitude d'échantillonnage moyen : Chez les hommes, l'incertitude d'échantillonnage moyenne associée à ϕ_2 est inférieure à celle associée à ϕ_1 , ce qui indique que le modèle de Brass avec la fonction ϕ_2 offre les ajustements les plus pertinents selon ce critère. Pour les femmes, la tendance est inversée.
- SMR et $MAPE$: Indépendamment du sexe, une analyse combinée de ces deux critères montre que le MAPE associé à ϕ_2 est inférieur à celui associé à ϕ_1 . Cependant, chez les hommes, le SMR observé avec ϕ_1 est proche de 1, ce qui pourrait indiquer une cohérence avec le MAPE. Toutefois, un SMR proche de 1 suggère également un effet de compensation dans le nombre total de décès estimés par le modèle, menant à un SMR artificiellement proche de 1.

En résumé, dans le cadre du modèle de Brass, la fonction de perte ϕ_2 aboutit à des ajustements plus pertinents que ϕ_1 . De plus, comme observé précédemment lors de l'estimation des paramètres sans ajustement des tables de référence, le modèle log-Poisson est très proche du modèle de Brass. En examinant globalement les résultats pour le χ^2 , R^2 , SMR, et MAPE, il apparaît clairement que la fonction de perte $\phi_2(a, b)$ conduit aux ajustements les plus pertinents, et que le modèle de Brass semble le mieux adapté pour évaluer les taux d'expérience. Les graphiques ci-dessous illustrent ce constat :



(a) Comparaison des modèles pour les femmes (b) Comparaison des modèles pour les hommes

FIGURE 4.19 – Comparaison des modèles pour les hommes et les femmes

L'ajustement par le modèle de Brass aboutit globalement à des meilleures estimations du nombre de décès pour les âges compris entre 55 ans et 61 ans. Quant aux âges compris entre 61 et 67 ans, le modèle de Brass conduit à des estimations comprises entre celles du modèle linéaire et du modèle log-Poisson. Compte tenu du grand nombre de décès dans cette tranche d'âge, le modèle de Brass équilibre les estimations sans surestimer ni sous-estimer le nombre de décès. Enfin, pour les âges de 67 à 80 ans, la courbe du modèle de Brass est légèrement au-dessus des deux autres modèles, et ce, malgré une convergence de tous les modèles après l'âge de 75 ans. Cela suggère que le modèle de Brass prend en compte la possibilité d'un plus grand nombre de décès à ces âges et que l'observation d'un nombre plus faible de décès peut être principalement due à un échantillon de données relativement modeste.

Concernant la population féminine, le graphique montre que la courbe relative au modèle de Brass se situe globalement entre celle du modèle linéaire et celle de référence. La courbe du modèle de Brass se confond avec celle du modèle log-Poisson, validant ainsi les observations faites lors de l'estimation des paramètres de chaque modèle, indiquant que le modèle log-Poisson est proche du modèle de Brass. On observe également que le modèle de Brass s'ajuste mieux aux données que le modèle linéaire.

Par conséquent, dans la suite de ce mémoire, nous choisissons de conserver la fonction de perte ϕ_2 comme critère d'optimisation des paramètres et, le modèle de Brass comme modèle de référence pour la construction des tables d'expérience.

4.5 Extrapolation aux âges extrêmes

Cette section est consacrée à l'extrapolation aux âges extrêmes, impliquant ainsi un prolongement des taux d'expérience au-delà de la période d'observation. Les données disponibles permettent de calculer les taux d'expérience pour la tranche d'âge de 55 à 80 ans, sur une période allant de 2011 à 2018. Il est donc nécessaire de prolonger ces taux pour les âges en dehors de cet intervalle.

4.5.1 Extrapolation des taux d'expérience au delà de la plage d'observation

Plusieurs approches existent pour extrapoler les taux d'expérience aux âges extrêmes et aux années non observées. Parmi les méthodes d'extrapolation aux grands âges, à titre d'indication, on retrouve la méthode de Denuit et Goderniaux (2005), la méthode de Lindbergson (2001), la méthode de Coale & Kisker (1990) ou encore la méthode de Coale & Guo (1989).

Aucune des méthodes ci-dessus n'a été utilisée dans le cadre de ce mémoire. Nous avons choisi la méthode utilisée pour construire les tables de mortalité prospectives d'expérience différenciées par le sexe en vigueur. Ce choix a été motivé par la volonté de

limiter les écarts dus aux méthodes. De plus, la méthode appliquée est simple à mettre en œuvre. Cette méthode repose sur le ratio d'amélioration continue $R(x)$ défini comme le rapport entre les deux dernières forces de mortalité disponibles dans la table de référence selon l'âge et la dernière année pour laquelle on dispose du taux de mortalité :

$$R(x) = \frac{\ln(1 - q(x, t_x))}{\ln(1 - q(x, t_x - 1))}$$

où t_x est la dernière année pour laquelle on dispose des taux de référence $q(x, t_x)$ dans la table de référence. On lisse la série des $R(x)$ à l'aide de splines, en imposant avant le lissage que $0,96 \leq R(x) \leq 1$.

Pour les deux graphiques (fig 4.20), des splines linéaires ont été réalisées sur de petits intervalles d'âge, couvrant tous les âges de 20 à 120 ans.

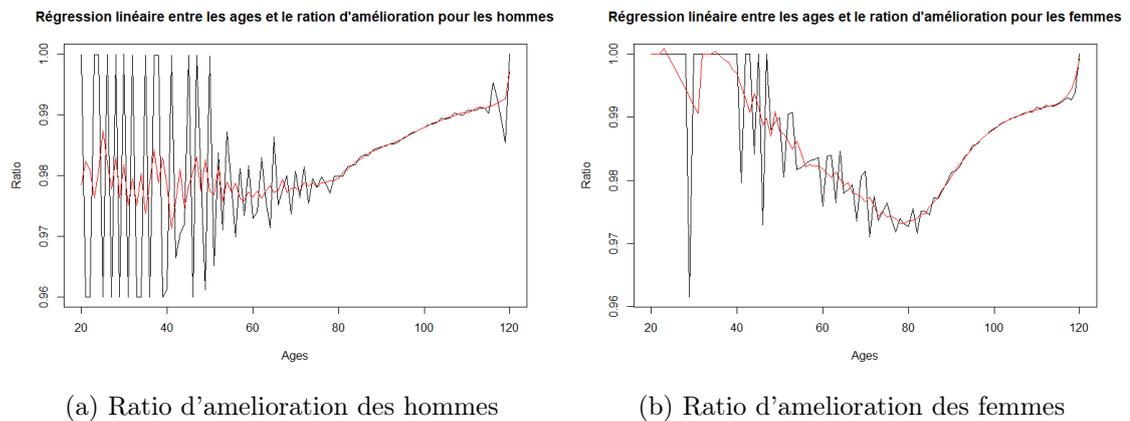
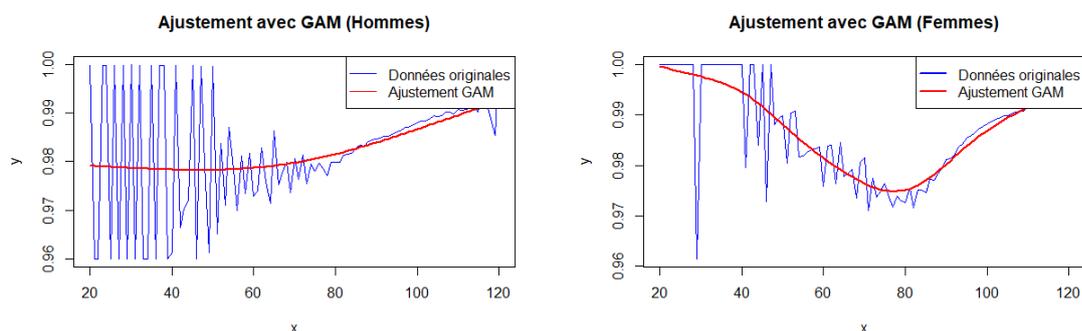


FIGURE 4.20 – Ratio d'amélioration

Pour les graphiques (fig 4.21), nous avons utilisé des splines obtenues à partir de modèles non paramétriques tels que les **GAMs (Generalized Additive Models)**. Les **GAMs** sont très flexibles et permettent d'ajuster des formes non linéaires complexes. Les graphiques ci-dessous montrent les résultats des études de sensibilité effectuées sur le ratio d'amélioration pour les populations d'hommes et de femmes.



(a) Ratio d'amélioration GAM(Hommes)

(b) Ratio d'amélioration GAM(Femmes)

FIGURE 4.21 – Ratio d'amélioration en utilisant les GAMs

Afin de suivre la tendance du taux d'amélioration sans fluctuations dues à des événements atypiques à certains âges, la méthode de lissage par splines (fig. 4.20) appliquée à la série des $R(x)$ observés ne permet pas d'obtenir une courbe entièrement lisse. Compte tenu de cette limite, nous avons eu recours aux modèles GAMs qui permettent de modéliser et de capturer les tendances non linéaires complexes (fig. 4.21).

Les études menées et les observations sur la mortalité des affiliés âgés de 20 à 120 ans ont permis de fixer les taux d'amélioration entre 0,96 et 1. Ce choix permet non seulement de mieux refléter les tendances futures, mais également d'avoir une approche prudente pour les calculs des engagements ainsi que de respecter les exigences réglementaires.

Les taux de référence extrapolés, notés $q(x, t)$, sont calculés selon la relation suivante :

$$q(x, t) = 1 - \exp(R(x) \cdot \ln(1 - q(x, t - 1)))$$

Pour rappel, le modèle de Brass est un modèle à référence externe. Cependant, les tables réglementaires utilisées couvrent les générations nées entre 1900 et 2005. En raison des engagements à long terme associés à la branche 26, il a été nécessaire d'extrapoler les taux de mortalité pour les âges allant de 20 à 120 ans, ainsi que pour les générations nées entre 2006 et 2105.

Après ajustement des taux pour la période d'observation 2011-2018, sur la tranche d'âge de 55 à 80 ans, et en supposant que les paramètres a et b restent constants, l'extrapolation des taux de mortalité pour les âges extrêmes entre 20 et 55 ans, ainsi qu'entre 80 et 120 ans s'effectue directement. Les tables de référence obtenues fournissent ainsi les taux d'expérience, différenciés par sexe, pour les âges de 20 à 120 ans et pour les périodes allant de 2011 à 2125.

4.6 Tables de mortalité différenciées par le sexe

Cette partie présente l'ensemble des analyses et des tests réalisés pour conforter les choix des modèles et méthodes puis de valider les deux tables de mortalité différenciées par le sexe. Celles-ci sont utilisées pour déterminer la table unique en appliquant l'approche par la moyenne décrite au chapitre 3. Ainsi, des analyses des tendances passées et futures ont été menées suivies des tests statistiques via des intervalles et des bandes de confiance ainsi qu'un Bootstrap pour la robustesse du modèle de Brass.

4.6.1 Tendances passées

Pour valider le modèle, des analyses de qualité d'ajustement sont essentielles. La première étape consiste à comparer le nombre de décès théoriques aux décès observés. Cette méthode implique d'utiliser l'approximation classique de la loi binomiale par une loi normale pour calculer les intervalles de confiance ponctuels. Les graphiques suivants retracent résultats obtenus par sexe :

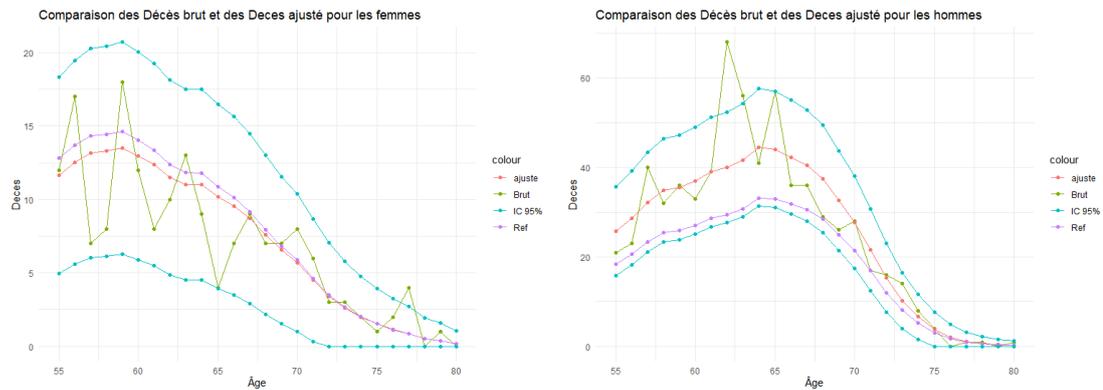


FIGURE 4.22 – Comparaison des décès observés et ajustés pour les femmes (à gauche) et pour les hommes (à droite)

Le graphique ci-dessus illustre l'évolution des décès observés et ajustés en fonction de l'âge, ainsi que les bornes inférieures et supérieures des intervalles de confiance (IC) ponctuels à 95 % pour les taux de décès ajustés. Les décès observés sont globalement compris à l'intérieur des intervalles de confiance à 95 %, ce qui montre la fiabilité et la précision du modèle retenu.

Toutefois, l'analyse du MAPE révèle une erreur relative moyenne de 19,64% pour les hommes et 33,35% pour les femmes, soulignant ainsi une imprécision non négligeable entre les décès observés et prédits, cela met en évidence l'importance d'une attention particulière lors de l'analyse des risques. Cette imprécision peut s'expliquer par divers facteurs de risque liés aux risques systématiques et mutualisables. Par conséquent, à la suite du mémoire une analyse traite l'évaluation du risque systématique lié à l'estimation

des paramètres du modèle, et ce, en prenant en compte les fluctuations d'échantillonnage observées sur les taux de décès bruts.

4.6.2 Tendances futures

L'analyse des tendances futures repose sur deux observations distinctes. Dans un premier temps, elle consiste à examiner les résultats liés aux espérances de vie générationnelle partielle. Dans un second temps, elle porte sur les espérances de vie générationnelle résiduelle. Par exemple, l'encadrement de l'espérance de vie générationnelle partielle des hommes et des femmes, pour les âges compris entre $x_0 = 55$ ans et $x_0 + n = 80$ ans, durant la période allant de $t_0 = 2011$ à $t_0 + m = 2018$, est illustré dans la figure ci-dessous :

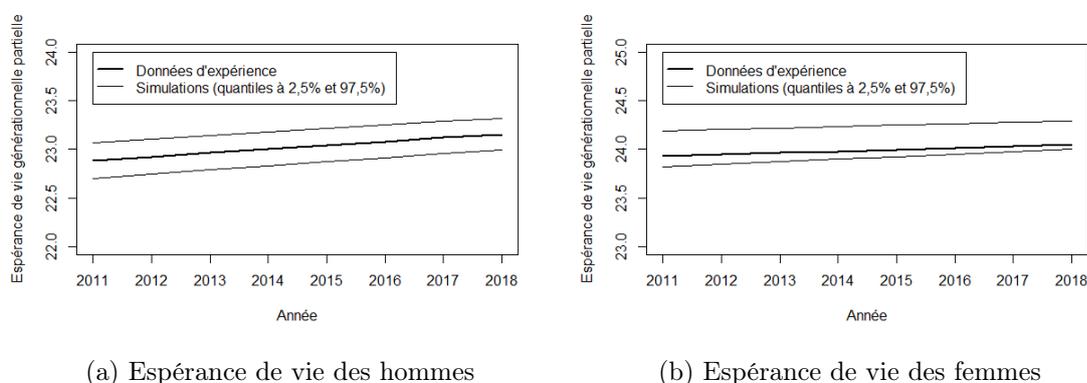


FIGURE 4.23 – Exemple d'espérance de vie résiduelle entre l'âge de 55 ans et 80 ans

La fonction logit étant non linéaire, il est cohérent que les écarts entre les intervalles de confiance de l'espérance de vie partielle et l'espérance de vie partielle elle-même ne soient pas symétriques.

On observe que l'espérance de vie suit une tendance croissante au fil des années. Cette tendance reflète bien une amélioration des conditions de vie. Aussi, l'espérance de vie des hommes reste bien inférieure à celle des femmes. En somme, les différents résultats renforcent la cohérence et la validité des taux obtenus.

Pour compléter l'analyse concernant la validation des tables de mortalité prospectives d'expérience, plusieurs scénarios d'âges de début et de fin ont été envisagés afin d'étudier l'espérance de vie générationnelle résiduelle découlant des tables d'expérience genrées. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Espérance de vie générationnelle - Année d'observation t=2018				
Ages	Hommes		Femmes	
	Table générée du mémoire	TGH 05	Table générée du mémoire	TGF 05
Age : 55 / Age fin 120	32,74	34,46	37,66	38,09
Age : 65 / Age fin 120	22,57	23,98	26,94	27,47
Age : 75 / Age fin 120	13,55	14,53	16,76	17,38
Age : 85 / Age fin 120	6,60	7,09	8,31	8,96

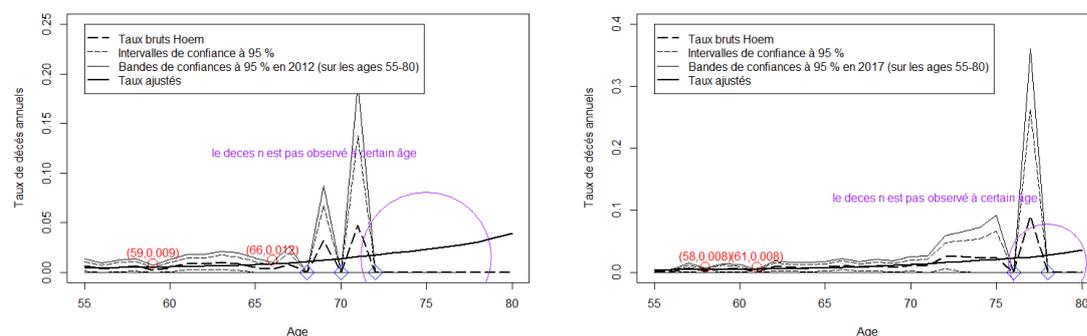
FIGURE 4.24 – Espérance de vie résiduelle pour la projection de 2018

Le résultats ci-dessus sont cohérents avec les observations faites sur la mortalité des hommes et des femmes(cf. fig. 4.8).En effet, les espérances de vie restent toujours inférieures aux références réglementaires. Le modèle de Brass assure un équilibre entre la qualité de l'évolution de l'espérance de vie résiduelle et la précision de l'estimation des décès.

4.6.3 Bandes de confiance

Pour renforcer la qualité des résultats obtenus et mesurer l'incertitude liée aux estimations, une analyse par les bandes de confiance a été effectuée. En effet, les bandes de confiance sont un bon outil pour apprécier l'incertitude autour de l'ensemble d'une courbe.

La figure ci-dessous illustre la pertinence de construire des bandes de confiance. Dans cet exemple, il s'agit d'un individu de sexe masculin d'âge $x \in [55; 80]$, pour les années 2012 et 2017.



(a) Comparaison des taux de décès observés et ajustés pour les hommes en 2012

(b) Comparaison des taux de décès observés et ajustés pour les hommes en 2017

FIGURE 4.25 – Comparaison des taux de décès observés et ajustés pour les hommes en 2012 et 2017

On observe que les bandes de confiance sont plus larges que les intervalles de confiance et qu'elles englobent les taux ajustés pour tous les âges compris entre 55 ans et 67 ans durant la période d'observation de 2012 ainsi que pour tous les âges allant de 55 à 76 ans pour l'année 2017. Cependant, ce constat n'est plus vérifié pour les âges supérieurs à 67 ans en 2012 et pour ceux dépassant 76 ans en 2017. Ce dernier constat s'explique par la taille de l'échantillon puisqu'aucun décès n'est observé pour certains âges supérieurs à 67 ans.

En résumé, ces observations soulignent l'intérêt de construire des bandes de confiance pour une année d'observation t , démontrant qu'elles sont plus adaptées que les intervalles de confiance pour encadrer la courbe des taux de décès théoriques sur une plage d'âges donnée.

4.6.4 Bootstrap

Dans cette section, nous avons souhaité évaluer la cohérence de l'évolution des coefficients de variation théoriques par rapport à celle du nombre de décès observés. Pour ce faire, étant donné que le nombre de décès et les coefficients de variation ne sont pas sur la même échelle, nous avons standardisé le nombre de décès pour chacune des populations (hommes et femmes). Cette standardisation n'influence pas les résultats, car il s'agit simplement de comparer des évolutions.

Enfin, compte tenu de la variabilité importante des données, nous avons réalisé $K = 2000$ simulations des taux théoriques. En ce qui concerne la standardisation des nombres de décès, nous avons effectué une simple division par un nombre arbitrairement choisi, ce qui permet de faciliter la comparaison des évolutions. Nous obtenons ainsi la

représentation suivante de l'évolution des coefficients de variation et du nombre de décès :

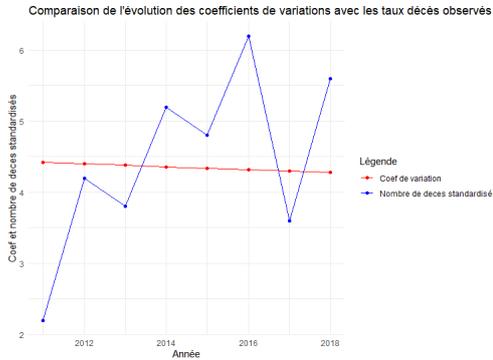


FIGURE 4.26 – Comparaison des coefficients de variation et des taux de décès observés pour les femmes

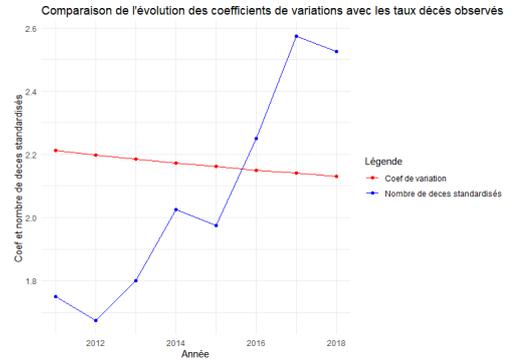
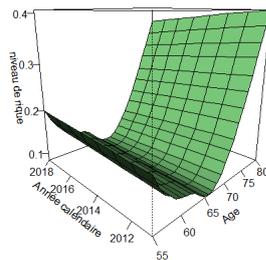


FIGURE 4.27 – Comparaison des coefficients de variation et des taux de décès observés pour les hommes

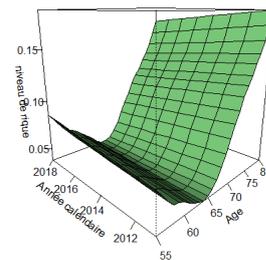
FIGURE 4.28 – Comparaison des coefficients de variation et des taux de décès observés pour les femmes et les hommes

D'après le graphique ci-dessus, on observe que les coefficients de variation tendent à diminuer au fil des années, ce qui est cohérent avec l'augmentation du nombre de décès observés au cours de cette période.

Le graphique ci-dessous illustre la dispersion des taux d'expérience après l'application du Bootstrap, offrant ainsi une vue d'ensemble de la volatilité des taux d'expérience après bootstrap.



(a) Évolutions des coefficients de variations pour les femmes



(b) Évolutions des coefficients de variations pour les hommes

FIGURE 4.29 – Évolutions des coefficients de variation par sexe

On constate une diminution des coefficients de variation chez les hommes et les femmes autour de l'âge de 65 ans, bien que l'augmentation de l'âge soit généralement associée à une amplification des fluctuations d'échantillonnage (comme le montrent les graphiques des taux bruts pour les hommes et les femmes, voir fig. 4.11b et 4.11a).

On peut aussi affirmer sans hésitation que la baisse des coefficients de variation entre les âges de 55 et 65 ans est directement liée à l'augmentation des taux de décès observés durant cette période. Toutefois, au-delà de 65 ans, les coefficients de variation repartent à la hausse, ce qui indique que l'effet des fluctuations d'échantillonnage à des âges plus avancés devient plus fort que l'effet de l'augmentation des décès généralement constatée à ces âges élevés.

De plus, l'augmentation des coefficients de variation ne semble pas vouloir se stabiliser pour la population féminines en particulier, ce qui s'explique par le faible nombre de décès observés parmi notre population assurée aux âges avancés.

4.6.5 Intervalles de confiance aux titres de la fluctuation d'échantillonnage

Pour compléter notre étude sur la robustesse du modèle retenu un encadrement des taux théoriques en termes de risque d'estimation à été effectué à la suite du bootstrap du nombre de décès. "Le graphique des femmes pourra être apprécié dans les annexes (voir fig A.1).

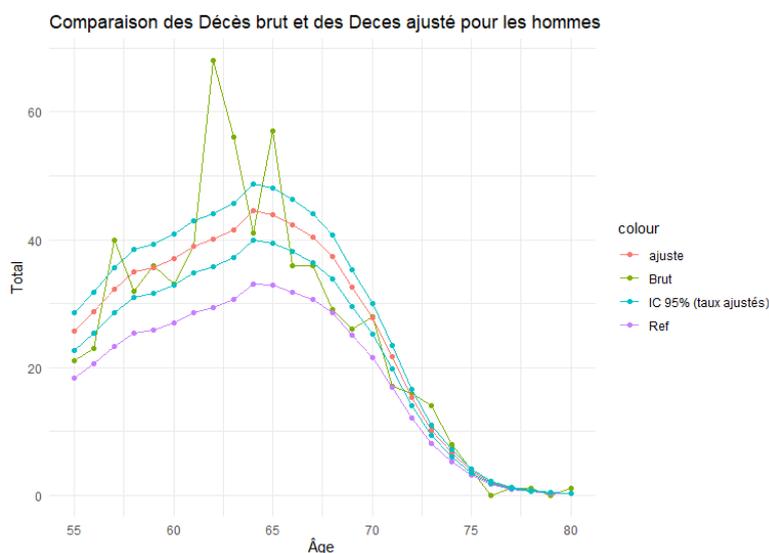


FIGURE 4.30 – Intervalles de confiance au titres du risque d'estimations (H)

Ce graphique confirme la robustesse de notre modèle de Brass, car les taux d'expérience observés sont correctement encadrés par l'intervalle de confiance, construit selon le principe des bandes de confiance établies à partir des simulations. De plus, les nouveaux intervalles de confiance à 95 %, basés sur le principe de construction des bandes de confiance, offrent une plage de taux d'expérience possible plus pertinente que l'intervalle de confiance ponctuel à 95 %.

4.7 Table de mortalité unisexe

Dans cette section, l'objectif est de déterminer la première table unisexe en utilisant une approche par la moyenne. Cette méthode repose sur l'utilisation des tables d'expérience segmentées par le sexe obtenues dans les sections précédentes. Cette approche garantit que la table unisexe soit également *best estimate* et tout aussi fiable que les tables genrées.

Pour élaborer la table unisexe via l'approche par la moyenne, des pondérations selon le sex ratio moyen obtenu sur la période d'observation ont été appliquées sur les taux d'expérience des tables segmentées par le sexe. En somme, au terme de ce chapitre 4, nous disposons de trois tables :

- Deux tables segmentées par le sexe, celle des hommes et celle des femmes, déterminées à l'aide de l'approche globale ou usuelle ;
- Une table unique ou unisexe résultant des deux précédentes l'approche par la moyenne.

Chapitre 5

Construction de table mortalité d'expérience unisexe : *Approche globale ou usuelle*

Ce chapitre est dédié à la construction d'une seconde table unisexe. Pour ce faire, la construction se fait l'approche globale ou usuelle, c'est-à-dire sans procéder à une segmentation par le sexe.

Dans le cadre de la construction de cette seconde table unisexe selon l'approche globale, certaines étapes ne seront pas détaillées, car elles ont déjà été traitées dans le chapitre consacré à la construction des tables de mortalité différenciées par sexe. En ce qui concerne l'étape de **validation des données**, qui vise à assurer la qualité des données afin d'obtenir une meilleure estimation des taux bruts de mortalité, et par conséquent des taux d'expérience, celle-ci a déjà été abordée dans le chapitre précédent. Il s'agit en effet des mêmes données utilisées. Il est néanmoins important de rappeler que la période d'observation ainsi que les tranches d'âge restent inchangées.

5.1 Estimation des taux bruts – table unisexe

5.1.1 Dynamique du nombre de décès et du niveau d'exposition

Les graphiques suivants montrent la dynamique du nombre de décès et du niveau d'exposition selon l'âge pour l'ensemble de la population, sans distinction de sexe. Il convient de relever que la dynamique du nombre de décès dans la population générale est similaire à celle observée chez les hommes (cf. figure 4.8, graphique de la dynamique) :

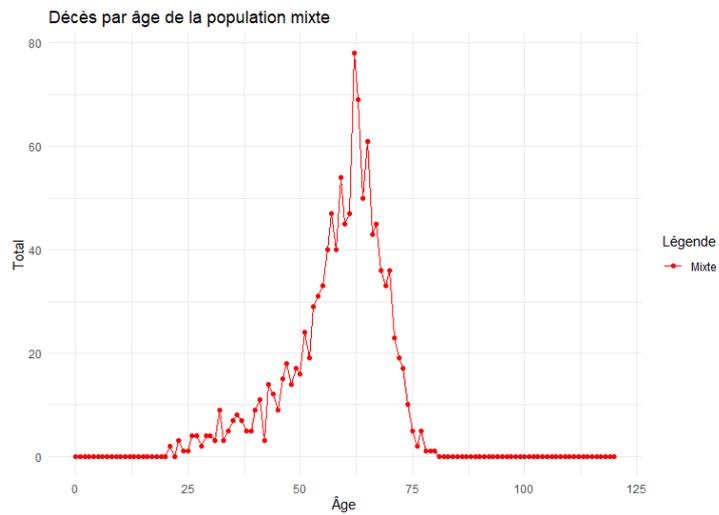


FIGURE 5.1 – Deces de la population générale

De même, le graphique ci-dessous montre l'exposition globale de la population assurée durant la période d'observation :

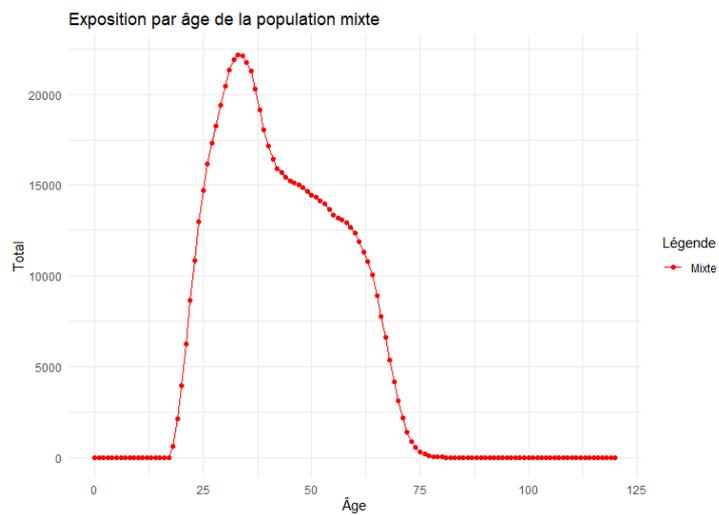


FIGURE 5.2 – Expositions de la population générale

On constate que le niveau d'exposition de la population générale correspond à la superposition des expositions des populations masculine et féminine, obtenues et présentées dans le chapitre précédent.

Il convient de relever le peu de décès voire l'absence de décès au-delà de 80 ans et que l'exposition au risque diminue sensiblement après 75 ans pour la population générale. Cette observation confirme que le choix d'une tranche d'âge pour établir les taux bruts de mortalité.

5.1.2 Taux bruts de mortalité

Dans cette section, nous avons privilégié la dynamique des taux bruts d'expérience de la population, car elle joue un rôle central dans l'évaluation des taux d'expérience de l'ensemble de la population.

Le graphique ci-dessous montre les taux bruts de mortalité observés de la population générale du régime de retraite supplémentaire. Ces taux sont représentés en trois dimensions (âge, année calendaire, le niveau de mortalité). L'évaluation des taux de décès bruts sans distinction de sexe conduit ainsi à la surface suivante :

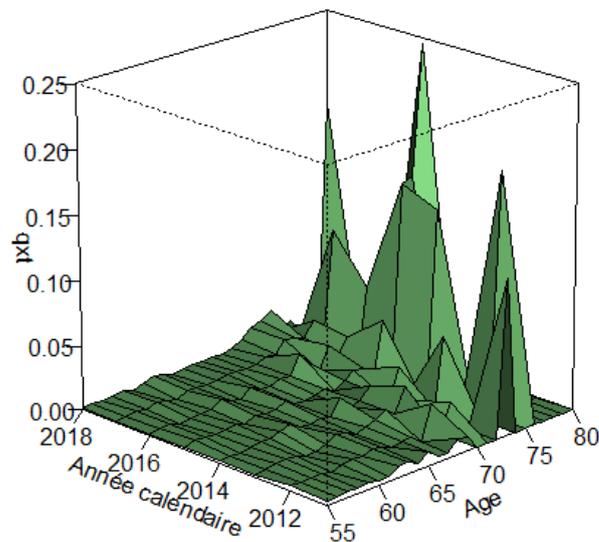


FIGURE 5.3 – Surface des taux brut de la population générale

La surface des taux de décès obtenus présente une volumétrie plus importante que celle des hommes et des femmes examinées dans le chapitre précédent. C'est l'effet de la segmentation par sexe sur une volumétrie de données non significative. Le nombre de décès est donc plus élevé pour la population générale du régime, ce qui présente quelques avantages en termes de précision des analyses, d'identifier des tendances subtiles, de réduire les marges d'erreur ou encore d'apprécier la robustesse du modèle avant une éventuelle utilisation de méthode de rééchantillonnage.

5.2 Ajustement ou lissage des taux bruts – table unisexe

5.2.1 Estimation des paramètres

Dans cette étape, nous procédons à l'estimation des paramètres du modèle de Brass. Contrairement au chapitre précédent, d'autres modèles n'ont pas été utilisés du fait d'un postulat a priori qui suppose que le modèle est également adapté pour estimer les taux d'expérience unisexes.

Pour estimer les paramètres du modèle de Brass, seule la fonction de perte ϕ_2 a été appliquée. Après ajustement des données d'expérience selon ce modèle, les paramètres suivants ont été obtenus :

Critères d'optimisation	Modele	Population générale
$\Phi_2(a, b)$ avec TGH 05	Brass	$a = 0,989$; $b = 1,12 * 10^{-8}$
$\Phi_2(a, b)$ avec TGF 05	Brass	$a = 1,1613$; $b = 1,3189$

FIGURE 5.4 – Paramètres estimés pour la population générale

Compte tenu de l'absence d'une table unique réglementaire à notre disposition, les tables TGH/TGF 05 ont été utilisées comme références pour les ajustements. Le choix d'une seule table de référence aurait pu se porter, a priori, sur la table TGF05, mais après réflexion, il a été jugé pertinent d'ajuster les données en utilisant chacune des tables et de porter une analyse critique sur les axes de validation des taux d'expérience.

5.2.2 Mesure de la qualité d'ajustement

La qualité de l'ajustement a été évaluée à l'aide de cinq critères : le coefficient R^2 , le test du Khi-deux χ^2 , le MAPE, l'incertitude d'échantillonnage et le SMR. Comme mentionné précédemment, le modèle de Brass a été retenu. Les résultats suivants permettent ainsi d'évaluer ces critères de qualité appliqués aux deux tables de référence TGH/TGF

05 :

Fonctions d'optimisation	$\Phi_1(a, b)$ avec TGH 05	$\Phi_2(a, b)$ avec TGF 05
Khi deux χ^2	31,03%	32,82%
R2	87,20%	86,70%
Incertitude d'échantillonnage moyen	1,0773	1,0563
SMR	1,0406	1,0418
MAPE(%)	19,17%	20,46%

FIGURE 5.5 – Critères de qualités pour la population générale

Les résultats obtenus concernant les critères de qualité montrent que les taux d'expérience unisexe, déterminés en utilisant la TGH 05 comme table de référence, offrent de meilleurs ajustements. Toutefois, des analyses complémentaires ont été menées pour conforter le choix de cette table comme référence externe à retenir pour l'élaboration des taux d'expérience unisexe.

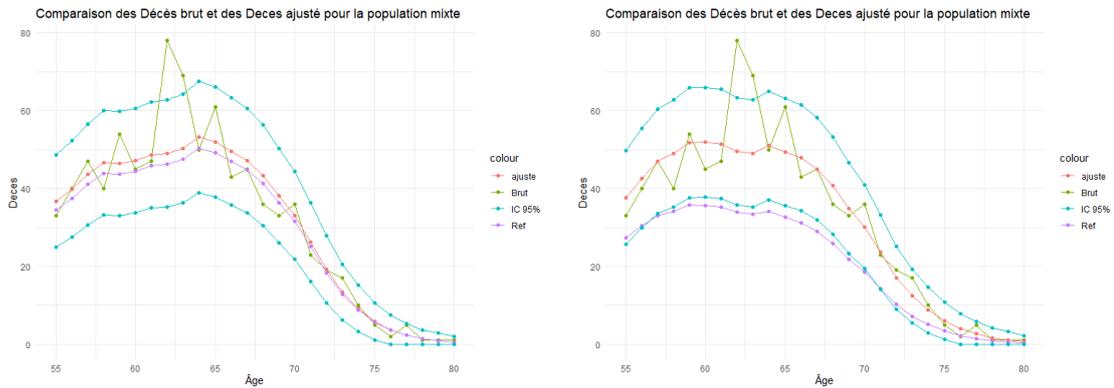
Il convient de relever que l'étape d'extrapolation n'est pas abordée dans ce chapitre. Le principe a déjà été abordé et détaillé dans le chapitre précédent. De plus, nous disposons à ce stade des tables de référence TGH 05 et TGF 05 extrapolées obtenues précédemment.

5.3 Tables de mortalité – table unisexe

5.3.1 Tendances passées

Pour valider le modèle, l'approche utilisée au chapitre précédent demeure inchangée. La première étape consiste à comparer les décès observés aux décès estimés et, la seconde étape conduit à évaluer l'espérance de vie générationnelle résiduelle issue des ajustements (voir le point lié aux tendances futures).

Ce graphique présente l'évolution des décès observés et ajustés en fonction de l'âge de l'ensemble de la population, et ce, selon la table de référence TGH et TGF 05; les bornes inférieure et supérieure des intervalles de confiance (IC) ponctuels à 95 % pour les taux théoriques y sont également présentés :



(a) Comparaison des décès observés et prédits avec TGH 05

(b) Comparaison des décès observés et prédits avec TGF 05

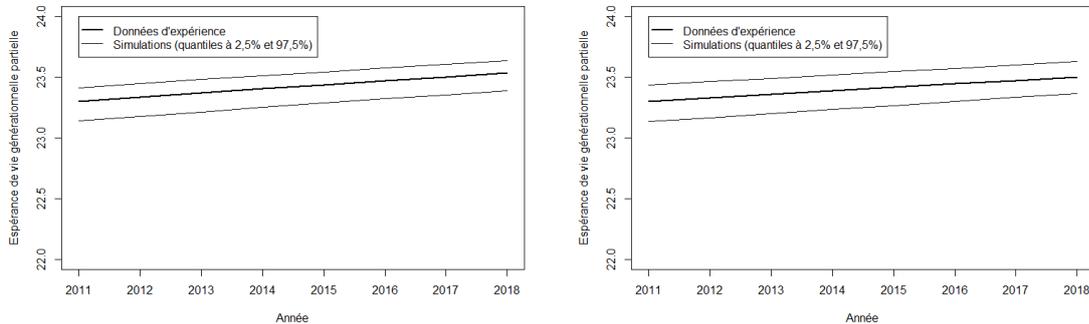
FIGURE 5.6 – Comparaison des décès observés et prédits pour la population générale

Ce visuel montre que les taux d'expérience déterminés à l'aide des tables TGH/TGF 05 s'ajustent globalement bien aux taux bruts, avec un ajustement particulièrement pertinent pour la table TGH05 en tant que référence. De plus, pour la plupart des tranches d'âge, les décès observés se situent dans les intervalles de confiance à 95 %, ce qui confirme la capacité du modèle à bien représenter les données réelles observées.

5.3.2 Tendances futures

Pour mémoire, l'analyse des tendances futures repose sur deux observations distinctes. Tout d'abord, elle examine les résultats liés aux espérances de vie générationnelle partielle. Ensuite, elle s'intéresse aux espérances de vie générationnelle résiduelle.

A titre exemple, l'encadrement de l'espérance de vie générationnelle partielle de la population générale, en utilisant la table TGH 05 ou TGF 05 comme table de référence, et ce, pour les âges compris entre $x_0 = 55$ ans et $x_0 + n = 80$ ans, durant la période allant de $t_0 = 2011$ à $t_0 + m = 2018$, est illustré dans la figure ci-dessous :



(a) Exemples d'espérance de vie partielles pour la population générale avec TG H 05 (b) Exemples d'espérance de vie partielles pour la population générale avec TG F 05

FIGURE 5.7 – Exemples d'espérance de vie partielles pour la population générale

Il ressort que les espérances de vie générationnelle partielle issues des deux tables sont globalement proches. Les graphiques montrent également que l'espérance de vie générationnelle partielle suit une tendance croissante au fil des années, ce qui est cohérent et reflète l'amélioration de la mortalité au fil du temps.

Le graphique ci-après montre que l'espérance de vie générationnelle partielle, associée à la population générale du régime, se situe systématiquement entre celle des hommes et celle des femmes, et ce, quelle que soit la table de référence choisie :

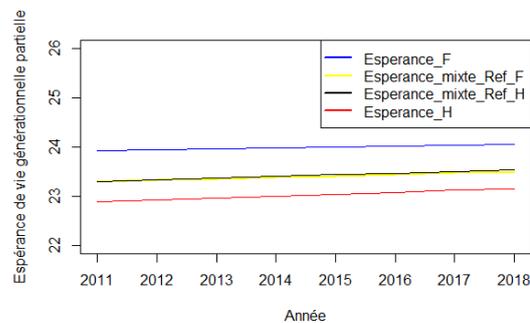


FIGURE 5.8 – Exemple de comparaison des espérances de vie générationnelles

Une précision pour la lecture de la légende du graphique :

- **Espérance_F** : correspond à l'espérance de vie générationnelle résultant de la table genrée déterminée à partir de la TGF05
- **Espérance_H** : correspond à l'espérance de vie générationnelle résultant de la

table genrée déterminée à partir de la TGH05

- **Espérance_mixte_Ref_F** : correspond à l'espérance de vie générationnelle résultant de la table unisexe construite en utilisant la table TGF05 comme référence externe
- **Espérance_mixte_Ref_H** : correspond à l'espérance de vie générationnelle résultant de la table unisexe construite en utilisant la table TGH05 comme référence externe

On observe que l'espérance de vie générationnelle de la table unisexe est, dans cet exemple, plus proche de celle de la TGH05. Cela s'explique probablement par plusieurs facteurs dont la dynamique des décès des hommes et l'exposition des femmes qui sortent du portefeuille pour des motifs autres que le décès. En outre, l'exposition des hommes au risque reste plus constante jusqu'à leur départ à la retraite.

L'analyse de l'espérance de vie résiduelle montre que la table TGH 05, en tant que référence, donne une espérance de vie légèrement plus élevée pour la population mixte que la TGF 05. Bien qu'on aurait pu penser que la TGF 05 augmenterait l'espérance de vie pour une population mixte, les critères de qualité ont confirmé également que la TGH 05 est finalement plus appropriée.

Pour compléter l'analyse relative à la validation de la table de mortalité unisexe, nous comparons les espérances de vie générationnelles résiduelles obtenues à certains âges et de la projection de 2018 avec celles issues des tables de mortalité prospectives genrées. Pour ce faire, différents hypothèses d'âge de début et de fin ont été considérées pour évaluer l'espérance de vie générationnelle résiduelle, comme le montre le tableau ci-dessous :

Espérance de vie générationnelle - année d'observation t = 2018						
Âges	Hommes		Femmes		Tables unisexes - approche usuelle	
	Table d'expérience du mémoire	TGH05	Table d'expérience du mémoire	TGF05	TGH05 comme référence externe	TGF05 comme référence externe
Age 55 / Âge fin 120	32,74	34,46	37,65	38,09	34,15	32,93
Age 65 / Âge fin 120	22,57	23,98	26,94	27,47	23,72	22,42
Age 75 / Âge fin 120	13,55	14,53	16,76	17,38	14,35	12,66
Age 85 / Âge fin 120	6,60	7,09	8,31	8,96	7,00	5,17

FIGURE 5.9 – Comparaison des espérances de vie générationnelles

Les résultats des espérances de vie générationnelle conduisent à privilégier la table basée sur la TGH 05 comme table de référence. En effet, cette table produit des espérances de vie générationnelle proches de celles de la TGF 05 pour l'année de projection 2018 évitant ainsi une surestimation de la mortalité. Cette comparaison avec la TGF 05

visé à maintenir une certaine prudence dans l'évaluation des engagements.

Nous constatons également que les taux bruts déterminés de la population générale du régime sont très proches de ceux des hommes. Cette observation renforce et confirme l'intérêt de conserver la TGH 05 comme référence pour l'ajustement des taux d'expérience unisexes.

En définitive, la table TGH05 est la table de référence retenue pour établir sur les taux d'expérience de la table unisexé par l'approche usuelle.

5.3.3 Bandes de confiance

L'approche de la construction des bandes de confiance suit la même méthode que celle utilisée pour les tables de mortalité segmentées par le sexe (cf. chapitre précédent) et, une analyse par les bandes de confiance a été effectuée. Pour rappel, les bandes de confiance sont un bon outil pour apprécier l'incertitude autour de l'ensemble des valeurs d'une courbe.

Le graphique ci-dessous illustre l'encadrement des taux de décès prédits sur la plage d'âge de 55 ans à 80 ans et de l'année d'observation de 2017, en utilisant la table TGH05 comme table de référence externe :

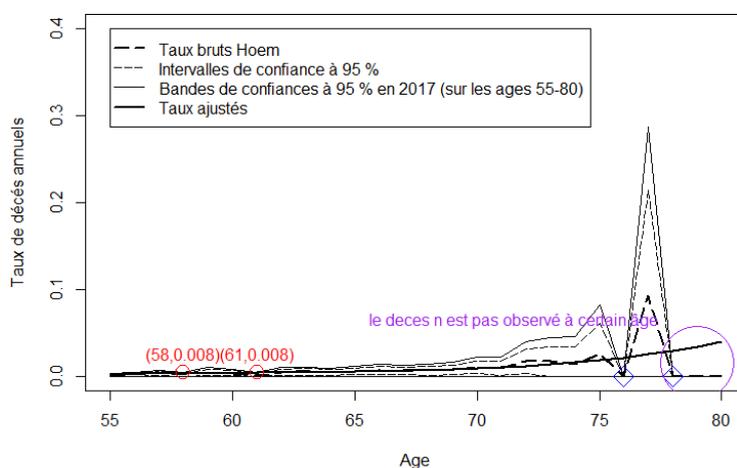


FIGURE 5.10 – Bandes de confiances en 2017 avec TGH 05 de la table unisexé

On observe que les bandes de confiance sont plus larges que les intervalles de confiance et qu'elles encadrent les taux ajustés pour tous les âges entre 55 et 75 ans durant la période d'observation. Cependant, cette observation ne se vérifie plus pour les âges au-delà

de 75 ans. Ce constat s'explique par la taille de l'échantillon et le faible nombre de décès observés à partir de 76 ans.

Malgré un nombre de décès accru chez les affiliés, compte tenu de l'absence de segmentation par sexe, la faible profondeur historique des données rend tout de même difficile l'observation des décès à certains âges. Les analyses montrent l'intérêt de construire des bandes de confiance pour une année d'observation donnée. Celles-ci s'avèrent plus adaptées (voir âges 58 et 61 ans) que les intervalles de confiance ponctuels pour encadrer les taux de décès théoriques sur une plage d'âges.

5.3.4 Bootstrap

Dans cette section, une analyse complémentaire a été réalisée pour évaluer la robustesse du modèle. L'objectif est de vérifier la cohérence de l'évolution des coefficients de variation théoriques par rapport au nombre de décès observés dans la population générale du régime de retraite supplémentaire, tout en examinant la dispersion des taux d'expérience. Pour ce faire, le nombre de décès a été standardisé, sans que cela n'altère les résultats.

En raison de la variabilité importante des données à certains âges, nous avons effectué 2 000 simulations par bootstrap des taux théoriques. Les deux graphiques ci-joints permettent une évaluation critique de la cohérence entre les taux de décès observés et les coefficients de variation théoriques, ainsi qu'une analyse de la dispersion des taux d'expérience après bootstrap.

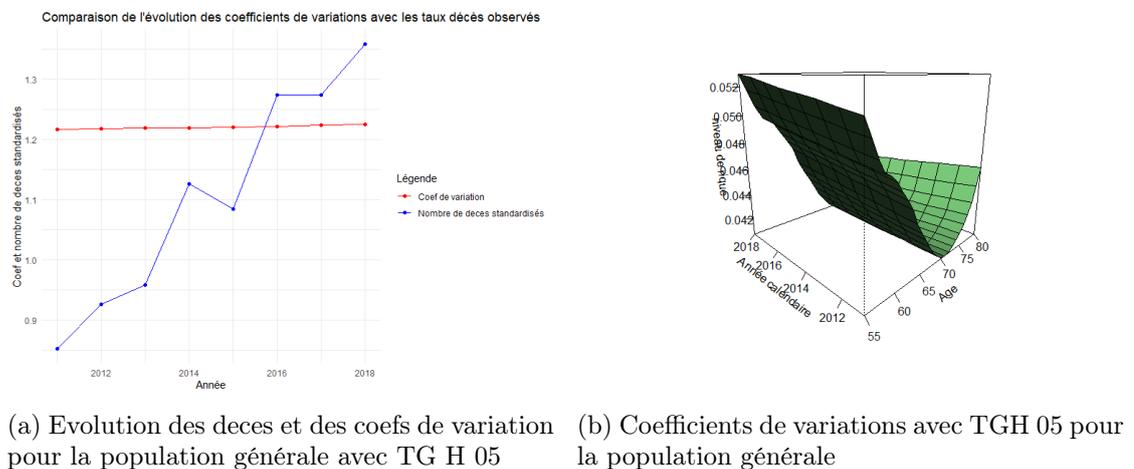


FIGURE 5.11 – Analyse de la dispersion des taux d'expérience

D'après le graphique de gauche, illustrant l'évolution des décès et des coefficients de variation, on observe une légère hausse des coefficients de variation au fil des années.

Cette tendance suggère que le nombre de décès observés reste insuffisant pour représenter pleinement la population générale en l'absence de distinction de genre. Par ailleurs, le graphique de droite montre une stabilité relative des coefficients de variation, oscillant entre 4,2 % et 5,2 % pour tous les âges mettant en exergue une stabilité des taux d'expérience.

5.3.5 Intervalles de confiance au titre de la fluctuation d'échantillonnage

Dans cette partie, une analyse complémentaire à l'étude relative à la robustesse du modèle a été menée. A la suite de l'application de la méthode bootstrap sur le nombre de décès, on a procédé à un encadrement des taux théoriques en termes de risque d'estimation. Nous avons encadré les taux théoriques unisexes en termes de risque d'estimation à l'aide d'intervalles de confiance à 95 %, déterminés à partir de simulations qui tiennent compte des fluctuations d'échantillonnage :

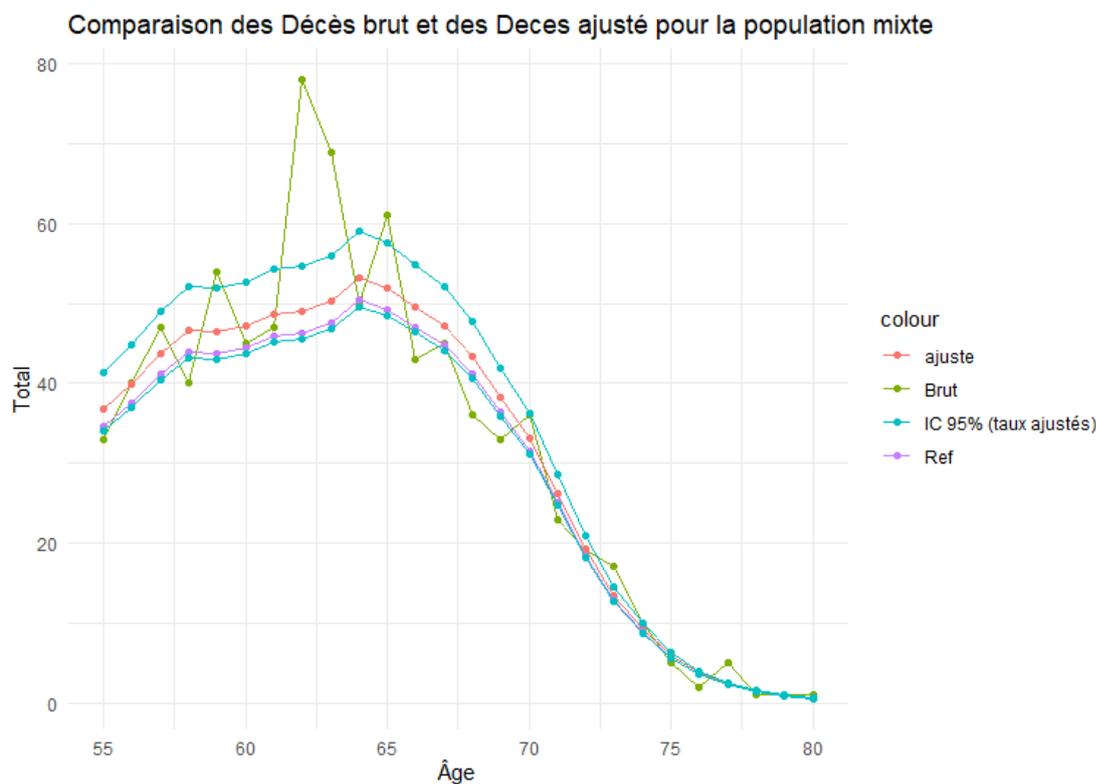


FIGURE 5.12 – Intervalles de confiances aux titres de fluctuations d'échantillonnages

Dans le cadre de la construction de la table unisexes selon l'approche globale, on constate également que le graphique présenté ci-dessus confirme la robustesse de notre

modèle de Brass, car les taux d'expérience observés sont correctement encadrés par l'intervalle de confiance, construit selon le principe des bandes de confiance établies à partir des simulations. De plus, les nouveaux intervalles de confiance à 95 %, fondés sur le principe de construction des bandes de confiance, offrent une plage de taux d'expérience possible plus pertinente que l'intervalle de confiance ponctuel à 95 %.

En résumé, au terme de ce chapitre, nous disposons d'une table unisexe déterminée par l'approche globale.

Chapitre 6

Impact des tables d'expérience sur le provisionnement

Les précédents chapitres récapitulent les approches qui ont abouti à construire quatre tables de mortalité prospectives d'expérience dont deux tables segmentées par le sexe et deux tables unisexes obtenues en utilisant deux différentes approches. Ce chapitre 6 est consacré à l'incidence des tables obtenues sur les évaluations des engagements des affiliés et les engagements de l'Institution. En revanche, compte tenu du temps nécessaire pour traiter l'incidence sur la tarification d'un régime de retraite supplémentaire en point qui pourrait faire l'objet d'un sujet de mémoire, ce chapitre 6 a été réduit à l'incidence des tables obtenues sur le provisionnement S2 notamment la meilleure estimation des provisions hors marge pour risque.

Ce chapitre est également l'occasion de rapprocher les tables obtenues des tables d'expérience différenciées en vigueur construites par le cabinet indépendant et expert en la matière, Prim'Act. Ce qui a permis d'une certaine manière de conforter des décisions prises au cours des travaux de ce mémoire.

Il convient de préciser au préalable que ce mémoire n'a pas pour vocation de revenir sur les principes fondamentaux de la Norme Solvabilité 2 ou sur les détails et précisions des modèles de génération des scénarios économiques. Ainsi, les évaluations réalisées ont été guidées par la mesure de l'incidence des tables sur la meilleure estimation des provisions des engagements sans déterminer la marge pour risque malgré l'impact certain sur le risque de longévité.

6.1 Rapprochement des tables de mortalité

Cette partie est dédiée au rapprochement entre les tables obtenues issues de ce mémoire et les tables en vigueur construites par un cabinet indépendant en actuariat et expert en construction de tables d'expérience. À cette fin, le tableau ci-après compare les espérances de vie générationnelles calculées à partir des tables d'expérience déterminées

par le cabinet Prim'Act avec celles résultant des travaux de ce mémoire. Ces espérances de vie générationnelles sont calculées à des âges différents. Les résultats sont présentés ci-dessous :

Espérance de vie générationnelle partielle				
Âges	Hommes		Femmes	
	Table du mémoire	Table en vigueur	Table du mémoire	Table en vigueur
Age : 55 / Age fin :120	32,7	33,6	37,66	37,70
Age : 65 / Age fin :120	22,6	23,1	26,94	26,70
Age : 75 / Age fin :120	13,6	13,7	16,76	16,20
Age : 85 / Age fin :120	6,6	6,4	8,31	7,90

FIGURE 6.1 – Comparaison des espérance de vies générationnelles

L'analyse des résultats du tableau ci-dessus montre que les espérances de vie générationnelles résiduelles déterminées dans les travaux de ce mémoire sont très proches de celles actuellement en vigueur, aussi bien pour les hommes que pour les femmes. Les écarts observés dans ces résultats s'expliquent par plusieurs facteurs, notamment :

- Le nombre de lignes exploitées tout au long du mémoire diffère de celui utilisé par Prim'Act,
- L'abattement de 3% appliqué par Prim'Act sur les tables de référence,
- L'hypothèse selon laquelle la mortalité des femmes est égale à 75% de celle des hommes à partir de 90 ans,
- Des approches différentes dans l'évaluation des expositions.

6.2 Impact sur le provisionnement

Toutes les tables obtenues ont été utilisées pour effectuer des analyses de sensibilité sur le provisionnement en Best Estimate. Dans un premier temps, nous comparerons l'évolution de la meilleure estimation (BE) des provisions associées aux tables de mortalité genrées actuellement en vigueur avec celle déterminée dans ce mémoire. Ensuite, nous évaluerons la sensibilité globale de la BE des provisions des tables genrées actuelles par rapport à celle des quatre tables définies dans cette étude.

Cette évaluation de sensibilité sera effectuée à travers la projection des flux de prestations. En effet, étant donné que la projection des prestations s'étend sur un horizon de

110 ans en mode « run-off » en prenant en compte une seule année de cotisation du fait de la Frontière des contraires des contrats, il paraît pertinent de mesurer l'impact sur la meilleure estimation des provisions (hors marge pour risque).

Pour mémoire, conformément au règlement délégué (UE) 2015/35 du 10 octobre 2014, les provisions techniques sont calculées d'une manière prudente, fiable et objective et leur calcul est fondé sur des hypothèses réalistes dont les tables de mortalité prospectives d'expérience en vigueur tenant une approche Best Estimate.

Le portefeuille des affiliés utilisé sont les données de l'arrêté à fin décembre 2023 du Régime de la Retraite Supplémentaire. L'arrêté des comptes est réalisé en approche « Fast close » à partir des données à fin août 2023. Le décalage par rapport à la date d'arrêté est pris en compte dans les calculs de provisions techniques comptables et Best Estimate.

Pour le Régime Retraite Supplémentaire, la provision Best Estimate (hors marge pour risque) est calculée par la somme actualisée au taux sans risque des flux de prestations revalorisés et des frais, diminués des flux de cotisations de l'année N+1 en tenant compte de la frontière des contrats, et ce, en tenant compte des flux de prestations de fin de projection et la fuite du modèle le cas échéant.

6.2.1 Incidence des tables générées sur le Best Estimate

Cette partie présente la projection des flux de prestations en mode déterministe sans revalorisation des prestations sur un horizon de 110 ans en tenant compte d'une seule année de cotisation du fait de la frontière des contrats. Comme annoncé précédemment, il s'agit du portefeuille des affiliés du Régime de la Retraite Supplémentaire à fin décembre 2023.

La projection des flux de prestations futures permettent de mesurer l'incidence des tables obtenues à l'issue de ce mémoire sur les engagements futurs. Pour ce faire, deux scénarios selon les tables utilisées ont été retenus.

- Scénario 1 : tables différenciées par le sexe, tables générées en vigueur (Prim'Act)
- Scénario 2 : tables différenciées par le sexe, tables générées résultant du mémoire

Les principales hypothèses non-économiques retenues :

Hypothèses	Valeur
Âge théorique de départ à la retraite	Table selon l'année de naissance en tenant compte de la réforme de retraite de 2023
Taux de nuptialité jusqu'à 62 ans	71%
Ecart d'âge entre conjoint	-3 ans si reversataire femme +1 an si reversataire homme
Choix d'option à la liquidation	- Option 1 (taux 0%) : 71,52% des nouveaux retraités
	- Option 2 (Taux 60%) : 12,40% des nouveaux retraités
	- Option 3 (taux 100%) : 16,09% des nouveaux retraités
Seuil de sortie en capital (petite rentes)	1 320 €
Modalité de sorties au-delà du seuil par compartiment	C1 : 100% Capital
	C2 : 100% Capital
	C3 : 100% Rente
Taux de transferts	0,067% (Actifs)
	1,001% (Radiés)
Taux de rachats	0,162%
Fast-Close	Prorata sur les points acquis entre l'extraction en novembre et l'inventaire au 31/12/2023

Le graphique ci-après montre l'impact des nouvelles tables sur l'écoulement des prestations probables :

- La courbe en bleu représente la projection des flux obtenus à partir des tables en vigueur (Prim'Act) différenciées par le sexe - Scénario 1
- La courbe en rouge représente la projection des flux obtenus à partir des tables issues du mémoire (EPS) différenciées par le sexe - Scénario 2

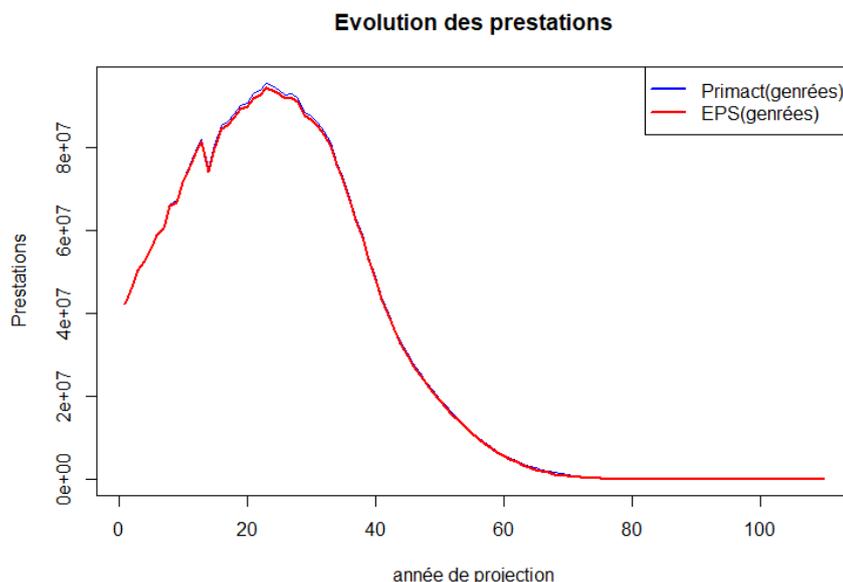


FIGURE 6.2 – Tables Prim’Act et Tables mémoire

Ce graphique montre que l’utilisation des tables générées issues des travaux de ce mémoire aboutit à des résultats globalement similaires aux tables en vigueur établies par Prim’Act. Le passage à ces nouvelles tables générées diminue le total brut des prestations futures probables de moins de 1%, ce qui est cohérent avec la durée moyenne des prestations qui reste quasiment inchangée (environ 24 ans). En effet, la durée moyenne des paiements des prestations futures probables est d’environ 24,21 années en utilisant les tables générées en vigueur et, de 24,10 années avec les tables générées résultant des travaux de ce mémoire, soit un écart de moins de deux mois pour un régime de retraite supplémentaire dont les prestations sont trimestrielles à terme à échoir.

Best Estimate hors marge pour risque

En complément de la projection des flux futurs des prestations (voir le graphique ci-dessus), une valorisation des engagements en norme Solvabilité 2 a été effectuée à partir des données à fin décembre 2023, et ce, selon les deux scénarios définis ci-dessus.

La provision « Best Estimate » correspond à la moyenne pondérée par leurs probabilités des flux de trésorerie futures compte tenu de la valeur temporelle de l’argent. Le calcul est effectué en mode stochastique afin de capter le coût des options et garanties financières. La meilleure estimation est calculée à partir de 1000 scénarios stochastiques.

Pour le régime de retraite supplémentaire, cela implique des flux projetés tels que les capitaux et rentes de réversion, les pensions de retraite, le nombre de points acquis,

les flux de cotisations et de prestations, les flux de coûts et les provisions comptables. La valorisation de ces éléments et l'application des décisions de gestion sont effectuées à chaque étape de projection, en utilisant les informations transmises par le module d'interaction actif-passif.

Le tableau suivant récapitule les résultats obtenus de la meilleure estimation des provisions hors marge pour risque des deux scénarios :

Meilleure estimation des provisions - Hors marge pour risque				
Tables utilisées	BE - Scénario 1	BE - Scénario 2	Ecart absolu	Ecart relatif
Tables générées	2 893 002 745 €	2 868 932 692 €	- 24 070 053 €	-0,832%

FIGURE 6.3 – Évaluation des BE à fin décembre 2023

Le calcul du BE avec les tables générées issues du mémoire (scénario 2) aboutit à une provision totale, hors marge pour risque de 2 869 M€ contre 2 893 M€ avec les tables en vigueur établies par Prim'Act, soit un écart peu significatif de -0,83%. Cet écart non significatif provient en partie par quelques différences d'approche méthodologiques mentionnées. L'ensemble des résultats obtenus conforte et processus arrêté pour la construction des deux tables de mortalité prospectives différenciées par le sexe.

6.2.2 Incidence des tables unisexes sur le Best Estimate

Cette section compare les espérances de vie résiduelles des tables unisexes obtenues par deux approches différentes : l'approche globale et l'approche par la moyenne. Une analyse d'incidence des quatre tables issues de ce mémoire sur la meilleure estimation des provisions hors marge pour risque.

Le tableau ci-dessous compare les espérances de vie générationnelles des deux tables unisexes :

Espérance de vie générationnelle partielle -Tables unisexes			
Âges	Approche usuelle	Approche pondérée	Ecart
Age : 55 /Age fin :120	34,15	35,34	-1,19
Age : 65 /Age fin :120	23,72	24,88	-1,16
Age : 75 /Age fin :120	14,35	15,25	-0,90
Age : 85 /Age fin :120	6,99	7,50	-0,51

FIGURE 6.4 – Espérance de vie générationnelles pour la projection 2018

Le rapprochement avec les tables d'expérience genrées (cf. figure 6.1) montre que les espérances de vie générationnelles unisexes se situent entre celles des hommes et des femmes, ce qui est conforme aux attentes.

L'approche par la moyenne donne une espérance de vie générationnelle unisexe supérieure à celle de l'approche globale, mettant en évidence une inadéquation entre les taux de mortalité de la population générale et la proportion d'hommes et de femmes. Il devient donc important d'évaluer l'incidence des tables unisexes sur les engagements.

Pour mener une analyse de l'incidence des tables sur les engagements quatre scénarios ont été définis dont deux scénarios reconduits pour des besoins de rapprochement :

- Scénario 1 : tables différenciées par le sexe, tables genrées en vigueur (Prim'Act)
- Scénario 2 : tables différenciées par le sexe, tables genrées du mémoire
- Scénario 3 : table unisexe résultant de l'approche par la moyenne
- Scénario 4 : table unisexe résultant de l'approche globale sans segmentation

Le graphique ci-après montre l'impact des nouvelles tables sur l'écoulement des prestations futures probables :

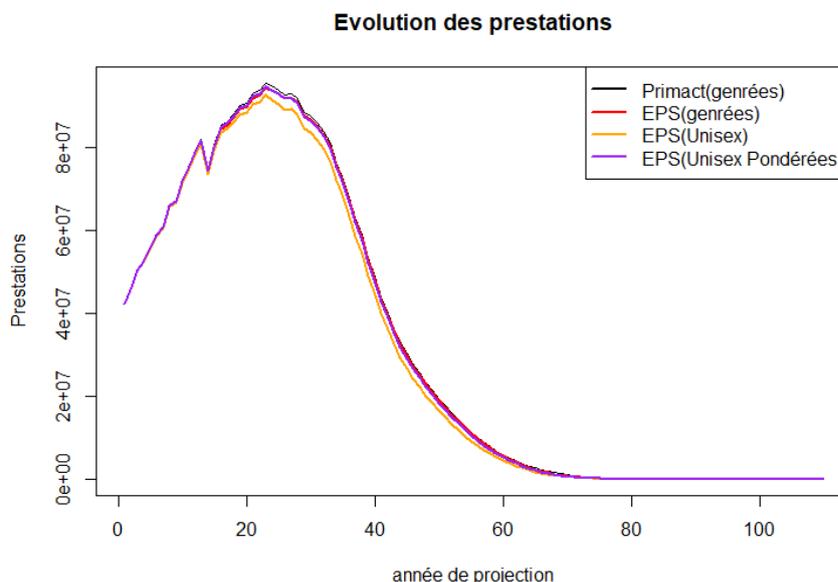


FIGURE 6.5 – Écoulement des prestations à partir du portefeuille au 31/12/2023

Le graphique montre que pour l'ensemble des tables, l'écoulement du passif est globalement similaire. Cependant, on observe un léger décrochage des flux de prestations futures probables obtenus à partir de la table unisex déterminée par l'approche globale. Cette différence est également visible dans les écarts de durée du passif (durée moyenne des paiements de prestations futures probables).

Best Estimate hors marge pour risque

En complément de la projection des flux futurs des prestations (voir figure 6.3), une valorisation des engagements en norme Solvabilité 2 a été effectuée à partir des données à fin décembre 2023, et ce, selon les deux scénarios définis ci-dessus. Les hypothèses présentées précédemment demeurent inchangées excepté les tables selon les quatre scénarios présentés ci-dessus.

Le tableau suivant met en évidence les niveaux de provisions correspondants et les impacts observés entre le scénario 1 central et les trois autres scénarios alternatifs :

Tables utilisées	Best Estimate	Ecart absolu	Ecart relatif	Duration
Tables générées (en vigueur)	2 893 002 745 €	Néant	Néant	24,21
Tables générées (mémoire)	2 868 932 692 €	-24 070 053 €	-0,83%	24,10
Table unisexe pondérée (mémoire)	2 865 118 891 €	-27 883 854 €	-0,96%	23,96
Table unisexe (mémoire)	2 801 004 223 €	-91 998 522 €	-3,18%	23,57

FIGURE 6.6 – Évaluation des BE sur l'ensemble des tables en fin d'année 2023

L'analyse montre une cohérence entre la duration du portefeuille et le niveau de la meilleure estimation (BE) des provisions. Cette cohérence est renforcée en comparant les espérances de vie générationnelles.

L'analyse révèle une cohérence entre la duration du portefeuille et le niveau de la meilleure estimation (BE) correspondant. La meilleure estimation des provisions est moins sensible aux tables générées et à la table unisexes obtenue par l'approche par la moyenne, un écart relatif de -1%. En revanche, le BE est plus sensible à la table unisexe obtenue par l'approche globale avec un écart relatif sensible de plus de 3% par rapport à la provision calculée avec les tables d'expérience en vigueur. Cette forte sensibilité confirme l'inadéquation entre la mortalité générale observée dans la population assurée et le sex-ratio hommes/femmes, due au fait que les femmes quittent le portefeuille, pour des raisons autres que le décès, plus rapidement que les hommes à partir d'un certain âge.

Conclusion

Ce mémoire avait pour objectif de déterminer une table d'expérience unisexe pour la population générale affiliée au régime de retraite supplémentaire de l'Institution. Les approches retenues ont abouti à la construction de quatre tables de mortalité prospectives d'expérience dont deux tables uniques non différenciées par le sexe. Les approches et les modèles retenus ont été éprouvés par des critères de qualité adaptés.

Les rapprochements avec les tables en vigueur établies par un cabinet indépendant d'actuaire experts ou des tables réglementaires TGF/TGH 05 confortent le processus et certaines décisions prises durant les travaux de ce mémoire. L'incidence de l'utilisation de toutes tables de mortalité prospectives d'expérience de ce mémoire sur la meilleure estimation des provisions est mesurée peu sensible excepté pour la table unisexe obtenue par l'approche usuelle dont l'écart relatif est de plus de 3%.

Les analyses menées ont également révélé une inadéquation significative entre l'effectif de la population observée et le niveau de mortalité générale. Les taux bruts de mortalité observés étaient plus proches de ceux des hommes que des femmes. De même, l'espérance de vie générationnelle résiduelle de la population générale se rapprochait davantage de celle des hommes que des femmes, alors que la population était composée de 55% de femmes. Une analyse a montré que les femmes quittent le portefeuille plus rapidement que les hommes pour des raisons autres que le décès.

Une analyse menée mesure l'impact de l'utilisation d'une table de mortalité unisexe par rapport à d'autres approches comme les tables genrées ou une moyenne pondérée. Il souligne que les tables pondérées restent plus prudentes que la table unisexe ajustée. Les travaux ont également démontré la cohérence globale des tables d'expérience genrées, permettant un suivi technique de l'évolution de la mortalité sur des nouvelles périodes d'observation, en prenant une nouvelle période allant jusqu'à fin décembre 2022.

Bien que la loi sur l'industrie verte ne modifie pas les règles d'utilisation des tables de mortalité pour le provisionnement, l'utilisation des tables de mortalité unisexes permettra de mesurer les impacts sur la tarification et de conforter l'approche actuelle des calculs du barème unique, fonction de l'âge mais non différencié par le sexe, des valeurs d'acquisition des points du Régime de Retraite Supplémentaire. L'approche actuelle contribue et

garantit l'équilibre technique et la pérennité du régime. Ces tables pourraient également être utilisées pour d'autres études telles les mesures du risque de longévité.

Annexe A

Annexe

Dans ces annexes, nous consignerons tous les graphiques que nous avons jugés non nécessaires à inclure dans le corps du mémoire. Néanmoins, nous les ajoutons dans cette annexe pour que les lecteurs puissent les apprécier s'ils le souhaitent.

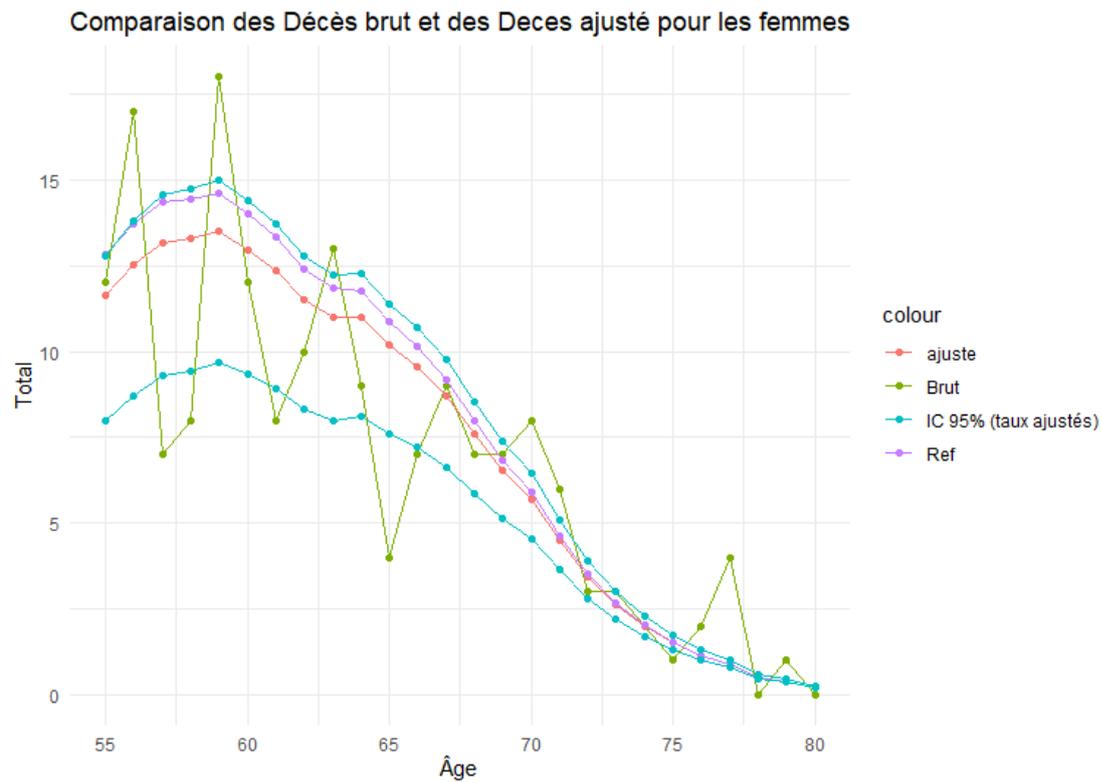


FIGURE A.1 – Intervalles de confiance au titres du risque d'estimations (F)

Bibliographie

- [Brouhns *et al.*, 2002] BROUHNS, N., DENUIT, M. et VERMUNT, J. (2002). *A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables*. Insurance : Mathematics and Economics, No. 31.
- [Delwarde et Denuit, 2006] DELWARDE, A. et DENUIT, M. (2006). *Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives*. Economica.
- [Kamega et Planchet, 2010] KAMEGA, A. et PLANCHET, F. (2010). *Cahiers de recherche de l'ISFA, WP2136*. Mesure du risque d'estimation associé à une table d'expérience.
- [Kamega et Planchet, 2012] KAMEGA, A. et PLANCHET, F. (2012). *Actuariat et assurance vie en Afrique subsaharienne francophone*. Seddita.
- [Lee, 2000] LEE, R. (2000). *The Lee-Carter Method for Forecasting Mortality, with Various Extensions and Applications*. North American Actuarial Journal, Vol. 4, No. 1.
- [Planchet et Lelieur, 2007] PLANCHET, F. et LELIEUR, V. (2007). *Utilisation des méthodes de Lee-Carter et log-Poisson pour l'ajustement de tables de mortalité dans le cas de petits échantillon*. Bulletin Français d'Actuariat, Vol. 7, No. 14.
- [Planchet et Thérond, 2006] PLANCHET, F. et THÉRON, P. (2006). *Modèles de Durée – Applications actuarielles*. Paris : Economica.
- [Planchet et Thérond, 2011] PLANCHET, F. et THÉRON, P. (2011). *Modélisation statistique des phénomènes de durée – applications actuarielles*. Paris : Economica.
- [Planchet et Tomas, 2014a] PLANCHET, F. et TOMAS, J. (2014a). *Institut des Actuaire*. Méthodes de positionnement : aspects méthodologiques.
- [Planchet et Tomas, 2014b] PLANCHET, F. et TOMAS, J. (2014b). *Institut des Actuaire*. Construction et validation des références de mortalité de place.
- [Vermet, 2024] VERMET, F. (2024). *Cours de modèles de durées*.