

**Mémoire présenté devant l'ENSAE Paris  
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat  
et l'admission à l'Institut des Actuaires  
le 10/03/2023**

Par : **Siran HUANG**

Titre : **Modélisation du risque de contrepartie en réassurance**

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres présents du jury de la filière*

*Nom : Nicolas BARADEL*

*Membres présents du jury de l'Institut  
des Actuaires*

*Entreprise : GIE AXA* 

*Signature :*

*Directeur du mémoire en entreprise :*

*Nom : Grégoire GALLOT*

*Signature :*

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents actuariels  
(après expiration de l'éventuel délai de  
confidentialité)**

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise

Bibliothèque :

Signature du candidat

## TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES . . . . .	i
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vi
NOTE DE SYNTHÈSE . . . . .	vii
EXECUTIVE SUMMARY . . . . .	xv
GLOSSAIRE DES ABRÉVIATIONS . . . . .	xxii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 Généralités sur la réassurance	3
1.1 Marché de réassurance en développement . . . . .	3
1.2 Outil pour la gestion des risques . . . . .	4
1.3 Formes et types de réassurance . . . . .	6
CHAPITRE 2 Risque de contrepartie et exigences en fonds propres	10
2.1 Présentation générale du risque de contrepartie . . . . .	10
2.1.1 Risque de contrepartie en réassurance . . . . .	11
2.1.2 Spécialités du risque de contrepartie en réassurance . . . . .	13
2.1.3 Notation de la solidité financière (Financial Strength Rating) . . . . .	16
2.2 Solvabilité et exigence en capital réglementaire . . . . .	18
2.2.1 Cadre réglementaire bancaire . . . . .	19
2.2.2 Cadre réglementaire assurantiel . . . . .	20
2.2.3 Risque de contrepartie en réassurance dans le cadre de Solvabilité II .	23
CHAPITRE 3 Théories des copules multivariées	27
3.1 Définition des copules . . . . .	27
3.2 Copules elliptiques . . . . .	28
3.2.1 Copule Gaussienne multivariée . . . . .	29
3.2.2 Copule de Student multivariée à $\nu$ . . . . .	30

3.3	Copules archimédiennes . . . . .	31
3.3.1	Copule de Clayton multivariée de paramètre $\theta$ . . . . .	32
3.3.2	Copule Gumbel-Hougaard multivariée de paramètre $\theta$ . . . . .	33
3.4	Mesures de dépendance . . . . .	34
3.4.1	Coefficients de corrélation . . . . .	34
3.4.2	Dépendance dans les queues de distribution . . . . .	35
CHAPITRE 4 Risque de contrepartie en réassurance par une approche modèle interne		37
4.1	Présentation générale du modèle interne . . . . .	37
4.2	Modèle de Ter Berg . . . . .	41
4.3	Modèle de Merton . . . . .	43
4.4	Généralisation de nouveaux évènements de notations . . . . .	45
4.4.1	Définition des seuils de la valuation des actifs . . . . .	45
4.4.2	Choix de nouvelle notation . . . . .	48
CHAPITRE 5 Réduction de la volatilité du STEC RCR		50
5.1	Structure du portefeuille . . . . .	50
5.2	Volatilité implicite de la matrice de nouvelles notes . . . . .	52
5.3	Méthodologies proposées pour la stabilisation du STEC . . . . .	54
5.3.1	Méthode d'optimisation par la distance euclidienne . . . . .	54
5.3.2	Minimisation de la distance L2 par bloc . . . . .	54
5.3.3	Stabilité par la moyenne des distributions normales . . . . .	56
5.4	Comparaison des résultats . . . . .	57
CHAPITRE 6 Modélisation de la corrélation intergroupe des réassureurs		61
6.1	Problématique . . . . .	61
6.2	Choix des copules multivariées . . . . .	62
6.2.1	Copule Gaussienne . . . . .	62
6.2.2	Copule de Student à $\nu$ . . . . .	63
6.2.3	Copule de Clayton de paramètre $\theta$ . . . . .	64
6.2.4	Copule de Gumbel-Hougaard de paramètre $\theta$ . . . . .	65
6.2.5	Choix des paramètres . . . . .	66
6.3	Mesures des matrices de nouvelles notes . . . . .	67
6.4	Résultats et comparaison . . . . .	73
CHAPITRE 7 Modélisation de la corrélation intragroupe des réassureurs		77
7.1	Problématique . . . . .	77



7.2	Description du portefeuille . . . . .	78
7.3	Calibrage du modèle . . . . .	80
7.4	Test de sensibilité au STEC . . . . .	81
7.4.1	Diversification et corrélation . . . . .	82
7.4.2	Focus sur le risque de réserve . . . . .	86
	CONCLUSION . . . . .	92
	LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xxii
	LISTE DES FIGURES . . . . .	xxiv
	BIBLIOGRAPHIES . . . . .	xxvi
	ANNEXES . . . . .	xxix
A	Calcul du SCR de contrepartie selon le type d'expositions (Conseil du CEIOPS en 2009 [1]) . . . . .	xxix
A.1	Calcul du SCR de contrepartie pour les expositions 1 . . . . .	xxix
A.2	Calcul du SCR de contrepartie pour les expositions 2 . . . . .	xxix
B	Modèle à un facteur . . . . .	xxxi
C	Démonstration de la corrélation $\rho$ . . . . .	xxxii
D	Distributions des BELs en fonction du risque . . . . .	xxxiii



## REMERCIEMENTS

Avant toute chose, je tiens à remercier mon entreprise, GIE AXA, de m'avoir donnée l'opportunité d'effectuer mon stage dans le cadre de mes études à l'ENSAE, et j'adresse des remerciements particuliers à mon responsable d'équipe, *Riad ABDELLATIF*.

Je ne manquerai pas d'exprimer mes remerciements à mon encadrant de stage, *Grégoire GALLOT* qui m'a encadrée durant toute cette période en me guidant grâce à son orientation et ses conseils. Il a été très généreux dans le partage d'informations, et, malgré un emploi du temps chargé, a toujours été présent pour m'apporter les éclaircissements dont j'avais besoin tout au long de l'avancement de mon stage. Je le remercie pour le temps qu'il a consacré à la relecture ininterrompue et à l'aide à la rédaction du mémoire. Je le remercie pour tous les efforts qu'il a déployés.

Mes remerciements s'adressent aussi à mes chers collègues de l'équipe : *Maxime MECHALI*, *Yannick BESSY-ROLAND*, *Jade HALILI*, *Sophie NAVARRO*, *Lila AHMED-ZOUAOU*, *Bryan GAUTIER*, *Geoffrey BARD*, *Laura GOURLAOUEN*, *Youness JAID*, *Mehdi BOUCH-NIBA*, pour leur sympathie, leur bonne humeur quotidienne, leur aide et leurs conseils.

Je tiens également à remercier à mon tuteur académique à l'ENSAE, *Nicolas BARADEL*, pour son accompagnement tout au long de la rédaction de mon mémoire et ses explications quant aux questions que j'ai pu poser.

Mes remerciements s'adressent également à mes chers amis : *Jinlin LIN*, *Katia METNA*, *Alexandra DOUTHAUD*, *Penghao ZENG*, *Iris GUEZENNEC* pour leur soutien durant les périodes difficiles.

Je tiens à exprimer mes remerciements et ma gratitude à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation et au bon déroulement de ce travail.

## RÉSUMÉ

Conformément à Bâle II, la nouvelle réforme assurantielle de Solvabilité II donne la possibilité que les compagnies d'assurance développent leur propre modèle interne, elle recherche une meilleure adaptation sur l'exigence des fonds propres pour les compagnies d'assurance et de réassurance par rapport aux risques auxquels elles sont confrontées. AXA a développé sa propre méthodologie interne sur le risque de contrepartie en réassurance pour l'ensemble des entités du groupe, qui permet de calculer le capital nécessaire vis-à-vis de son profil de risque, appelé « *Short Term Economic Capital* » (*STEC*) sachant que le ratio de solvabilité est un indicateur clé de la capacité d'un assureur à faire face à ses obligations financières.

Parallèlement au développement et à l'affinement progressifs des modèles de calcul du capital requis, l'objectif de ce mémoire est de modéliser le risque de contrepartie des réassureurs qui est basé sur le modèle de Merton et d'étudier les corrélations intergroupe et intragroupe entre les réassureurs. La corrélation des défaillances entre réassureurs a été observée lors de la crise financière de 2008. En outre, la stabilité financière des réassureurs d'un même groupe est potentiellement et intrinsèquement liée de manière significative. Afin de modéliser une interaction intragroupe des réassureurs, la première partie du mémoire cherche à atténuer la volatilité dans la matrice de notations qui est sensible au changement de la dimension. Ensuite, étant donné que les interdépendances entre réassureurs sont caractérisées par une copule gaussienne multivariée qui ne correspond pas exactement à la réalité, l'application d'une copule décrivant les queues de la distribution de la valeur des actifs des réassureurs donne des résultats du STEC plus élevés lorsque la corrélation des probabilités de défaut est plus forte. Le mémoire se termine par une initiative consistant à imposer une corrélation intragroupe entre les réassureurs comme variable explicite qui conduit finalement à une étude de la sensibilité au STEC.

**Mots clés :** *risque de contrepartie, réassurance, copule multivariée, corrélation intergroupe, corrélation intragroupe, STEC, modèle interne, modèle de merton*



## ABSTRACT

In accordance with Basel II, the new insurance reform of Solvency II allows insurance businesses to design their own internal models, it strives to improve the risk-adjusted capital requirements for insurance and reinsurance companies. AXA has developed its own internal methodology on reinsurance counterparty risk for all the group's entities, allowing it to calculate the capital required in relation to its risk profile, known as « *Short Term Economic Capital* » (*STEC*), given that the solvency ratio is a key indicator of an insurer's ability to fulfill its financial obligations.

In parallel with the progressive development and refinement of capital requirement calculation models, this paper aims to model reinsurance counterparty risk based on the Merton model and investigate the intergroup and intragroup correlations among reinsurers. During the financial crisis of 2008, the default correlation between reinsurers was observed. Moreover, the financial stability of reinsurers within the same group is theoretically and inherently linked in a substantial degree. In order to describe an intragroup interaction of reinsurers, the first section of the paper attempts to reduce the change-sensitive volatility in the reinsurers' rating matrix. Since the interdependence of reinsurers is defined by a multivariate gaussian copula that does not completely reflect the reality, using a copula representing the distribution of fatter tails on the value of reinsurers' assets provides higher STEC results when the correlation of default probability is stronger. The paper finishes with an initiative to impose an intragroup correlation between reinsurers as an explicit variable, which ultimately leads to an examination of STEC sensitivity.

**Keywords :** *counterparty risk, reinsurance, multivariate copula, intergroup correlation, intragroup correlation, STEC, internal model, merton model*

## NOTE DE SYNTHÈSE

La réassurance, en tant qu'instrument de gestion du risque et du capital, conduit à une exposition au risque de contrepartie des réassureurs. Le **risque de contrepartie en réassurance (RCR)** fait référence à l'incapacité du réassureur à payer effectivement tout ou partie des créances de réassurance dans un certain délai. Cela est fortement lié à la solidité financière telle qu'exprimée par la notation du réassureur.

Selon le *rapport financier annuel 2022 d'AXA* [2], les 50 premiers réassureurs du portefeuille d'AXA constituent environ 74% des recouvrables de réassurance du groupe en 2022. Le total des réserves cédées aux réassureurs au 31 décembre 2022 s'élève à 42,5 milliards d'euros, contre 40,5 milliards d'euros en 2021<sup>1</sup>.

Avec l'adoption de Solvabilité II, les assureurs doivent examiner le **Capital de Solvabilité Requis (SCR)** mis en réserve contre le RCR. Le Groupe AXA a développé son propre modèle interne d'estimation des besoins en capital, connu sous le nom de **Short Term Economic Capital (STEC)**. Il a comme intérêt de mieux refléter les spécificités du groupe. L'augmentation du capital économique pour ce risque était de 1% du capital de solvabilité total requis avant la diversification en 2016. Il est ensuite passé à 6% en 2021 [3]. Cette augmentation est en partie liée par l'acquisition du groupe XL en 2018, ainsi qu'à un recours plus important de la réassurance. Cette évolution met ainsi en évidence le besoin d'AXA de prendre en compte les différents chocs comme la corrélation intergroupe des réassureurs. La crise financière de 2008 a notamment attiré l'attention sur l'interdépendance des acteurs au sein de la place financière. Cela particulièrement le cas dans le secteur de l'assurance, où de grands assureurs comme AIG, Yamato Life et Swiss Re ont connu de difficultés. La corrélation de la quantité de crédit entre les acteurs est une variable critique dans la modélisation du RCR. L'équipe chargée du modèle interne P&C tente d'améliorer le modèle interne actuel en tenant compte d'une modélisation plus fine au niveau des corrélations inter et intragroupe de réassurance.

L'objectif de ce mémoire est double, il s'agit d'une part de modéliser les corrélations intergroupes et intragroupes parmi les réassureurs du Groupe AXA. D'autre part, il a pour vocation de quantifier leur influence sur le résultat du STEC afin de mieux réguler et surveiller le RCR. À cette fin, les études de ce mémoire seront organisées en trois parties. Dans un premier temps, une amélioration du modèle interne actuel sera introduite en réduisant

---

1. À noter qu'en 2021, 26% des réassureurs étaient « non notés » et 8% des réassureurs étaient notés en dessous de A. Le reste étant composé de 27% de A, 38% de AA et 1% de AAA.

la volatilité implicite tout en simulant les notations des réassureurs. Cette amélioration sera appliquée dans la modélisation suivante pour stabiliser les résultats. Ensuite, pour tenir compte des spécificités des portefeuilles, la corrélation intergroupe des réassureurs sera mise en œuvre à l'aide de théories de copules multivariées. Enfin, la corrélation intragroupe des réassureurs sera ajoutée au modèle pour la généralisation des nouvelles notations dans un an et les résultats des STECs seront analysés.

Un tableau résumant la modélisation est présenté ci-après :

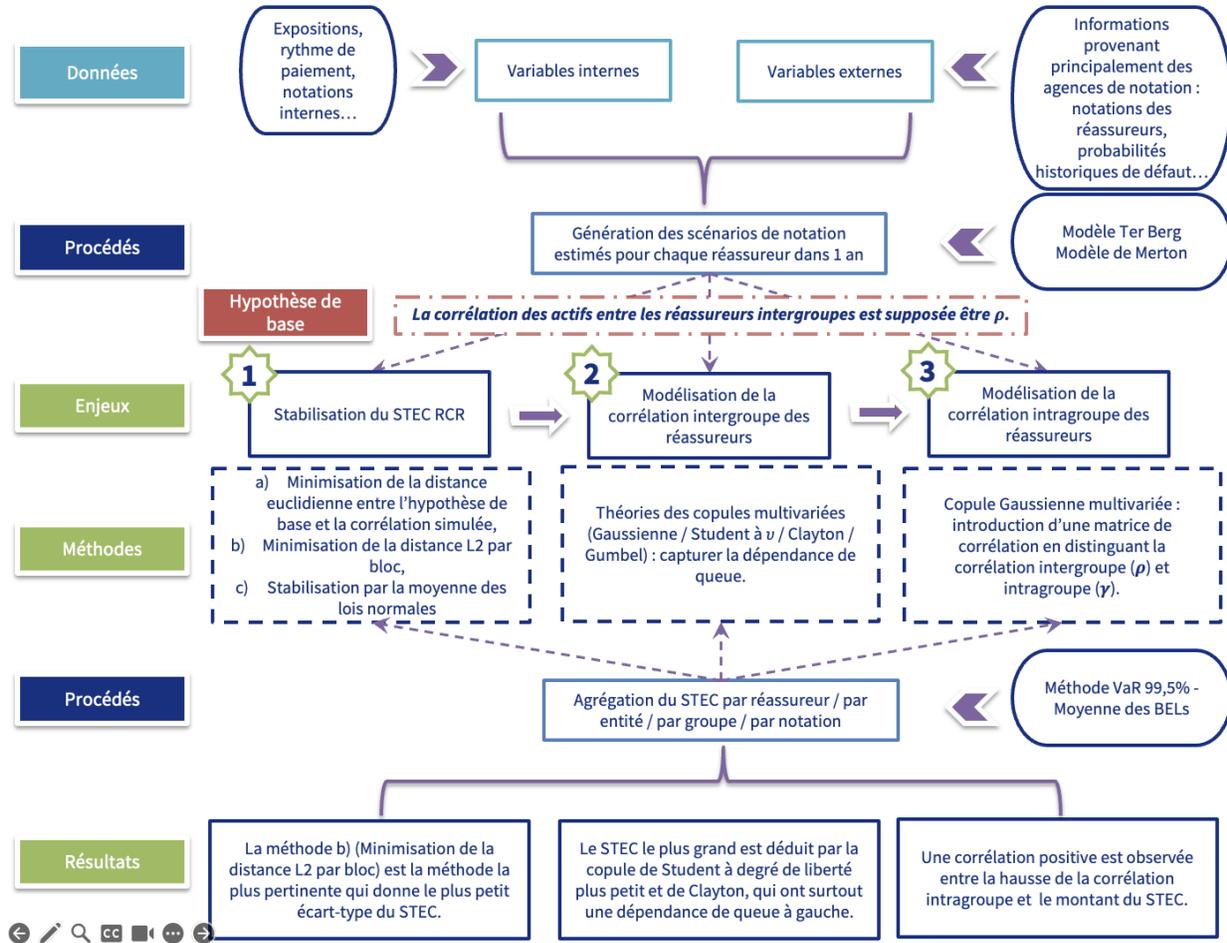


FIGURE 0.1 Résumé de la modélisation du risque de contrepartie en réassurance

### ► Données

Toutes les données utilisées dans l'étude sont les données réelles fournies par AXA. Toutefois, pour des raisons de confidentialité, les résultats présentés dans ce mémoire ont été ajustés par un ratio.

L'exposition au RCR et la notation du réassureur sont les deux éléments clés de la modélisation. En ce qui concerne l'exposition au RCR, il s'agit des pertes de l'assureur en cas

de défaut du réassureur sur des sinistres antérieurs ou futurs. Par conséquent, il y a deux perspectives : (1) **l'exposition pour le risque de réserve**, qui est l'exposition actuelle au RCR sur les sinistres passés. Elle est déterministe et basée sur les données bilancielle des entités. (2) **l'exposition pour le risque de souscription**, qui est définie comme l'exposition possible des contrats de réassurance de l'année en cours, y compris les sinistres futurs. Les agences de notation fournissent souvent des notations de solidité financière des réassureurs, qui peuvent indiquer la probabilité de défaut d'un réassureur. Si le réassureur n'a pas de notation externe, on lui attribue une notation par défaut de  $BB$ .

Le portefeuille des réassureurs utilisé pour modéliser le RCR présente un certain nombre de propriétés qui nous obligent à nous focaliser sur les queues de distribution des actifs de réassurance et des pertes de défaut. Ceci est dû au fait que le STEC est calculé par les scénarios des pertes. Tout d'abord, le portefeuille d'AXA comporte un risque de concentration, ce qui signifie qu'il existe des valeurs extrêmes et que certains réassureurs ont un niveau d'exposition significatif. Le risque de réserves est plus important que le risque de souscription, compte tenu de notre histoire et des différents paiements en attente des sinistres des années précédentes. En outre, les notations des réassureurs du portefeuille à modéliser sont concentrées dans les catégories  $A$  et  $BB$ , et plus particulièrement pour celles des réassureurs notés  $BB^2$ .

### ► Processus de calcul du STEC

Le calcul du STEC s'effectue à partir de coefficients de chocs et de corrélations. L'estimation des pertes futures pour défaut des réassureurs est faite à l'aide d'un modèle stochastique. Il permet de générer les matrices de transition déformées par le modèle Ter Berg. Il sert aussi à projeter les nouveaux événements de défaut à 1 an pour chaque réassureur dans le portefeuille par le modèle de Merton. Ce dernier découle des hypothèses fondamentales du modèle résumées ci-après :

- La corrélation des actifs entre chaque paire de réassureurs intergroupes est définie par  $\rho$ , qui est le coefficient de corrélation linéaire.
- La valeur de l'actif du réassureur est une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite.

Dans ce mémoire, la modélisation se concentre sur la simulation des notations des réassureurs à l'horizon d'un an. On définit d'abord un seuil pour chaque réassureur, le réassureur est en défaut si et seulement s'il n'est pas capable de payer cette charge. Chaque réassureur admet de nombreux scénarios *Monte-Carlo* possibles des seuils. Comme le groupe AXA a un grand

---

2. Certains de ces réassureurs ne sont pas notés, alors que son groupe l'est. Ceci est lié à la qualité des données, qui doit être assurée avant la modélisation.

nombre de réassureurs, on crée une matrice de seuils de dimension en appliquant la copule gaussienne pour respecter l'hypothèse de corrélation.

Le STEC par réassureur est déduit de la distribution de la meilleure estimation des pertes (**BEL**) et il est calculé par la méthode *VaR-Moyenne*. L'agrégation du STEC peut avoir différents niveaux  $L$ , en termes de (1) entité, (2) notation, (3) risque, (4) groupe AXA dans son ensemble. Cela signifie que toutes les pertes pertinentes sont additionnées en un vecteur de BEL total. De plus, l'effet de diversification entre les risques et entre les réassureurs intervient dans le processus d'agrégation. La formule de calcul devient alors :

$$STEC_{RCR}^{avec\ diversification} = VaR_{99,5\%} \left( \sum_{l=1}^L BEL_l \right) - E \left( \sum_{l=1}^L BEL_l \right)$$

### ► Enjeu 1

Afin de modéliser l'interaction des réassureurs intragroupes et intergroupes, on veut réduire la volatilité implicite. Elle intervient dans la matrice de notations contenant les évènements de notations estimés à un an. Cette volatilité est due au fait que la matrice ayant les nouveaux scénarios de notation est simulée de manière stochastique au niveau du groupe AXA. Il s'agit d'une approche par Monte-Carlo, où le nombre de réassureurs au niveau du groupe peut varier légèrement d'une année à l'autre en fonction de la structure du portefeuille des réassureurs. Le STEC agrégé pour un même panier de réassureurs en utilisant les différentes matrices de nouvelles notes variera donc dans une certaine fourchette.

Ce mémoire tente trois méthodes possibles pour stabiliser les résultats de STEC :

1. La génération de la nouvelle probabilité de défaut pour les réassureurs nécessite la prise en compte de l'hypothèse de base du modèle. Cette dernière énonce que la corrélation des actifs entre chaque paire de réassureurs est fixée par un coefficient de corrélation linéaire. Par conséquent, nous utilisons la *distance L2* pour sélectionner la probabilité de transition de la notation qui répond le mieux à cette hypothèse.
2. Sur la base de la première approche, on cherche à minimiser cette distance par bloc. Un bloc correspond à une itération, à chaque itération, nous simulons plusieurs matrices de nouvelles notations et prenons celle qui présente la plus petite *distance L2*. Nous calculons par la suite le STEC correspondant à chaque bloc et obtenons l'espérance mathématique du STEC selon la *Loi des Grands Nombres*.
3. La troisième méthode proposée utilisera la propriété de *Stabilité de la moyenne des lois normales* pour générer une matrice de nouvelles notations.

La **méthode 2** est la méthode la plus appropriée, en donnant le plus petit écart-type de

STEC parmi les 3 méthodes. La variation du STEC total<sup>3</sup> passe de 9,6% (*méthode actuelle*) à 6,5% (*méthode 2*). Cette méthode sera appliquée aux deux problématiques suivantes.

## ► Enjeu 2

En réalité, la plupart des rendements des actifs s'écartent de l'hypothèse de normalité. Cela signifie qu'ils sont asymétriques et à queue épaisse. La copule Gaussienne ne peut pas capturer les corrélations non linéaires telles que la dépendance de queue. Ce constat conduit potentiellement à une sous-estimation des pertes en cas de défaut selon les caractéristiques du portefeuille.

Dans ce mémoire, trois copules multivariées ont été choisies pour décrire la structure de dépendance entre les réassureurs intergroupes : (1) **Copule de Student** : Par rapport à la copule Gaussienne, la copule de Student a une queue plus épaisse à gauche et à droite. Le degré de liberté affecte l'épaisseur de la queue de distribution : plus il est grand, plus la queue est fine. Elle est donc une bonne alternative pour la modélisation de la corrélation entre les réassureurs. (2) **Copule de Clayton** : Elle permet de capturer la corrélation entre les valeurs extrêmes en queue à gauche. La queue basse de la distribution conjointe représente une corrélation de défaut plus forte des réassureurs. (3) **Copule de Gumbel-Hougaard** : La copule de Gumbel donne la dépendance localisée dans la queue à droite. En d'autres termes, la corrélation entre les valeurs des actifs sera élevée, ou entrainera les probabilités de passage d'une notation vers le haut de  $t = 0$  à  $t = 1$ . Ceci est cohérent avec notre portefeuille compte tenu de la présence du risque de concentration.

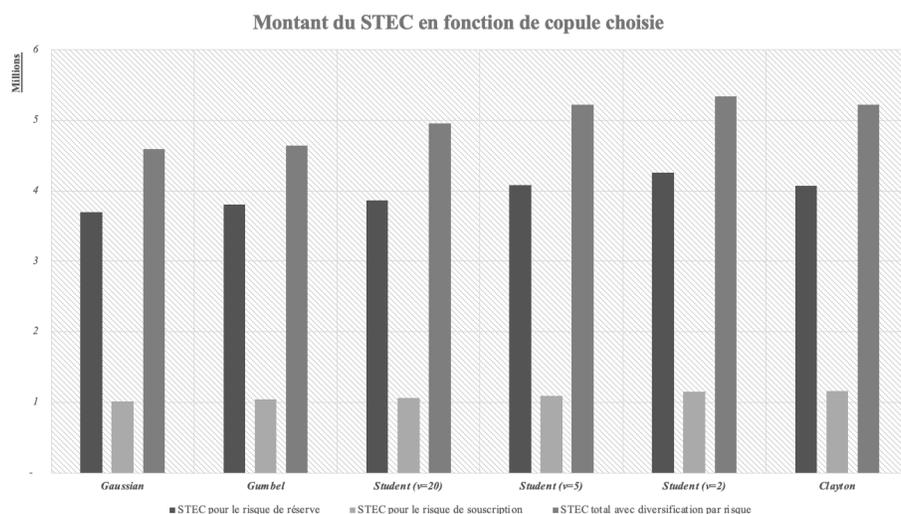


FIGURE 0.2 Résultats des STECs par copule

3. avec la diversification entre les risques et les réassureurs

L'introduction des copules entraîne un changement cohérent dans les résultats des STECs. Le montant du STEC total est dominé par le STEC pour le risque de réserve. L'application de la copule de Student et de la copule de Clayton pour générer les nouveaux événements de défaut à l'exercice  $t = 1$  entraîne une augmentation significative du montant du STEC total. Elles tiennent compte de la corrélation de défaut plus forte des réassureurs. Il y aura donc une queue de distribution plus longue à droite pour ces deux copules. En revanche, on peut dire que l'impact de l'application de la copule de Gumbel sur le STEC est assez limité. Cela s'explique, d'une part, par le fait qu'il est généralement difficile pour les réassureurs de monter dans le classement de notation. D'autre part, par le fait que les réassureurs bien notés n'ont pas besoin de beaucoup de capital et ne pénalisent donc pas le STEC.

### ► Enjeu 3

En raison de la forte interdépendance entre les réassureurs et les assureurs, les transactions de réassurance internes créent un risque de contrepartie supplémentaire. L'ampleur du risque de solvabilité dépend alors fortement de la position du groupe dans son ensemble ou de l'interaction des filiales. Dans ce mémoire, le modèle incorporera une nouvelle variable ( $\gamma$ ) : **la corrélation linéaire des réassureurs intragroupes**<sup>4</sup>. Elle est distinguée et supérieure à la corrélation intergroupe ( $\rho$ ) de la *problématique 2*. On prend 0,5, 0,75 et 0,9 pour tester la sensibilité de cette corrélation intragroupe au STEC final.

Le calibrage du modèle est fait en 3 étapes : Tout d'abord, on crée une matrice de corrélation qui distingue les corrélations intragroupe et intergroupe. Ensuite, on l'intègre comme un paramètre essentiel de la copule Gaussienne dans la généralisation des nouvelles notations des réassureurs à 1 an. Finalement, on agrège les scénarios de pertes par type de diversification. Cela permet de donner une vision plus fine sur les conséquences aux STECs.

Quelques remarques doivent être soulignées à la suite de l'analyse des résultats du STEC. Premièrement, les résultats du STEC total montrent qu'une corrélation positive entre le STEC total et la corrélation intragroupe est dominée par le STEC pour le risque de réserve. Il représente 63% des expositions totales et 42% des réassureurs sont notés en *BB* à  $t = 0$ <sup>5</sup>. Contrairement au risque de réserve, le STEC pour le risque de souscription a connu une baisse. Cela s'explique par le déséquilibre des expositions concentrées dans le Groupe AXA, dont les filiales sont majoritairement bien notées.

---

4. *En vision du Groupe de réassureurs, ici, on parle les compagnies de réassurance ayant les filiales comme Swiss Re.*

5. *La plupart d'entre eux sont des réassureurs qui ne sont pas notés par les agences de notation, comme les captives, les mutuelles ou les institutions de prévoyance.*

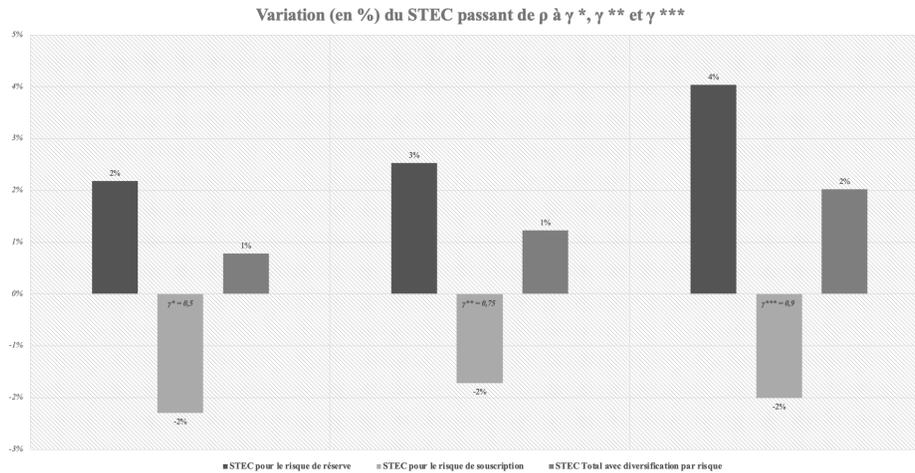


FIGURE 0.3 Variation (en %) du STEC passant de  $\gamma = \rho$  à  $\gamma^* = 0,5$ ,  $\gamma^{**} = 0,75$  et  $\gamma^{***} = 0,9$

La structure du portefeuille des réassureurs intragroupes doit faire l'objet d'une attention particulière. L'étude a examiné les 5 groupes de réassureurs les plus influencés par la corrélation intragroupe sur le STEC pour le risque de réserve. Pour les portefeuilles plus homogènes avec une note basse, le ratio (*STEC : Expositions*) est plus important. Le STEC est également compensé parmi les réassureurs du groupe ayant des notations hétérogènes. Cela rend la variation du STEC plus sensible par rapport au groupe homogène. D'après les résultats de la *problématique 2*, on s'attend à une augmentation plus forte des STECs en appliquant la copule de Student ou de Clayton.

**En conclusion**, la modélisation du risque de contrepartie en réassurance permet de faire progresser le modèle interne actuel. La stratégie utilisée pour réduire la volatilité dans le modèle existant améliore la précision de l'exigence de capital réglementaire. L'application de copules multivariées pour capturer la corrélation de défaut des réassureurs intergroupes donne une vision plus détaillée de l'influence du choc de corrélation sur les STECs. Enfin, en tenant compte de l'effet de diversification, la corrélation intragroupe permet une évaluation plus précise du capital de solvabilité requis. Cela est adapté au RCR encouru à l'horizon de projection, et donc au bilan économique.

En revanche, afin de mesurer la qualité d'ajustement des paramètres, un test d'adéquation est nécessaire, c'est-à-dire que la copule théorique estimée est une bonne description de la structure de dépendance des données observées. En raison de l'insuffisance de données historiques sur les actifs de tous les réassureurs, en particulier les nouveaux entrants et les petits réassureurs, la copule optimale et le degré de corrélation intragroupe requièrent un jugement d'experts. Au-delà de ces limites, les tests de sensibilité des corrélations inter et intragroupes sur les STEC pourraient déjà nous fournir des informations utiles et de motiver



de futures études. Ainsi, l'importance de la gestion des expositions et des notations des réassureurs est soulignée lors de la modélisation. Une attention particulière au risque de concentration et aux réassureurs non notés par des agences externes est nécessaire. Une grande partie des STECs provient de réassureurs non européens, tels que les captives. Ils ne sont pas soumis à la Solvabilité II. Ce point est considéré comme un axe d'amélioration, AXA cherche à attribuer aux réassureurs une note plus juste basée sur leur ratio de solvabilité plutôt que sur la note *BB* par défaut.

En résumé, ce mémoire détaille la façon dont la modélisation a été réalisée : *non seulement sur l'application de copules pour capturer la corrélation de défaut des réassureurs, mais aussi sur l'impact des corrélations intragroupes sur le STEC du portefeuille d'AXA dans différents scénarios*. Cela a permis d'affiner la vision et de permettre des sensibilités sur le STECs, dans des cas où notre activités de réassurance devient de plus en plus concentrer sur certains réassureurs. L'équipe peut utiliser cette nouvelle vision de modèle à tout moment pour la gestion du RCR.

## EXECUTIVE SUMMARY

Reinsurance, as a risk and capital management mechanism, exposes insurers to counterparty risk. The failure of the reinsurer to successfully pay all or part of the reinsurance recoverable within a certain timeframe is referred to as *reinsurance counterparty risk (RCR)*. This is significantly related to the financial strength of the reinsurer as represented by its rating.

AXA's 2022 annual financial report [2] states that the top 50 reinsurers in the company's portfolio are responsible for roughly 74% of the group's 2022 reinsurance recoverable. As of December 31, 2022, a total of 42.5 billion euros had been ceded to reinsurers, up from 40.5 billion euros in 2021<sup>6</sup>.

With the implementation of Solvency II, insurers must assess the *Solvency Capital Requirement (SCR)* set aside against the RCR. The AXA Group has developed its own internal model for estimating this capital requirement, known as *Short Term Economic Capital (STEC)*. It has the advantage of more accurately reflecting the group's characteristics. The increase in economic capital for this risk in 2016 represented 1% of the total solvency capital requirement before diversification. Then, in 2021, it rose to 6% [3]. This rise was partially attributable to the acquisition of the XL group in 2018, as well as to a greater recourse to reinsurance. This evolution demonstrated AXA's need to account for various shocks, such as the intergroup correlation of reinsurers. The 2008 financial crisis also highlighted the interdependence of actors in the financial market. This was particularly noticeable in the insurance industry, where large insurers such as AIG, Yamato Life, and Swiss Re encountered difficulties. A crucial variable in RCR modeling is the correlation between actors' credit amounts. The P&C internal model team is attempting to enhance the current internal model by incorporating more precise modeling of intergroup and intragroup correlations.

The purpose of this paper is twofold : Firstly, it's to model the intergroup and intragroup correlations between AXA Group reinsurers. Alternatively, it aims to quantify their impact on the STEC result in order to better regulate and monitor the RCR. To the end, the studies in this paper will be split into three parts. The current internal model will be enhanced by reducing implied volatility while simulating ratings per reinsurer. This enhancement will be implemented in the following modeling to stabilize the outcomes. In order to take into consideration for the specifics of the portfolio, multivariate copula theories will be used to implement the intergroup correlation of the reinsurers. Finally, the intragroup correlation of

---

6. Note that in 2021, 26% of reinsurers were "unrated" and 8% of reinsurers were rated below A. The remainder being composed of 27% of A, 38% of AA and 1% of AAA.

the reinsurers will be added to the model for the generalization of the new ratings in one year and the results of the STECs will be analyzed.

The following table summarizes the modeling :

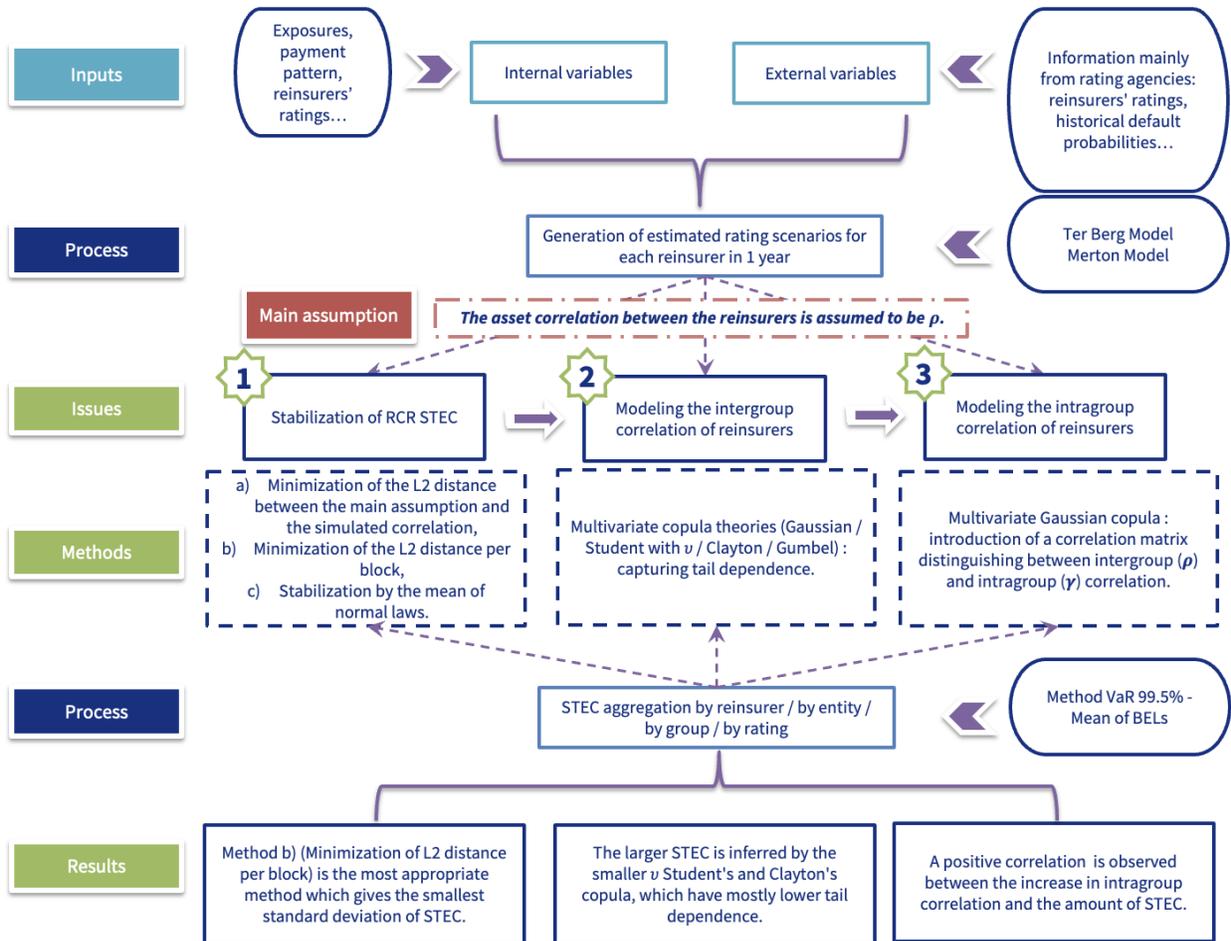


FIGURE 0.4 Summary of reinsurance counterparty risk modeling

### ► Data

All data used in the study are the internal data provided by AXA. However, for confidentiality reasons, the results of the studies published in the paper have been adjusted by a multiplier.

The RCR exposure and the rating of the reinsurer are the two key elements of the modeling. For the RCR exposure, it is the insurer's losses in the event of a default by the reinsurer on past or future claims. Therefore, there are two perspectives : (1) **Exposure for reserve risk**, which is the current RCR exposure on past claims. It is deterministic and based on the entities' balance sheet data. (2) **Exposure for underwriting risk**, which is defined as the possible exposure of current year reinsurance contracts, including future claims. Rating

agencies often provide financial strength ratings of reinsurers, which can indicate the likelihood of default by a reinsurer. If the reinsurer does not have an external rating, AXA will assign a rating of *BB* by default.

The portfolio of reinsurers used to model the RCR has a number of properties that force us to focus on the tail distribution of reinsurance assets and default losses. This is due to the fact that the STEC is calculated by the loss scenarios. First, AXA's portfolio has concentration risk, which means that there are extreme values and some reinsurers have a significant level of exposure. Reserve risk is more substantial than underwriting risk, given our history and the various pending claims payments from previous years. In addition, the ratings of the reinsurers in the portfolio to be modeled are highly concentrated in *A* and *BB* categories, more specifically for those reinsurers rated *BB*<sup>7</sup>.

### ► STEC calculation process

The STEC is calculated using shock and correlation coefficients. The estimation of reinsurer default losses is performed using a stochastic model, which allows generating distorted transition matrices by Ter Berg model and new default events in 1 year for each reinsurer in the portfolio by Merton model. The latter is derived from the model's underlying assumptions, which are listed below :

- The asset correlation between each pair of intergroup reinsurers is defined by  $\rho$ , which is the linear correlation coefficient.
- The value of the reinsurer's assets is a random variable following a standard normal distribution.

In this paper, the modeling focuses on simulating the ratings of reinsurers at one-year horizon. We first define a threshold for each reinsurer, the reinsurer is in default if and only if it is not able to pay this charge. Each reinsurer admits numerous possible threshold scenarios. Since the AXA group has a large number of reinsurers, we create a large threshold matrix by applying the Gaussian copula to satisfy the correlation assumption.

The STEC by reinsurer is deduced from the distribution of the best estimate of losses (*BEL*) and is calculated by the *VaR-Mean* method. STEC aggregation can have different *L* levels, in terms of (1) *entity*, (2) *rating*, (3) *risk*, (4) *the whole AXA group*. This means that all relevant losses are summed into a total BEL vector, and that the diversification effect between

---

7. Some of these reinsurers are not rated, while its group is. This is related to the quality of the data, which must be assured before modeling

risks and between reinsurers is involved in the aggregation process. The calculation formula becomes :

$$STEC_{RCR}^{with\ diversification} = VaR_{99,5\%} \left( \sum_{l=1}^L BEL_l \right) - E \left( \sum_{l=1}^L BEL_l \right)$$

With  $L$  the chosen type of diversification.

### ► Issue 1

In order to model the interaction of intra and intergroup reinsurers, we first need to reduce the implied volatility in the rating matrix. This volatility is due to the fact that the matrix with the new rating scenarios is simulated stochastically at the whole AXA group level by a Monte-Carlo method, where the number of reinsurers at the group level can vary slightly from one year to another depending on the structure of the reinsurers' portfolio. The aggregated STEC for the same bucket of reinsurers using the different new rating matrices will therefore vary within a certain range.

This paper attempts three methods to stabilize STEC results :

1. Since creating new default probabilities for reinsurers involves consideration of the model's core assumption that, the asset correlation between each pair of reinsurers is specified by a linear correlation coefficient. As a result, we employ a *distance L2* to choose the rating transition probability that best fits this hypothesis.
2. On the basis of the first approach, we try to minimize this distance by block, a block corresponds to an iteration, at each iteration, we simulate multiple new rating matrices and select the one which exhibits the smallest *L2 distance*. The STEC corresponding to each block would then be computed, and the mathematical expectation of the STEC is determined using the *Law of Large Numbers*.
3. The third proposed method will use the property of *Stability by the mean of normal distributions* to generate a new rating matrices.

**Method 2** is the most appropriate method, yielding the smallest standard deviation of STEC among the 3 methods, and the variation of total STEC (*with diversification across risks and reinsurers*) from 9.6% to 6.5%. We expect STEC to converge further to a certain value as the number of iterations increases. This method will be applied to the following two issues.

### ► Issue 2

In reality, most asset returns deviate from the normality assumption. This means that they are asymmetric and thick-tailed. The Gaussian copula can not capture nonlinear correlations

such as tail dependency, which potentially leads to an underestimation of extreme downside risks based on characteristics of the portfolio.

In this paper, three multivariate copulas were chosen to describe the dependency structure between intergroup reinsurers : (1) **Student’s t copula** : Compared to the Gaussian copula, the Student’s copula has a thicker tail on the left and right of the distribution. The degree of freedom affects the thickness of the tail of the distribution : the larger it is, the thinner the tail. It is therefore a good alternative for modeling the correlation between reinsurers. (2) **Clayton copula** : It captures the correlation between the extreme values in the lower tail. The lower tail of the joint distribution represents a stronger default correlation of reinsurers. (3) **Gumbel-Hougaard copula** : The Gumbel copula gives the localized dependence in the right tail. In other words, the correlation between asset values will be high, or drive the probabilities of a rating moving up from  $t = 0$  to  $t = 1$ . This is consistent with our portfolio given the presence of concentration risk

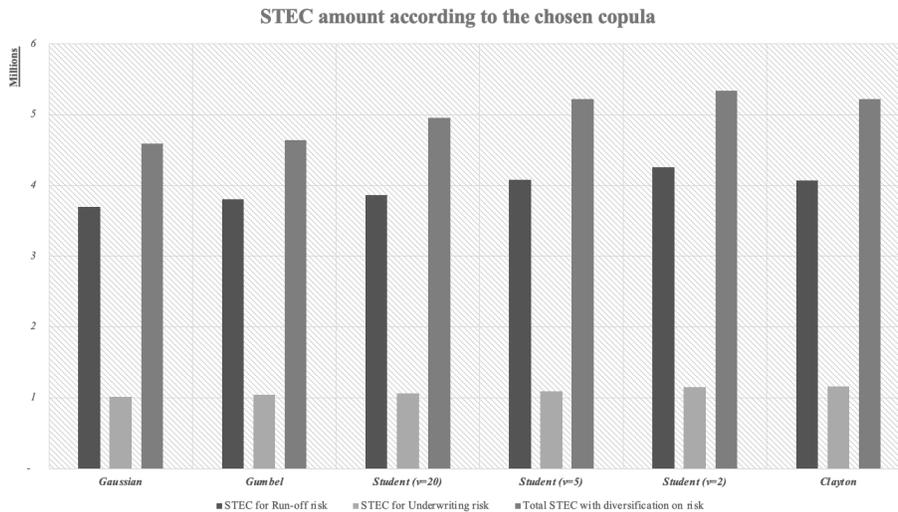


FIGURE 0.5 STEC results for chosen copula

The inclusion of the copula produces a consistent variation in the STEC outcomes. The total STEC amount is dominated by STEC for reserve risk. Only when Student copula and the Calyton copula are applied to generate new default events at year  $t = 1$ , the quantity of total STEC increases significantly because they account for the stronger default correlation among reinsurers. On the other hand, the impact of applying the Gumbel copula on the STEC is relatively minimal, since it is difficult for reinsurers to move up the rating rankings in general, and well-rated reinsurers do not require extensive capital on default risk, so they do not punish the STEC.

### ► Issue 3

Because of the high degree of interdependence between reinsurers and insurers, internal reinsurance transactions create additional counterparty risk. The magnitude of the solvency risk then depends strongly on the position of the group as a whole or the interaction of the subsidiaries. In this brief, the model will incorporate a new variable ( $\gamma$ ) : **the linear correlation of intragroup reinsurers**<sup>8</sup>. It is distinguished and superior to the intergroup correlation ( $\rho$ ) of the *Issue 2*. We take 0.5, 0.75 and 0.9 to test the sensitivity of this intragroup correlation to the final STEC.

The calibration of the model is done in 3 steps : First, a correlation matrix is created that distinguishes between intragroup and intergroup correlations. Then, it is integrated as an essential parameter of the Gaussian copula in the generalization of the new ratings. Finally, we aggregate the loss scenarios by type of diversification. This allows us to give a more refined view of the consequences for STECs.

Following the study of the STEC results with  $\gamma$ , a few remarks should be mentioned. Firstly, the total STEC results show that a positive correlation between the total STEC and the intragroup correlation is dominated by the STEC for reserve risk. It accounts for 63% of total exposures and 42% of reinsurers are rated in *BB* at  $t = 0$ <sup>9</sup>. In contrast to reserve risk, the STEC for underwriting risk has declined. This is explained by the imbalance of exposures concentrated in the AXA Group, whose subsidiaries are mostly highly rated.

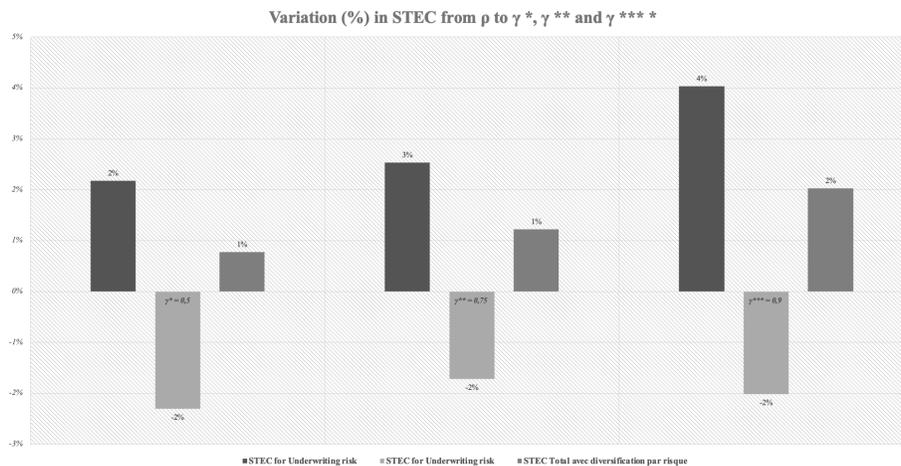


FIGURE 0.6 Variation (%) in STEC from  $\gamma = \rho$  à  $\gamma^*$ ,  $\gamma^{**}$  et  $\gamma^{***}$

8. In the view of the Group of reinsurers, here we speak of the reinsurance companies with the subsidiaries as Swiss Re.

9. Most of them are reinsurers that are not rated by rating agencies, such as captives, mutuals, etc.

The portfolio structure of intragroup reinsurers requires particular attention. The study examined the 5 groups of reinsurers most influenced by intragroup correlation on STEC for reserve risk. For more homogeneous portfolios with a low rating, the ratio (*STEC : Exposures*) is more significant. STEC is also offset among the group's reinsurers with heterogeneous ratings. This makes the variation in STEC more sensitive compared to the homogeneous group. Based on the results of *Issue 2*, a larger increase in STECs is expected when applying Student's t or Clayton copula.

**To conclude**, the modeling of counterparty risk in reinsurance improves the current internal model. The strategy used to reduce volatility in the existing model improves the accuracy of the regulatory capital requirement. The application of multivariate copulas to capture the default correlation of intergroup reinsurers gives a more detailed insight on the influence of the correlation shock on STECs. Finally, by taking into account the diversification effect, the intragroup correlation leads to a more precise assessment of the solvency capital requirement. This is adapted to the RCR incurred at the projection horizon, and thus to the economic balance sheet.

However, in order to measure the quality of adjustment quality of the parameters, a goodness-of-fit test is necessary, i.e., that the estimated theoretical copula is a good description of the dependence structure of the observed data. Due to the lack of historical asset data for all reinsurers, especially new entrants and small reinsurers, the optimal copula and the degree of intragroup correlation require expert judgment. Beyond these limitations, sensitivity testing of inter and intragroup correlations on STECs could already provide us with meaningful information and motivate future studies. Thus, the importance of managing exposures and ratings of reinsurers is emphasized in the modeling. A particular attention to concentration risk and to reinsurers not rated by external agencies is also necessary. A large proportion of STECs comes from non-European reinsurers, such as captives. They are not regulated by Solvency II. This is seen as an area for improvement as AXA seeks to give reinsurers a fairer rating based on their solvency ratio rather than *BB* rating.

In summary, this paper details how the modeling was conducted : *not only on the application of copulas to capture the default correlation of reinsurers, but also on the impact of intragroup correlations on the STEC of AXA's portfolio under different scenarios*. This has enabled us to refine the vision and allow for sensitivities on STECs, in cases where our reinsurance activities are becoming more and more concentrated on certain reinsurers. The team can use this new model at any time for RCR management.

## GLOSSAIRE DES ABRÉVIATIONS

<b>RCR</b>	Risque de contrepartie en réassurance ( <i>Reinsurance counterparty risk</i> )
<b>CDS</b>	( <i>Credit default swap</i> )
<b>PD</b>	Probabilité de défaut ( <i>Default probability</i> )
<b>RR</b>	Taux de recouvrement ( <i>Recovery rate</i> )
<b>IBNR</b>	Provisions pour sinistres inconnus ( <i>Incurred but not reported</i> )
<b>PPNA</b>	Provisions pour primes non acquises ( <i>Unearned premium reserves</i> )
<b>QIS5</b>	Cinquième étude quantitative d'impact ( <i>The fifth quantitative impact study</i> )
<b>ORSA</b>	Evaluation interne des risques et de la solvabilité ( <i>Own Risk and Solvency Assessment</i> )
<b>ERM</b>	Gestion des risques en entreprise ( <i>Enterprises Risk Management</i> )
<b>QRT</b>	Rapport quantitatif ( <i>Quantitative Reporting Templates</i> )
<b>LGD</b>	Pertes en cas de défaut ( <i>Loss given default</i> )
<b>VaR</b>	Valeur à risque ( <i>Value at risk</i> )
<b>CVaR</b>	Valeur à risque conditionnelle ( <i>Conditional Value at Risk</i> )
<b>ES</b>	( <i>Expected shortfall</i> )
<b>EC</b>	Capital économique ( <i>Economic capital</i> )
<b>STEC</b>	Capital économique à court-terme ( <i>Short-term economic capital</i> )
<b>MCR</b>	Minimum de capital requis ( <i>Minimum capital requirement</i> )
<b>(B)SCR</b>	Capital de solvabilité requis (basique) ( <i>(Basic) Solvency capital requirement</i> )
<b>EIOPA</b>	Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles ( <i>European insurance and occupational pensions authority</i> ) <sup>10</sup>
<b>P&amp;C insurance</b>	Assurance IARD ou assurance de dommage ( <i>Property &amp; casualty insurance</i> )

---

10. qui a remplacé le *CEIOPS* en 2010.

## INTRODUCTION

Au fur et à mesure que le marché de la réassurance se développe et que la demande de réassurance augmente, le **risque de contrepartie en réassurance** (*RCR*) est une composante importante du capital que les ré/assureurs doivent détenir. Plus les assureurs disposent de grandes créances de réassurance, plus ils sont exposés au *RCR*. La question de savoir comment calculer un coût précis du capital est devenue un sujet essentiel.

En réponse à cette question, un certain nombre de chercheurs ont soumis leur approche de la mesure de ce risque. En 2000, *Bulmer et al. (2000)* [4] ont proposé une approche déterministe basée sur un facteur, dans laquelle un pourcentage de la provision est fixé en fonction de la notation du réassureur, de la plus élevée à la plus basse, une multiplication par les expositions au *RCR* donne le montant du capital à mettre en réserve. *Flower et al. (2007)* [5] ont créé un modèle plus stochastique utilisant le prix des *CDS* pour calibrer une intensité de défaut d'un réassureur, en tenant compte de certains événements de choc tels que des catastrophes naturelles ou des attaques terroristes, et en calculant des probabilités de défaut spécifiques pour chaque réassureur.

La crise financière de 2008 a conduit les marchés financiers à accorder plus d'attention à la corrélation de défaut entre les principaux acteurs du marché, compte tenu de la spécificité du marché de la réassurance, sur le degré élevé de corrélation et de risque de concentration entre les réassureurs.

*Sachs (2009)* [6] a proposé un modèle qui s'inspire de la modélisation du risque de crédit dans le secteur bancaire. Il a pris en compte le risque de concentration des réassureurs et a déterminé les corrélations entre les réassureurs en utilisant l'indice Herfindahl ajusté. Le modèle de copule gaussienne de Vasicek pour les banques a été adopté pour la première fois dans Bâle II. Dans le même temps, dans le contexte de Solvabilité II, *CEIOPS (2009)* [1] a donné une formule standard pour le module du risque de défaut de contrepartie afin de calculer un capital de solvabilité requis (*SCR*) adéquat. *Britt et Kravavych (2009)* [7] ont innové un modèle de capital interne qui a tenu compte des principaux facteurs de risque ayant un impact sur les bilans des réassureurs. L'exposition et la probabilité de défaut du réassureur étaient considérées comme des entrées cruciales du modèle, et une formule explicite de défaut avec corrélation inhérente était établie.

Les chercheurs susmentionnés se sont concentrés sur la manière de prédire avec précision les événements de défaut lors de la modélisation du risque de contrepartie en réassurance, ils

ont examiné également les corrélations entre les réassureurs. Cependant, la dépendance de queue du risque de défaut entre les réassureurs a été moins étudiée, il existe peu de résultats empiriques sur ce sujet. Nous espérons qu'une étude plus détaillée de la corrélation entre les réassureurs pourra être réalisée.

Ce mémoire consiste à quantifier le *RCR* en utilisant principalement le modèle *Ter Berg (2008)* [8] pour calculer une nouvelle probabilité de défaut stressée déduite des chocs communs sur la probabilité de base fournie par les agences de notation. À la base de données réelles d'AXA, différentes copules sont utilisées pour capturer la dépendance de la queue de la valeur des actifs des réassureurs. L'application du modèle de Merton et de la méthode de Monte-Carlo permet de déduire les nouveaux scénarios de notations dans un an et ensuite de faire un test de sensibilité sur le capital économique. Enfin, le risque de concentration élevé et la forte corrélation entre les réassureurs font de l'effet intragroupe un sujet possible de discussion future. Dans le mémoire, une corrélation intragroupe des réassureurs est introduite avec une matrice de corrélation de haute dimension pour le portefeuille de réassurance auquel fait face AXA, où un capital à détenir plus élevé est requis lorsque cette corrélation augmente.

Le mémoire est divisé en deux grandes parties, dont la première se concentre sur la compréhension théorique du risque de défaut en réassurance. Le premier chapitre offre un bref aperçu du développement du marché de la réassurance et des nombreux types de réassurance. Le deuxième chapitre porte sur le risque de contrepartie en réassurance et le capital économique réglementaire requis pour ce risque dans les secteurs de l'assurance et de la banque. La deuxième grande partie est la modélisation stochastique qui vise à modéliser la corrélation entre les réassureurs et à observer sa conséquence sur le capital économique nécessaire de la compagnie. La première section de la modélisation présente une approche pour réduire la volatilité créée par la procédure de modélisation existante, qui est ensuite reportée sur le processus de modélisation suivant. La deuxième section décrit la corrélation entre les réassureurs en utilisant diverses copules incorporant des dépendances de queue. La dernière section présente la corrélation des réassureurs au sein du même groupe et examine comment le capital économique évolue lorsque cette corrélation varie.

## CHAPITRE 1 Généralités sur la réassurance

Ce chapitre présente les généralités sur la réassurance. En commençant par une introduction au développement de la réassurance qui montre une exposition croissante au risque de défaut en réassurance due à la croissance du marché. La relation entre les assureurs et les réassureurs rappelle la nécessité d'être très attentif à ce risque. Les réassureurs jouent un rôle important dans le transfert des risques. Enfin, les différents types de réassurance seront brièvement décrits. L'objectif est de fournir au lecteur une compréhension de base sur la réassurance.

### 1.1 Marché de réassurance en développement

Le marché de la réassurance est aussi vieux que le marché de l'assurance. L'origine de la notion de réassurance peut remonter au Moyen Âge tardif pour la couverture du transport maritime. À cette époque, l'assurance était proposée exclusivement par des souscripteurs individuels et non par des sociétés spécialisées. Les assureurs travaillaient sans statistiques, se fiant uniquement à une évaluation subjective des risques.

La réassurance a commencé à faire son apparition aux États-Unis à la fin du 18<sup>ème</sup> siècle, mais la plupart des grandes polices étaient encore souscrites en Angleterre grâce à l'établissement de Lloyd's. Il a fallu attendre le début du 19<sup>ème</sup> siècle pour que la réassurance moderne fasse sa première apparition en Allemagne. La réassurance ne s'est plus limitée au commerce maritime, elle s'est diversifiée dans l'assurance habitation, l'incendie, la grêle et plus encore. Après la Seconde Guerre mondiale, la victoire de la résistance a propulsé de nombreux pays du tiers monde à s'engager sur la voie du développement indépendant et le secteur de la réassurance a connu une croissance rapide.

Depuis le début des années 1990, les interconnexions entre les sociétés de réassurance ont augmenté à cause de la fréquence hausse des catastrophes naturelles. D'après le rapport publié par Swiss Re, la part de marché des dix premiers réassureurs est passée de 29% à 51% entre 1990 et 2003. Après la crise financière mondiale de 2008, malgré la baisse de la rentabilité du secteur de l'assurance due aux pressions financières et réglementaires, avec le redressement progressif du marché financier, le marché de la réassurance est aujourd'hui un marché en pleine expansion, qui occupe environ 5% des primes d'assurance mondiales. Selon une étude par *A.M. Best (2021)*<sup>1</sup>, le réassureur allemand Munich Re était la plus grande société de réassurance au monde en 2021. Les primes nettes souscrites par Munich Re se sont

---

1. Source : <https://www.reinsurancene.ws/top-50-reinsurance-groups/>

élevées à environ 44 milliards de dollars. Swiss Re était le deuxième plus grand réassureur avec 37 milliards de dollars.

L'expansion progressive du marché de la réassurance a un effet secondaire de la croissance des valeurs des actifs de réassurance détenus par les assureurs, c'est-à-dire de l'exposition accrue au risque de crédit des réassureurs. Ce risque accru peut être la cause de l'instabilité dans les bilans des assureurs. Si ce risque n'est pas diversifié, les assureurs seront exposés à des pertes dépassant leurs attentes.

## 1.2 Outil pour la gestion des risques

Les compagnies d'assurance sont des entreprises qui traitent le risque. Le **risque**, appelé également l'aléa qui peut être défini comme un évènement futur qui aura lieu objectivement et incertainement et ayant un effet négatif sur les conditions financières, corporelles, etc. Il accompagne les individus tout au long de leur vie. Par exemple, la survenance d'un accident de voiture entraîne une perte financière et corporelle imprévue. Afin de se protéger contre les risques, les individus (ou les entreprises) sont motivés à acheter l'assurance selon les différents types de risques assurés. Les assureurs auront la même réaction que les assurés, c'est-à-dire que si ces risques subsistent, ils voudront réduire les pertes importantes en réassurant tout ou partie des sinistres. Le risque est donc la **matière première** des assureurs et des réassureurs.

Le risque est un **objet assuré** par un contrat d'assurance, tel que le corps, la vie ou les biens d'une personne. L'importance du risque est évalué principalement sur sa gravité et la probabilité d'occurrence. En fonction de ces caractéristiques, le risque peut être classifié en *catastrophique* et *répétitif*. Le risque catastrophique représente généralement des caractéristiques de risque uniques, ayant une sévérité élevée et ont une probabilité d'occurrence incertaine, par exemple les lancements de satellites, les catastrophes naturelles, etc. Alors le risque répétitif est le risque qui a une probabilité stable et élevée de survenance de sinistres avec la sévérité faible, par exemple l'assurance automobile.

La *Directive 2009/138/CE* [9] publiée par le *Parlement européen et du Conseil* en 25 novembre 2009 a donnée la définition de la réassurance dans le contexte de Solvabilité II :

La réassurance concerne l'une des deux activités suivantes :

- « *l'activité qui consiste à accepter des risques cédés par une entreprise d'assurance ou entreprise d'assurance d'un pays tiers ou par une autre entreprise de réassurance ou entreprise de réassurance d'un pays tiers ; ou* »
- « *s'agissant de l'association de souscripteurs dénommée «Lloyd's», l'activité consistant*

pour une entreprise d'assurance ou de réassurance autre que la Lloyd's à accepter les risques cédés par tout membre de la Lloyd's; »

La réassurance est un mécanisme par lequel l'assureur fait garantir par un autre assureur (ou un réassureur) tout ou partie des risques qu'il a lui-même couverts. Les assureurs directs échangent rarement des risques entre eux. L'assureur qui cède le risque est appelé **cédant**. En même temps, les affaires de réassurance peuvent également être traitées entre réassureurs, une opération par laquelle un réassureur transfère les risques qu'il a réassurés à un autre réassureur, on l'appelle **rétrocession**. Un autre mécanisme qui permet aux grands groupes d'assurance comme AXA de gérer le risque de solvabilité est celui des transactions de réassurance intragroupe. Le cédant bénéficie d'une réduction de son exposition aux risques non désirés et finalement atteint l'objectif de l'allocation efficace du capital au niveau du groupe et entre ses filiales.

Par contre, les transactions de réassurance internes créent un risque de contrepartie additionnel, où l'ampleur du risque de solvabilité dépend fortement de la position du groupe dans son ensemble ou de l'interaction des filiales.

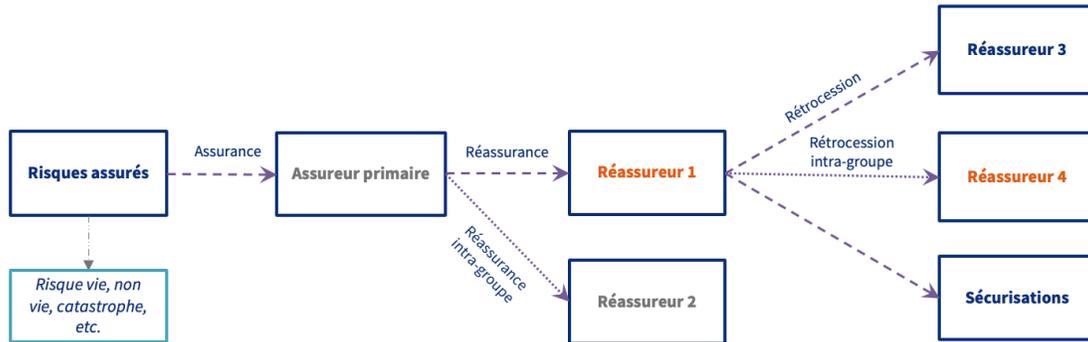


FIGURE 1.1 Relation entre assureur et réassureur

D'après *Swiss Re (2016)*<sup>2</sup>, la réassurance est l'assurance des compagnies d'assurance. L'intérêt majeur d'avoir la réassurance est de transférer les risques de l'assureur. Elle est une pratique consistant pour un assureur à transférer une partie des activités d'assurance qu'il entreprend au réassureur. En raison des exigences en capital de solvabilité imposées aux compagnies d'assurance par les régulateurs, la réassurance permet de protéger leurs fonds propres par une protection du résultat technique du bilan en allouant de manière efficace les risques auxquels l'assureur est exposé. Les risques subis par l'assureur sont parfois extrêmes

2. Source : <https://www.swissre.com/Library/the-essential-guide-to-reinsurance.html>

et aggravés, comme les catastrophes naturelles, la pandémie de Covid-19. La réassurance peut être donc, un outil pour libérer les risques futurs qui n'influence pas aujourd'hui le bilan de l'assureur, mais si le risque arrive, elle pourra aider à réduire le risque technique en contrebalançant par un risque financier de plus faible amplitude. La compagnie d'assurance est également capable de disposer d'un capital plus important pour souscrire plus de contrats et amener plus d'affaires. L'autre avantage de souscrire un contrat de réassurance est l'apport de l'expertise technique, un mécanisme de surveillance est formé entre le réassureur et l'assureur par le contrat de réassurance, le réassureur peut utiliser son expertise pour partager des informations sur la tarification et la souscription avec ses cédants. Les assureurs peuvent avoir plus d'occasions d'en apprendre davantage sur des produits nouveaux et peu familiers, ce qui réduit les barrières à l'entrée du marché.

### 1.3 Formes et types de réassurance

Les deux formes les plus courantes de réassurance sont :

- La réassurance « **facultative** » : Il s'agit d'une option pour l'assureur d'adapter sa couverture en réassurance. Les risques cédés sont les risques individuels, comme la réassurance sur une centrale d'électricité, qui est liée à l'exploitation d'une usine<sup>3</sup>, la cession est au cas par cas, risque à risque, c'est-à-dire de réassurer individuellement un risque (ou un événement), chaque risque étant tarifé séparément. Cette forme de réassurance donne la liberté aux assureurs de céder et aux réassureurs d'accepter le risque, il n'y a pas d'engagements à priori.
- La réassurance « **traité ou obligatoire** » : Il s'agit d'une cession en réassurance sur l'ensemble d'un portefeuille, représentant un risque homogène. Elle est un accord bilatéral sur un cadre de polices par type de risque, qui est négocié en avance. L'assureur a une obligation de céder le risque du portefeuille défini dans le traité, et le réassureur ne peut pas le refuser.

Il existe également, mais rarement, la réassurance « **facultative-obligatoire** » qui est un type de réassurance hybride où le réassureur doit accepter les risques cédés par le cédant, sous réserve de certaines exigences préalablement identifiées dans le contrat.

On distingue principalement deux types de réassurance pour chaque forme de réassurance : **réassurance proportionnelle** et **réassurance non proportionnelle** [24].

Pour faciliter l'explication, on suppose que  $I$ , est le montant de sinistre cédé et payé par le réassureur d'un assureur, et  $E$ , qui est le montant de sinistre retenu par l'assureur après

---

3. Exemples donnés par *Swiss Re (2016)*

l'application de la réassurance. Dans un contrat de réassurance, le montant global des sinistres  $S$  est désormais décomposé en deux parties :

$$S = I + E$$

La partie  $I$  représente l'exposition de l'assureur au risque de contrepartie en réassurance qui ne peut être récupéré en tout ou en partie en cas de défaut du réassureur.

La **réassurance proportionnelle** consiste en une participation proportionnelle du réassureur sur les primes et les sinistres du cédant.

- **Quote-Part (QP)** : Ce type de réassurance est couramment utilisée dans toutes les branches d'assurance. Sa facilité d'application et sa simplicité conceptuelle le rendent populaire. L'assureur cède un pourcentage équivalent des primes et des sinistres du portefeuille aux réassureurs, le taux de cession ( $a$ ) est défini pour toutes les polices.

$$I = a \cdot S, \text{ avec } a \in (0, 1)$$

- **Excédent de pleins (XP)** : Il permet aux assureurs de conserver une exposition maximale, qui est exprimé en capital assuré ( $Q_i$ ) de la police  $i$  et de partager les sinistres et les primes selon un taux de cession quand les polices dépassent un certain montant de garantie (plein de rétention). Le taux de cession ( $a_i$ ) s'écrit comme suivant :

$$a_i = \frac{\text{Min}(L; \text{Max}(Q_i - M, 0))}{Q_i}$$

$$I_i = a_i \cdot S_i, \quad I = \sum_{i=1}^N I_i$$

On appelle le seuil d'intervention  $M$  la **priorité**. Le réassureur touchera donc le dépassement de la rétention jusqu'au maximum de sa capacité monétaire  $L$ .

La réassurance proportionnelle a un effet proportionnel sur le résultat technique de l'assureur, il est sensible au changement des traités de réassurance.

La **réassurance non proportionnelle** décrit le cas où le réassureur n'intervient que lorsque le sinistre du cédant ou la perte annuelle atteint un certain seuil, elle limite les pertes dues à des événements extrêmes comme les sinistres en réduisant la volatilité du portefeuille. Il existe deux types de réassurance non proportionnelle :

- **Excédent de sinistre (XS)** : Pour une rétention  $M$  prédéfinie, l'assureur cède l'excé-

dent de sinistralité au réassureur. Le programme s'écrit comme « **Portée xs Priorité** », donc  $L \text{ xs } M$ . Le traité de réassurance en XS est souvent défini par risque, mais il existe aussi des cas où l'assureur confronte à de nombreux sinistres en même temps, par exemple, le tremblement de terre, un évènement qui provoque l'effondrement de bâtiments sur une vaste zone. Au lieu de calculer la perte pour chaque bâtiment (par risque), il est préférable d'élaborer un contrat XS par évènement.  $S_j^c$  représente donc le montant total de tous les sinistres survenus à cause d'un même évènement  $H$ , et  $M_c$  qui est la priorité spécifique pour cet évènement.

$$I_{\text{par risque}} = \sum_{i=1}^N \min \left\{ (S_i - M)_+, L \right\}$$

$$I_{\text{par évènement}} = \sum_{j=1} (S_j^c - M_c)_+, \quad S_j^c = \sum_h S_h$$

- **Excédent de Perte Annuelle (Stop Loss) (SL)** : Ce type de réassurance est moins courant car il est difficile de le tarifer correctement. Le réassureur prend en charge le dépassement des pertes annuelles sur la priorité prédéterminée dans le contrat de réassurance afin d'encourir des pertes extrêmes des sinistres résultant de la dérive de fréquence. Il est souvent exprimé en ratio sinistres-primés (%), ou encore, si la sinistralité s'écrit en annuelle, alors un traité de XS avec le programme  $L' \text{ xs } M'$  peut aussi être considéré comme un traité de type « **Aggregate Stop Loss** ».

$$I = \min \left\{ \left( \sum_{i=1}^N S_i - M' \right)_+, L' \right\}$$

En plus des sinistres cédés, les primes de réassurance  $P$  sont exprimées par la même formule pour tous les types de réassurance :

$$P_{\text{cédées}} = a \cdot P$$

$$P_{\text{conservées}} = (1 - a) \cdot P, \quad P = \sum_{i=1}^N P_i$$

Selon le type de réassurance,  $a$  est un coefficient donné dans le contrat de réassurance pour la réassurance non proportionnelle, tandis que pour la réassurance proportionnelle, il s'agit du taux de cession. Ce  $P$  indique que la prime d'assurance commerciale inclut les frais et les chargements de l'assureur tels que la **commission**. En effet, en vision de l'assureur, il est toujours chargé de la croissance des affaires et de la gestion des sinistres, y compris la partie

est cédée au réassureur. Pour le compenser, le réassureur verse à l'assureur une commission afin d'effectuer un partage du sort. Dans les traités proportionnels, notamment les traités QP, il est nécessaire de définir une commission de réassurance. Il existe deux types de commission  $C$  : **fixe** et **variable** qui dépendent du ratio sinistres-primés ( $S/P$ ) et sont exprimées en pourcentage des primes cédées de l'assureur.

$$C = c \cdot P_{\text{cédées}}$$

avec  $c$  le taux de commission.

Finalement, le résultat technique s'écrit de manière suivante :

- *En vision de l'assureur :*

$$RT_{\text{brut}} = P - S - F$$

$$RT_{\text{net}} = (1 - a) \cdot P - (S - I) - F + C$$

avec  $F$  les frais de l'assureur pour la gestion du portefeuille.

- *En vision du réassureur :*

$$RT_{\text{réassurance}} = a \cdot P - I - C$$

La gestion des risques est une tâche essentielle pour les assureurs. Les compagnies d'assurance doivent avoir une compréhension claire de leur capacité sur la tolérance des risques afin de personnaliser le montant de la rétention qui convient à leur profil ainsi l'exposition vis-à-vis aux réassureurs. L'existence de la réassurance aide les assureurs à diminuer leur risque de souscription grâce à une libération du capital, en revanche, il est nécessaire d'évaluer le risque de défaut des réassureurs suite à une hausse progressive de la demande de réassurance. Ceci est particulièrement pertinent dans le cas d'une assurance concernant les sinistres catastrophiques et les difficultés financières.

## CHAPITRE 2 Risque de contrepartie et exigences en fonds propres

La mesure et l'évaluation du risque de contrepartie en réassurance est une condition préalable et une base pour que les institutions financières puissent gérer ce risque. Pour cette raison, il est nécessaire de comprendre la méthodologie d'évaluation du risque et les exigences du cadre réglementaire. Ce chapitre est divisé en deux sections principales, la première traitant du risque de contrepartie en réassurance et la seconde des exigences de capital de solvabilité pour couvrir ce risque. Nous donnons d'abord la définition et les précisions du *RCR* pour permettre au lecteur d'entrer dans le sujet, puis nous présentons l'environnement réglementaire dans lequel s'inscrit ce mémoire dans le secteur bancaire (*Bâle I, II, III*) et le secteur d'assurance (*Solvabilité I, II*).

### 2.1 Présentation générale du risque de contrepartie

Le risque de contrepartie des réassureurs est devenu une préoccupation majeure pour les assureurs. Jusqu'à présent, les défaillances de la réassurance ont été peu fréquentes, mais des incidents catastrophiques comme l'attaque du 11 septembre 2001 sur le World Trade Center (*catastrophe man-made*), le Hurrricane Katrina en 2005 (*catastrophe naturelle*), sont de plus en plus fréquents et extrêmement coûteux. Selon *Standard & Poor's (2011)* [22], les catastrophes les plus graves se sont concentrées entre 2000 et 2011. En particulier, en 2010, la 167 catastrophes naturelles ont eu lieu, soit bien plus que la moyenne historique de 94. Les pertes subies par les assureurs et les réassureurs à la suite de ces événements ont progressivement augmenté, ce qui ont mis en évidence le problème essentiel de la capacité des réassureurs à payer les sinistres.

D'autre part, les assureurs, en tant que les acteurs majeurs dans le marché financier, ont subi un choc sur le capital pendant la crise des subprimes en 2008. L'une des plus touchées est l'entreprise *AIG (American International Group, Inc)*, l'un des leaders mondiaux dans le secteur d'assurance. En effet, elle fait face à plusieurs incertitudes comme l'augmentation brutale de la sinistralité puisque les assurés n'étaient pas capables de payer leur crédit à cause de l'effondrement du marché immobilier<sup>1</sup>. Dans le même temps, *AIG* a également été impliqué dans certaines activités de dérivés financiers, elle était très exposée aux *CDS (credit*

---

1. *Lorsqu'un agent achète une maison, il souscrit une assurance emprunteur auprès de la compagnie d'assurance. En raison de l'effondrement du marché immobilier, l'emprunteur perd son emploi ou est incapable de rembourser le prêt en raison de taux d'intérêt élevés et la compagnie d'assurance sera responsable de la violation de la police.*

*default swap*) avec Lehman Brothers, vu que ce dernier a fait faillite durant la crise, AIG a été demandé un montant énorme par ses principales contreparties. Elle est dégradée par les agences de notation après avoir eu une perte immense.

Partant des États-Unis, la crise s'est rapidement propagée dans le monde entier. Ainsi, en Europe, l'un des plus grands réassureurs mondiaux, Swiss Re, a vu sa notation abaissée et a enregistré une perte importante de 1,7 milliard d'euros<sup>2</sup> de la valeur de ses actifs risqués. Au Japon, la compagnie d'assurance-vie Yamato Life a fait faillite en raison de la dépréciation importante de la valeur des titres américains qu'elle détenait dans son bilan, suivi une baisse des liquidités des actifs financiers.

Le marché de l'assurance est vulnérable aux chocs, particulièrement sous la pression des catastrophes et des récessions économiques. Les pertes volumineuses ont mis en lumière la nécessité de reconsidérer la réglementation des risques divers, en particulier, le risque de défaut de contrepartie, notamment au vu des événements récents qui ont ébranlé des géants des secteurs d'assurance. La santé financière des assureurs et des réassureurs peut fluctuer de manière significative. La gestion des risques est devenue un sujet de plus en plus important, tout comme l'adéquation de la gouvernance de l'entreprise, car la prise de risque excessive entraîne des pertes inattendues. En réponse à la panique de 2008, les réglementations de différents pays ont été renforcées en termes d'exigences de capital. La directive européenne Solvabilité II a été introduite après la crise des subprimes pour éviter la ruine économique des assureurs. Elle a encouragé les assureurs à mieux mesurer tous les risques et à évaluer plus finement leurs besoins en capitaux pour absorber les dommages notables.

### 2.1.1 Risque de contrepartie en réassurance

Les compagnies d'assurance sont confrontées à une variété de risques (*Risque financier, d'assurance, opérationnel*). Certaines sont causées par la spécificité de leur activité, d'autres sont dépendantes de l'activité de l'entreprise.

Elles peuvent être soumises à diverses formes du risque financier : *risque de marché, risque de crédit et risque de liquidité*. Ils sont corrélés entre eux.

Un tableau décrivant ces risques se trouve ci-après :

---

2. Source : LesEchos

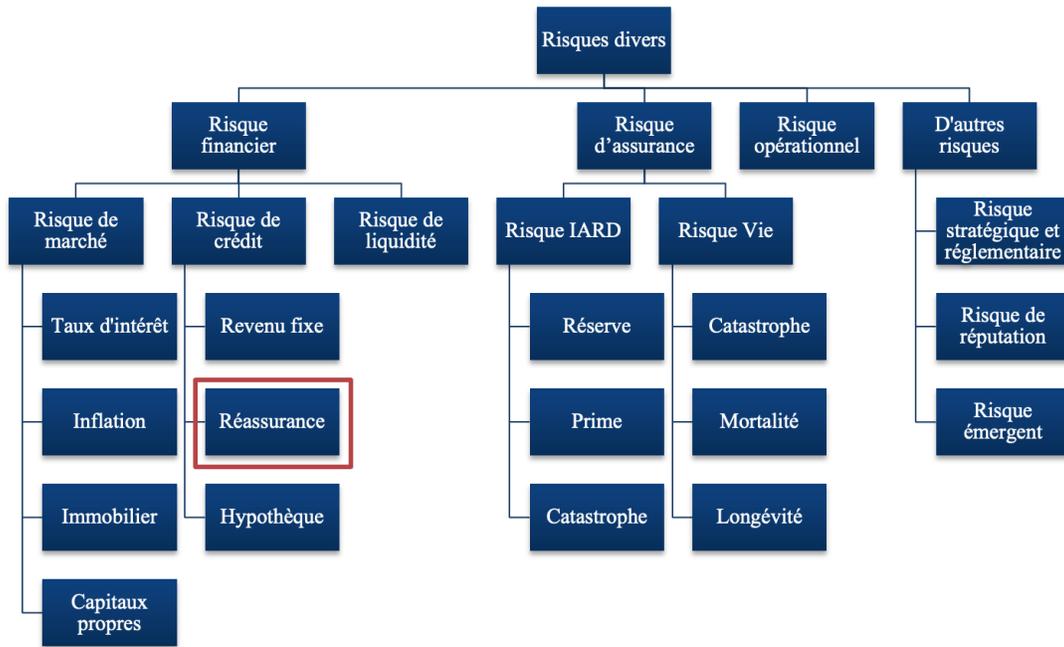


FIGURE 2.1 Risques spécifiques aux compagnies d'assurance

Selon la définition de la *Directive 2009/138/CE* du *Parlement Européen et du Conseil*, le **risque de crédit** « est le risque de perte, ou de changement défavorable de la situation financière, résultat de fluctuations affectant la qualité de crédit d'émetteurs de valeurs mobilières, de contreparties ou de tout débiteur, auquel les entreprises d'assurance et de réassurance sont exposées sous forme de risque de contrepartie, de risque lié à la marge ou de concentration du risque de marché ».

Le **risque de contrepartie en réassurance** est l'un des sous-risques dans le risque de crédit. Selon les caractéristiques, on distingue deux notions :

- **Risque de défaut** : la contrepartie est incapable de remplir partiellement ou totalement ses obligations contractuelles envers l'assureur dans une période donnée.
- **Risque de dégradation de la notation** (*Financial Strength Rating*) : l'assureur subit une perte si sa contrepartie a une notation dégradée dans la période donnée puisque la probabilité de défaut de la contrepartie augmente lorsque la notation diminue.

L'évaluation du risque de contrepartie en réassurance repose principalement sur la notation du réassureur, qui reflète les pertes potentielles dues à des défauts inattendus ou à la détérioration de la qualité de la solidité financière des contreparties au cours des douze mois suivants.

Le défaut du réassureur entraînera des dépenses supplémentaires pour l'assureur, car il pour-

rait ne pas être en mesure de récupérer toutes les créances de réassurance, par exemple, les montants qui pourraient être payables pour des sinistres avec le réassureur. Alors, une baisse de la notation des contreparties de réassurance oblige les assureurs à augmenter le montant du capital de solvabilité requis détenu.

Le réassureur partage verticalement des risques couverts de l'assureur, l'effondrement du secteur de la réassurance pourrait entraîner une plus grande instabilité financière au sein du secteur de l'assurance, ce qui pourrait avoir un impact sur l'économie dans son ensemble.

### 2.1.2 Spécialités du risque de contrepartie en réassurance

La modélisation du risque de contrepartie en réassurance requiert les quatre paramètres importants :

#### ► Expositions à la réassurance (I)

**L'exposition au risque de contrepartie** est le niveau à risque en cas de défaut de la contrepartie, c'est-à-dire le montant que l'assureur estime perdre si un défaut intervient.

Dans le cas de la réassurance, cela se définit de la façon suivante : une partie des provisions techniques cédées aux réassureurs, les sinistres et les créances nettes (« *Net receivables* » en anglais) comptabilisées qui sont les montants comptables dus par le réassureur à l'assureur<sup>3</sup>. Cette exposition pouvant être importante, il est d'usage que le réassureur poste du collatéral.

L'ensemble de l'exposition à la réassurance correspond au montant des créances de réassurance (« *Reinsurance recoverables* » en anglais). Elles comprennent :

- ***Sinistres cédés*** : Il s'agit du montant des sinistres et des frais liés aux sinistres dus à l'assureur par le réassureur.
- ***Provisions pour sinistres inconnus cédés (IBNR)*** : Il s'agit du montant des pertes encourues mais non déclarées.
- ***Provisions pour primes non acquises cédées (PPNA)*** : Ils sont les montants des primes non acquises versées au réassureur.
- ***Net receivables*** : Il s'agit du montant des sinistres en retard payés par l'assureur mais non encore remboursés par le réassureur, plus les commissions et autres créances à payer par le réassureur, moins la dette envers le réassureur.

---

3. Ils sont la différence entre le crédit du réassureur et les dettes envers ce même réassureur

- **Ajustements économiques sur les provisions pour sinistres et primes cédées** : Ils sont les ajustements qui permettent le passage du bilan de la vision comptable au celui de la vision économique sous Solvabilité II. Ils prennent en compte des frontières de contrats et l'effet d'actualisation non visible en norme comptable (*sous IFRS4*).

La « **Collatérisation** » est une technique pour atténuer le risque de contrepartie en réassurance. Elle est un montant placé sur un compte spécifique que la cédante détiendra dans le cas d'un défaut. Autrement dit, elle est la garantie pour le bon paiement du réassureur. Elle permet de réduire les expositions, donc le coût en capital immobilisé. Il y a deux manières d'appliquer la collatérisation à la réassurance, les réassureurs collatérisent les obligations contractuelles liées aux sinistres au moment où ils sont encourus avant qu'ils ne doivent être payés. Ou encore, les réassureurs accordent les collatéraux sur tout ou partie de limite de l'exposition au moment où ils établissent le contrat de réassurance [15].

Les montants des collatéraux nécessaires pour garantir les transactions de réassurance varient en fonction du type de réassurance et de la solvabilité financière du réassureur, en d'autres termes, la notation de la stabilité financière du réassureur. Il existe une variété de types de garanties qui peuvent être utilisées pour mitiger le risque de contrepartie, dans le plus souvent des cas : **le cash** reçu par réassureur, **les garanties financières** comme les lettres de crédit, **les actifs « nantis »** (« *pledged* » en anglais). Il est important que l'assureur prenne en compte les collatéraux dans la mesure du montant de l'exposition vis-à-vis à sa contrepartie.

L'exposition de l'assureur à la réassurance ( $I$ ) s'écrit comme suit :

$$\text{Expositions}_{\text{réassurance}} = \text{Max} [ (\text{Sinistres cédés} + \text{Provisions IBNR cédées} + \text{PPNA cédées} + \text{Net receivables} + \text{Collatéraux} - \text{Ajustements économiques sur les provisions pour sinistres et primes cédées}) ; 0 ]$$

Du point de vue de l'assureur, l'exposition totale au risque de contrepartie en réassurance au cours de l'année  $i$  est la perte attendue en cas de défaut du réassureur. Elle s'écrit comme suit :

$$\text{Expositions au RCR pour l'année } i = I_i \times PP_i \times PD_{R,i}$$

Avec  $PP$  : le taux de paiement chaque année et  $PD$  : la probabilité cumulée de défaut à l'année  $i$  qui dépend de la notation du réassureur ( $R$ )<sup>4</sup>.

---

4. L'explication de la notation sera dans la section suivante.

### ► Probabilité de défaut (PD)

Elle correspond à la probabilité qu'une contrepartie soit défailante sur un horizon d'un an. Dans le secteur de l'assurance, les défaillances des compagnies sont très rares. Une étude de *Standard & Poors (2021)* [21] a révélé que le secteur de l'assurance a la plus faible probabilité historique de défaut, soit moins de 1%. Parmi toutes les sociétés qui ont fait défaut entre 1981 et 2021, seules 4 sociétés d'assurance initialement notées AAA ont fait défaut au cours des 41 dernières années<sup>5</sup>. L'évaluation des probabilités de défaut peut être basée sur les probabilités de défaut historiques dans le temps, telles que les études menées par les agences de notation, une probabilité de défaut spécifique étant attribuée à chaque classe de notation. Plus la note est faible, plus le risque de défaut est élevé.

	1 an	3 ans	10 ans
<b>AAA</b>	0,00%	0,35%	1,63%
<b>AA</b>	0,04%	0,26%	1,67%
<b>A</b>	0,10%	0,41%	1,83%
<b>BBB</b>	0,18%	0,94%	3,20%
<b>BB</b>	0,57%	2,15%	10,58%
<b>B</b>	1,84%	6,11%	14,38%
<b>CCC/C</b>	23,26%	30,59%	42,67%

TABLEAU 2.1 Probabilité moyenne pluriannuelle de défaut des entreprises mondiales du secteur de l'assurance (1981-2021) selon S&P

### ► Taux de recouvrement (RR)

Le taux de recouvrement s'agit de la part de l'exposition qui peut être remboursée lors du défaut par le réassureur. Il existe une corrélation négative entre probabilité de défaut et taux de recouvrement, surtout en cas de récession ou de ralentissement de l'activité industrielle (*Max Bruche & Carlos Gonzalez-Aguado, 2008*) [16]. Le taux de recouvrement dépend du niveau de séniorité de la dette de la firme, par exemple, le recouvrement d'une obligation senior non garantie peut être plus élevé que celui d'une obligation junior.

### ► Rythme de paiement (PP)

Le rythme de paiement représente le pourcentage du paiement attendu des créances sur les réassureurs à l'assureur. Les contrats de réassurance ont parfois une longue durée, donc le réassureur rembourse chaque année à l'assureur une partie des créances.

---

5. Elles sont *Ambac Assurance Corporation, Mutual Benefit Life Insurance Company, Executive Life Insurance Company of California, et Confederation Life Insurance Company (1994)*.

La quantification et l'estimation du risque de contrepartie est toujours un sujet difficile qui comporte de nombreux obstacles :

- **Évènements de défaut** : La première difficulté est liée à la disponibilité des données sur le défaut des réassureurs. Étant donné que la faillite d'une compagnie de réassurance est un événement à faible probabilité, le nombre limité de contreparties en cas de défaut fait que les pertes en cas de défaut (*LGD*) sont souvent estimées de manière sophistiquée. Il est donc difficile d'estimer la corrélation de défaut (*Asset correlation*) entre les réassureurs.
- **Choix de Modèle** : Les expositions des réassureurs sont souvent hétérogènes, les modèles classiques du risque de crédit dans le cadre bancaire ne sont pas capables d'être répliqués simplement en raison de l'hypothèse d'homogénéité du portefeuille.
- **Horizon de temps** : La mesure du risque de contrepartie, c'est-à-dire le calcul du capital de solvabilité requis pour ce risque est souvent dans l'horizon d'un an (*sous Solvabilité II*). Cela augmente la difficulté de sa modélisation et du back-testing puisque la durée des accords de réassurance s'étend souvent sur un grand nombre d'années.
- **Distribution des pertes** : La modélisation des pertes du risque de contrepartie en réassurance selon les exigences réglementaires suppose souvent que les rendements des actifs des réassureurs suivent une loi normale multivariée. Cependant, le calcul du capital requis à partir d'une **Valeur à Risque** ( $VaR_{99,5\%}$ )<sup>6</sup> a mis en importance que l'assureur pense à capter les distributions de pertes à queue plus épaisse.

### 2.1.3 Notation de la solidité financière (Financial Strength Rating)

La modélisation du RCR dans ce mémoire s'articule principalement autour de la notation des réassureurs.

Les institutions financières s'appuient souvent sur des notations de crédit externes pour mesurer la solvabilité financière d'un émetteur. Ces notations externes mesurent la qualité de la capacité à rembourser la dette. Les trois principales agences de notation mondiales sont **Moody's**, **Standard & Poor's** et **Fitch**. Ainsi, **A.M. Best**, qui a été fondée en 1899 à New York et est spécialisé dans la notation de solidité financière des compagnies d'assurance dans de nombreux pays.

Les agences de notation visent à fournir des significations de notation uniformes dans différents secteurs géographiques et secteurs industriels, car une notation doit avoir une signifi-

---

6. La définition d'une VaR est donnée dans la section suivante

cation similaire, indépendamment du secteur ou de la région.

Dans le secteur d'assurance, l'introduction de la Directive de la Solvabilité II a amélioré la réglementation sur les compagnies d'assurance. Les notes des contreparties sont un outil primordial pour évaluer sa solvabilité financière et estimer le risque de défaut. Elles donnent un aperçu de la capacité d'une compagnie d'assurance ou de réassurance à répondre aux réclamations et obligations de ses assurés dans les conditions convenues. En réassurance, les agences de notation servent d'intermédiaires entre les compagnies d'assurance et les réassureurs, elles fournissent les informations sur la solidité financière et la solvabilité des réassureurs, on ne parle que la notation de solidité financière (*Financial Strength Rating*).

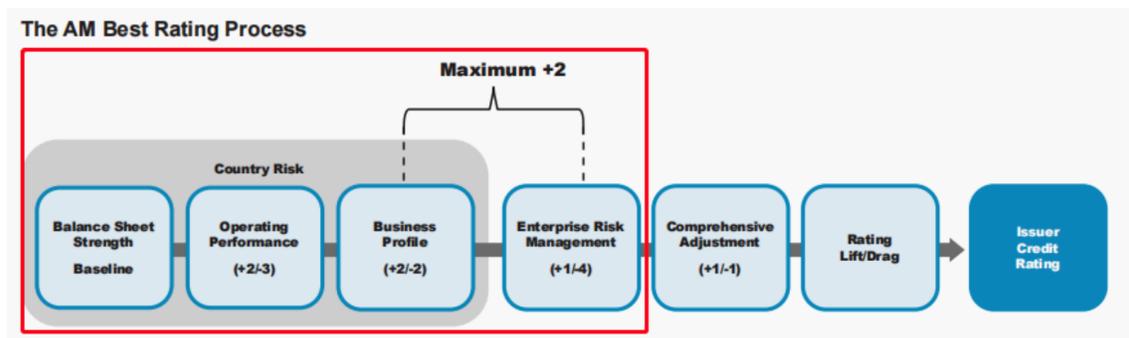


FIGURE 2.2 Facteurs qualitatifs et quantitatifs pour l'attribution d'une note FSR (Source : AM Best)

Selon A.M. Best<sup>7</sup>, la note de solidité financière de chaque société d'assurance est déterminée après un examen minutieux d'un certain nombre de paramètres qualitatifs et quantitatifs. Les composantes principales sont : (1) la solidité du bilan, (2) des performances opérationnelles, (3) le profil de l'entreprise et (4) la gestion des risques de l'entreprise (ERM).

Les notations de solidité financière ont également une perspective (*outlook*) de notation qui indique l'évolution potentielle à moyen terme de la notation à l'avenir. Une perspective *positive/stable/négative* indique que la notation peut être *augmentée/inchangée/abaissée*. Une notation assortie d'une perspective stable n'est pas susceptible de changer. Une perspective de notation en développement signifie le contraire d'une notation stable : *la notation peut être abaissée ou relevée*. Cependant, il ne s'agit pas d'un indicateur ou d'un prédictif de la probabilité de dégradation ou de défaut pour un assureur car il est prédictif, le modèle de notation ne capte pas toutes les informations des assureurs.

Les notations sont définies pour les différents horizons temporels :

7. Source : <https://www3.ambest.com/ambv/ratingmethodology/OpenPDF.aspx?rc=250950>

- *Notation à Court Terme* : Elle mesure le risque de crédit sur une courte période, généralement un an. Elle reflète la capacité de la contrepartie à remplir ses obligations financières à court terme.
- *Notation à Long Terme* : Elle envisage des périodes plus longues, plus d'un an.

Généralement, les compagnies d'assurance sont notées sur 6 niveaux (*voir Tableau 2.2*).

### Financial Strength Rating

A.M. Best	S&P	Moody's	Fitch	Financial Strength Level
A++	AAA	Aaa	AAA	Extremely strong
A+	AA	Aa	AA	Very strong
A/A-	A	A	A	Strong
B++	BBB	Baa	BBB	Adequate
B+	BB	Ba	BB	Vulnerable
B-	B	B	B	Highly vulnerable

TABLEAU 2.2 Catégories des notations de la solidité financière (*Source : Munich Re*)

Les entreprises dont la notation est inférieure à *BBB* sont considérées comme étant en mauvaise situation financière. Elles sont vulnérables au défaut.

Les notations peuvent évoluer dans le temps. On dit que la notation d'une compagnie d'assurance migre, par exemple, de *A+* à *B++*. Une telle migration de notation s'appelle une **dégradation de notation**. Une migration ou une transition vers le haut de la notation est, par exemple, une mise à niveau de *B++* à *A-*. Une mise à niveau reflète le fait que le risque de défaut est réduit, une dégradation implique un risque de défaut accru.

## 2.2 Solvabilité et exigence en capital réglementaire

Les entreprises d'assurance doivent avoir une solvabilité minimale en rapport avec l'ampleur de leurs activités et le degré de risque. L'entreprise doit constituer un indicateur de solvabilité en prenant compte sa situation financière.

Swiss Re a divulgué des informations sur les défaillances de réassureurs entre 1980 et 2003 (*Sigma 2003*), environ 33% des défaillances étaient liées au capital, soit en raison de réserves de capital inadéquates, soit en raison d'une allocation inefficace du capital. 4% des défaillances étaient dues au défaut de paiement de leurs réassureurs. La majorité des pertes restantes ont été causées par de graves catastrophes ou d'autres causes. Il est donc particulièrement important pour les assureurs de calculer un capital économique raisonnable. Le capital économique est le capital que doit détenir un assureur pour maintenir un certain niveau de notation en réponse à l'impact des risques encourus par la société sur la valeur de marché de la société,

ou pour payer les pertes potentielles. Le calcul du capital économique nécessite d'abord une mesure quantitative du risque.

Bien que l'objet et les méthodes de la réglementation des assurances diffèrent d'un pays à l'autre, l'objectif fondamental de la réglementation est de garantir la pérennité des entreprises d'assurance. Le système international de réglementation de la solvabilité, relativement mature, est maintenant ceux de l'Union européenne (*Solvabilité II*) et des Etats-Unis (*Risk-Based Capital, RBC*), tous deux s'inspirent du système de contrôle bancaire à trois piliers (*Bâle I, II, III*).

### 2.2.1 Cadre réglementaire bancaire

Créé en 1974, le Comité de Bâle réunit aujourd'hui les régulateurs de 28 pays différents et constitue la principale source de réglementation bancaire prudentielle visant à assurer la solidité du système financier mondial. Souvent, le principal risque financier est le risque de crédit inhérent au portefeuille de crédit. Afin de garantir une solvabilité suffisante des banques, le Comité de Bâle a établi des règles et a défini des exigences minimales que les banques et les superviseurs doivent respecter.

Le protocole de Bâle I signé en 1988 a été le premier à se concentrer sur le risque de crédit. Chaque banque devait atteindre un ratio Cooke de 8%, c'est-à-dire le ratio entre les capitaux propres et les passifs de la banque. Cela garantissait des réserves de capital adéquates. Cependant, Bâle I a été largement critiqué car le cadre de mesure des risques était très limité sans considération du risque de marché avant 1996.

En 2004, suivi par le phénomène de la titrisation, l'accord de Bâle II a développé une nouvelle approche basée sur trois piliers complémentaires : *les fonds propres, la surveillance des risques, la transparence*. Cette réforme a remplacé le ratio Cooke par le ratio McDonough de 8% lors du calcul des réserves de capital, tout en tenant compte du risque opérationnel. De cette manière, il est possible de prendre en compte divers risques et de mesurer plus précisément les fonds propres. Ainsi, la mise en œuvre du Bâle II a rendu possible la réduction des exigences en capital pour les opérations couvertes par du collatéral. Les banques sont également tenues d'organiser une surveillance interne de leurs risques, ce qui autorise les banques à calculer les exigences minimales en capital par des méthodes internes et à utiliser des notations internes (*IRB, Internal Ratings Based*) au lieu des agences de notation externes.

Après la crise financière de 2008, le secteur a pris conscience des effets néfastes des variations de la notation de crédit des contreparties. Si la notation d'une contrepartie dégrade, les produits dérivés sous-jacents en sa possession peuvent rapidement perdre toute valeur, même

si la contrepartie n'a pas encore fait faillite. L'accord de Bâle III en 2010 a rassemblé un ensemble de règles élaborées au fil du temps. Il a enchaîné avec le CVA (*Credit Valuation Adjustment*), qui correspond à la valeur actualisée des pertes dues au défaut de la contrepartie. Il a également appelé à plus d'exigences en matière de transparence et de calcul des réserves de capital<sup>8</sup>.

### 2.2.2 Cadre réglementaire assurantiel

Les années 1970 ont vu la création de Solvabilité I, la directive réglementant l'assurance en Europe. Adoptée en 2002 après plusieurs décennies de développement, cette réglementation a imposé à chaque compagnie d'assurance de constituer une marge de solvabilité suffisante pour couvrir les pertes potentielles. La marge de solvabilité était calculée de manière proportionnelle, en appliquant un pourcentage spécifique sur les primes et les sinistres ou réserves pour déterminer les besoins en capital. Cependant, Solvabilité I a présenté des faiblesses, notamment des différences de calcul de la marge de solvabilité entre les pays et une réglementation conservatrice en réassurance. De plus, cette méthode n'a pas pris en compte que les risques d'assurance et de marché, sans distinguer les autres risques tels que le risque de crédit ou de liquidité, ce qui entraînait souvent une sous-estimation des exigences en fonds propres.

En raison de la crise financière mondiale de 2008 et de la complexité croissante des risques auxquels le secteur de l'assurance est confronté, les régulateurs européens ont cherché à améliorer la réglementation existante. La réforme **Solvabilité II**, également connue sous le nom de **Directive 2009/138/CE du Parlement Européen et du Conseil du 25 novembre 2009**, a visé à mieux adapter les exigences en fonds propres des compagnies d'assurance et de réassurance aux risques inhérents à leurs activités. Les Directives « *Omnibus II* » ont été proposées en 2011, et la cinquième étude quantitative d'impact (*QIS5*) ont été menées successivement, aboutissant à des modifications continues. Finalement, Solvabilité II est entrée en vigueur le 1<sup>er</sup> janvier 2016.

Solvabilité II est une réforme dirigée par l'**Autorité Européenne des Assurances et des Pensions Professionnelles (EIOPA)**. Son objectif est d'harmoniser le régime prudentiel en Europe, de protéger les assurés en évitant la faillite des assureurs et de garantir la stabilité financière du marché de l'assurance. Elle encourage les assureurs à développer leurs propres modèles internes d'évaluation des risques et de solvabilité, en prenant en compte les spécificités de chaque compagnie d'assurance. La transition de Solvabilité I à Solvabilité II représente

---

8. Il a demandé un ratio de solvabilité de 10,5% en 2019.

un changement vers un type de contrôle de la solvabilité fondé sur le risque. La réassurance est considérée comme un outil efficace de transfert des risques, offrant des avantages significatifs en termes de rendement des fonds propres et de réduction de la volatilité des résultats techniques. Les règles réglementaires de Solvabilité II incluent une nouvelle mesure du risque de contrepartie dans les transactions de réassurance, ce qui a entraîné une augmentation des exigences en capital pour les assureurs.

La réforme de Solvabilité II repose sur trois piliers comprenant des exigences de capital quantitatives, des exigences réglementaires qualitatives et des exigences de communication financière :

- **Pilier 1** (*Exigences de quantification des risques*) : Contraire à l'approche stationnaire de la Solvabilité I, la Solvabilité II souligne l'importance d'identifier les risques inhérents de chaque compagnie d'assurance. Le contrôle doit donc reposer sur une approche prospective et fondée sur les risques. Il demande à chaque compagnie d'assurance à calculer un capital économique exigé pour couvrir les pertes potentielles.
- **Pilier 2** (*Exigences qualitatives de gestion des risques et de gouvernance*) : Il s'agit de clarifier et définir les normes qualitatives sur la structuration du contrôle interne et de la gestion des risques adaptée à l'activité pour une gestion saine et prudente. Il impose les règles de gouvernance en mettant deux processus clés : **ORSA** (*évaluation interne des risques et de la solvabilité*) et **ERM** (*Entreprises Risk Management*) afin de bien mesurer les risques exposés des entreprises.
- **Pilier 3** (*Exigences de communication financière*) : Il vise à renforcer la transparence des états financiers des compagnies vis-à-vis de leur public. Il oblige les assureurs à rendre en public certaines informations correspondant aux exigences réglementaires (de Pilier 1 et 2), ce qui implique un échange d'informations sur la solvabilité avec les actionnaires pour qu'ils aient une bonne compréhension sur l'état de l'entreprise, les autorités de contrôles pour qu'ils exercent sa fonction de supervision. L'un des principaux documents communiqués au public est le **reporting quantitatif QRT**. En réassurance, il s'agit de tableaux de bord définis par l'EIOPA sur les programmes de réassurance, les créances de réassurance, etc.

La Solvabilité I donne une approche plus réaliste pour calculer le capital requis minimum, la valeur des actifs est évaluée selon d'un point de vue comptable. La Solvabilité II adopte une vision **économique** du bilan en **valeur de marché**. Du côté passif, la Solvabilité II met plus de prudence sur les fonds propres.

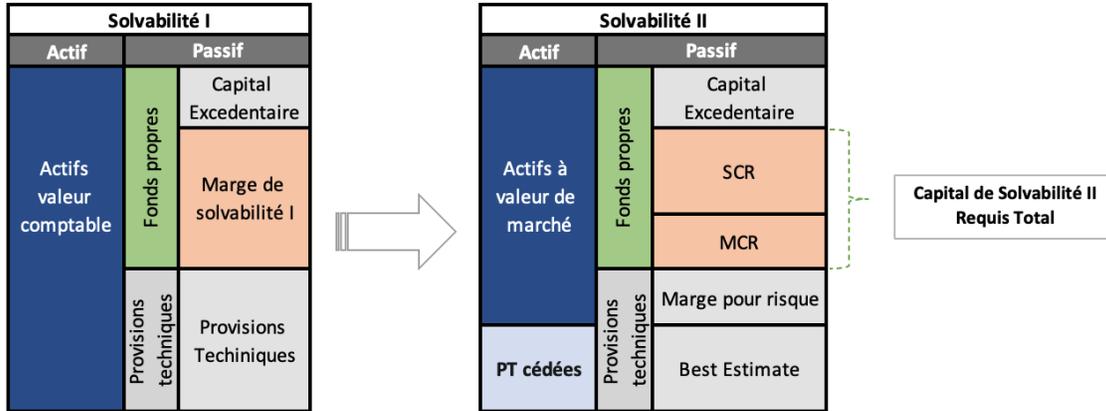


FIGURE 2.3 Passage de Solvabilité I à Solvabilité II

L'activité de réassurance est l'une des sources du capital propre d'un assureur. Si un réassureur fait défaut, il y aura une baisse des fonds propres. Afin de couvrir le risque de contrepartie en réassurance, deux règles ont été introduites dans le premier pilier de Solvabilité II :

- **SCR (Solvency capital requirement)** : Il représente le capital de solvabilité requis nécessaire pour que l'assureur ou le réassureur puisse continuer ses activités. Il correspond au capital économique pour limiter la probabilité de ruine dans un an à 0,5%. Pour chaque risque, il faut établir sa propre loi de probabilité et chercher la **Valeur à Risque** de cette loi à 99,5% dans l'horizon d'un an.

#### Définition 1: VaR

Soit une V.A.  $Y$ . On appelle **Valeur à Risque** (*Value at risk*) de niveau  $\alpha$  de  $Y$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ , le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de  $Y$  :

$$P(Y \leq VaR_\alpha(Y)) = 1 - \alpha$$

De sorte que, si  $F$  est la fonction de répartition de  $Y$  :

$$VaR_\alpha(Y) = -F_Y^{-1}(1 - \alpha) = -\inf\{t \mid F_Y(t) \geq \alpha\}$$

avec  $F^{-1}$  la fonction quantile.

La **VaR** désigne la perte maximale possible du portefeuille sur une période donnée dans le futur à un niveau de confiance donné  $\alpha$ .

- **MCR (Minimum capital requirement)** : Il représente le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'assureur ou le réassureur court un risque important de

mettre en danger les assurés s'il poursuit ses activités.

La créance de réassurance s'inscrit à l'actif du bilan de l'assureur qui est évalué en valeur de marché par la méthode de la meilleure estimation en prenant compte la probabilité de défaut du réassureur. Elle est une portion des provisions techniques cédées aux réassureurs. L'augmentation du risque de contrepartie entraîne potentiellement une hausse des provisions et des créances demandées. Les provisions techniques dans les passifs font une distinction entre :

- **Risk Margin (Marge pour risque)** : Elle est consécutive des provisions techniques pour l'objectif de faire en sorte que la valeur de la réserve technique soit égale au montant nécessaire pour que l'entreprise puisse reprendre et respecter ses obligations, en tenant compte des coûts en capital.
- **Best Estimate (Meilleure estimation)** : Elle est la valeur actuelle attendue des flux futurs de trésorerie sortant diminués des futurs entrants en utilisant la courbe des taux sans risque à la date d'évaluation.

### 2.2.3 Risque de contrepartie en réassurance dans le cadre de Solvabilité II

Les régulateurs d'assurance européens développent une série de modules de risque couvrant la formule standard de Solvabilité II pour le calcul du **Capital de Solvabilité Requis (SCR)**. Cet ensemble de modules devrait couvrir tous les risques, y compris non seulement les catégories de risques traditionnelles telles que le risque de marché et le risque de souscription, mais aussi des catégories de risques plus spécialisées. L'un des modules cibles les plus ésotériques est le risque de défaut de la contrepartie, qui se concentre sur le risque de défaut des réassureurs et d'autres instruments d'atténuation des risques.

Afin de calculer le SCR après avoir pris en compte des facteurs de risque dans la modélisation des pertes en défaut, deux approches sont possibles.

La première approche dite « *modulaire* » consiste à agréger les capitaux calculés individuellement pour chaque risque en prenant compte la corrélation. L'*EIOPA* divise le SCR basique (*BSCR*) en plusieurs grands modules (*Marché, Santé, Défaut, Vie, Non-vie, etc.*), chaque module de risque est calibré pour que la probabilité de ruine à horizon 1 an soit égale à 0,5%. Le SCR final est obtenu en additionnant les BSCRs qui tient compte de la corrélation entre les modules de risque, de l'ajustement de la capacité d'absorption des pertes et de la charge en capital du risque opérationnel :

$$\text{SCR}_{\text{global}} = \text{BSCR} + \text{Ajustements} + \text{SCR}_{\text{opérationnel}}$$

Concernant la deuxième méthode qui est le *modèle interne* selon le profil de risque de chaque entreprise. L'idée est de calculer la distribution de pertes après une simulation d'un certain nombre de scénarios des facteurs de risques sur l'horizon d'un an en respectant la consistance du marché. Une projection du bilan économique dans un an avec une évaluation de *Best Estimate* est demandée. Le SCR à conserver par la compagnie est obtenue de sorte que le quantile 99,5% de la variation d'actif net entre  $t = 0$  et  $t = 1$ , qui est donc la **VaR à 99,5%** de la distribution de pertes projetée.

La méthodologie inhérente est **unique** selon les caractéristiques spécifiques de chaque assureur qui est autorisé à utiliser le modèle interne pour calculer le SCR.

Un des sous-modules est le « **Risque de défaut de contrepartie** »<sup>9</sup>. Le **CEIOPS** (*Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors*) a publié un document (conseil) en octobre 2009 pour détailler le calcul du SCR sur le risque de contrepartie en utilisant la formule standard. Le risque de contrepartie compose de deux types d'expositions :

- *Les expositions de type 1* : regroupent toutes les contreparties individuelles qui ne peuvent pas être diversifiées, et pour lesquelles une notation externe est susceptible d'être disponible. Il s'agit notamment des accords de réassurance, titrisations, des produits dérivés, des liquidités dans la banque, des dépôts, du capital appelé mais non payé, des lettres de crédit, des fonds initiaux, des autres engagements qui dépendent de la solvabilité de la contrepartie.
- *Les expositions de type 2* : comprennent des contreparties groupées et diversifiées qui ne sont généralement pas notées. Il s'agit notamment des créances sur les intermédiaires et débiteurs assurés.

La formule standard tente de calculer un SCR de contrepartie dans une approche différente pour les expositions de type 1 et de type 2 (*voir l'annexe A*). La formule pour l'agrégation des SCR de deux types d'expositions (avec la diversification) est :

$$\text{SCR}_{\text{def}} = \sqrt{\text{SCR}_{\text{def},1}^2 + 1,5 \times \text{SCR}_{\text{def},1} \times \text{SCR}_{\text{def},2} + \text{SCR}_{\text{def},2}^2}$$

Où :

---

9. Selon QIS5, le BSCR pour le risque de contrepartie représente 3,3% du BSCR total avant la diversification.

- $SCR_{def}$  : capital requis pour le risque de défaut de contrepartie
- $SCR_{def,1}$  : capital requis pour le risque de défaut de contrepartie des expositions de type 1
- $SCR_{def,2}$  : capital requis pour le risque de défaut de contrepartie des expositions de type 2

► **Calcul des pertes en cas de défaut - LGD (Loss Given Default)**

Le calcul du SCR de contrepartie demande un paramètre indispensable : **LGD** (*Loss Given Default*). Il représente la meilleure estimation des pertes des fonds propres que l'assureur subi quand sa contrepartie est tombée en défaut. Lorsqu'un assureur conclut un accord avec un réassureur, le réassureur sécurise une somme d'argent auprès d'un tiers de confiance, et cette garantie est appelée **collatéral**. Par conséquent, la perte en cas de défaut d'un contrat correspond à l'exposition associée à ce contrat, nette des collatéraux et du taux de recouvrement.

Pour un accord de réassurance  $i$  (ou un mécanisme de titrisation), ou les pertes en cas de défaut  $LGD_i$  est donnée par :

$$LGD_i^{FormuleStandard} = Max((1 - RR_{re}) \times (Créances_i + RM_{re,i} - Collatéral_i); 0) \quad (2.2.1)$$

Avec :

- $RR_{re}$  : le taux de recouvrement de la contrepartie pour les accords de réassurance, il y a une partie de recouvrables peut être collectée même si la contrepartie fait défaut, il est souvent égal à 50%, s'il y a des contrats collatéraux, ce taux peut être 10%.
- $Créances_i$  : la meilleure estimation des montants de créances provient des accords de réassurance.
- $RM_{re,i}$  : l'effet d'atténuation du risque qu'au contrat de réassurance (ou SPV) sur le risque de souscription.
- $Collatéral_i$  : la valeur du collatéral liée au contrat de réassurance considéré.

Pour les données des portefeuilles présentées et appliquées sous une approche de modèle interne dans les prochains chapitres, pour des raisons de simplicité de calcul, nous supposons que les créances de réassurance comprennent les collatéraux et l'effet d'atténuation du risque. Dans ce cas-là, le  $LGD$  signifie que :

$$LGD_i^{ModèleInterne} = \text{Max}((1 - RR_{re}) \times Créances\ de\ Réassurance_i; 0) \quad (2.2.2)$$

Ainsi, les résultats de la modélisation ont été générés à partir des **expositions de type 1**, car elles représentaient la grande majorité des expositions du portefeuille.

## CHAPITRE 3 Théories des copules multivariées

Les deux premiers chapitres du mémoire fournissent une vue d'ensemble du contexte théorique et réglementaire de la réassurance et du risque de contrepartie associé aux réassureurs. Les chapitres suivants se concentreront sur la modélisation du risque de contrepartie, en prenant en compte la corrélation entre les réassureurs. Nous utiliserons les théories des copules multivariées pour saisir ces corrélations. Ce chapitre sera dédié à l'application des copules multivariées pour modéliser la corrélation des réassureurs. De plus, nous présenterons les copules sélectionnées qui permettent de représenter efficacement la dépendance de queue sur les actifs de réassurance.

### 3.1 Définition des copules

L'étude de la copule a été lancée par *Sklar* en 1959. Lorsque les variables aléatoires dans une distribution conjointe ne sont pas indépendantes les unes des autres, la modélisation devient complexe. Dans de tels cas, la fonction de copule multivariée offre une solution efficace pour représenter la corrélation entre plusieurs variables aléatoires dont les distributions marginales sont connues.

#### **Théorème 1: Théorème de Sklar (1959)**

Soit une fonction de répartition  $\mathbf{F}$  de dimension  $d$ , les distributions marginales étant  $F_1, F_2, \dots, F_d$ . Il existe une copule  $C$  telle que :

$$\forall x_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, \dots, d, \quad \mathbf{F} = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

Si les  $F_i$  sont continues pour tout  $i$ , alors  $C$  est unique. Sinon,  $C$  n'est déterminée uniquement sur l'ensemble  $Ran(F_1) \times \dots \times Ran(F_d)$ , avec  $Ran(F_i)$  la plage de  $F_i$ .

$C$  est une copule,  $\mathbf{F}$  est une fonction de répartition **multivariée** définie dans le **théorème de Sklar** ayant des fonctions de répartition marginales uni-variées.

Par conséquent,

$$C(u) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)).$$

La densité de la copule existe lorsqu'elles sont suffisamment différentiables et la formule

est :

$$c(u) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d} = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)), \dots, f_d(F_d^{-1}(u_d))}$$

Elle s'exprime en fonction de la densité jointe  $f$ , les densités marginales  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ , les distributions cumulées marginales  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

Grâce à ce théorème, nous pouvons décomposer la distribution jointe des variables aléatoires multivariées en distributions marginales. La fonction de copule décrit la structure de dépendances entre elles. Cette décomposition simplifie grandement notre analyse des problèmes liés à la corrélation, ainsi que la caractérisation des variables aléatoires financières et la construction de modèles.

**Propriétés** : une copule de dimension  $d$  est une fonction  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  qui est une fonction de répartition avec marginales **uniformes**. On note  $C(u) = C(u_1, \dots, u_d)$ , fonction de répartition qui découlent les propriétés suivantes :

1.  $C(u_1, \dots, u_d)$  est toujours non-décroissant en chaque élément  $u_i$ .
2. En dimension  $d$ , pour  $0 \leq a_i \leq b_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, d$ , la probabilité  $P(U_1 \in [a_1, b_1], \dots, U_d \in [a_d, b_d])$  doit être non-négative, ce qui conduit à l'inégalité rectangulaire (généralisée) :

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{d,i_d}) \geq 0$$

avec  $u_{j,1} = a_j$  et  $u_{j,2} = b_j$ .

3. La marginale en composante  $i$  est obtenue en posant  $u_j = 1$ , pour tout  $j \neq i$ ,  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  et elle doit être uniforme.
4. Il existe  $\exists i \in \{1, \dots, d\}$  tel que  $u_i = 0$ , alors  $C(u_1, \dots, u_d) = 0$ . La copule est nulle si l'une des composantes  $u_i$  est nulle.

Toute fonction qui vérifie ces propriétés est une **copule**.

### 3.2 Copules elliptiques

Les **Copules Elliptiques** sont dérivées de distributions elliptiques multivariées, telles que les distributions normales multivariées et  $t$  multivariées. Comme la fonction d'une copule elliptique est moins exigeante en termes de calcul, elle est couramment utilisée dans la modélisation pratique.

### 3.2.1 Copule Gaussienne multivariée

La copule Gaussienne est l'une des fonctions de copule la plus utilisée dans le monde financier. Si la distribution marginale d'une variable multivariée est normale univariée et que sa structure de corrélation est caractérisée par une copule Gaussienne, la distribution normale multivariée est à ce stade une fonction de copule Gaussienne.

#### Définition 2

Soient  $\mathbf{X} \sim MN_d(\mathbf{0}, \Sigma)$ ,  $\Sigma$  une matrice symétrique et définie positive avec  $diag(\Sigma) = 1$ ,  $\rho_{i,j}$  le coefficient de corrélation linéaire, et  $\Phi_{\Sigma}(\cdot)$  la distribution jointe normale multivariée centrée de  $\mathbf{X}$  avec la matrice de corrélation  $\Sigma$ ,  $\Phi(\cdot)$  la distribution normale univariée centrée et réduite.

La copule gaussienne multivariée est définie comme :

$$C_{\Sigma}(u_1, \dots, u_d; \Sigma) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$$

$$C_{\Sigma}(u_1, \dots, u_d; \Sigma) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}X^T \Sigma^{-1} X\right)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \sqrt{\det(\Sigma)}} dx_1 \dots dx_d$$

avec  $X_i = \Phi^{-1}(u_i)$ ,  $u_i \in [0, 1]$ .

La **densité** de cette copule est :

$$c_{\Sigma}(u_1, \dots, u_d; \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}X^T(\Sigma^{-1} - I_d)X\right\}$$

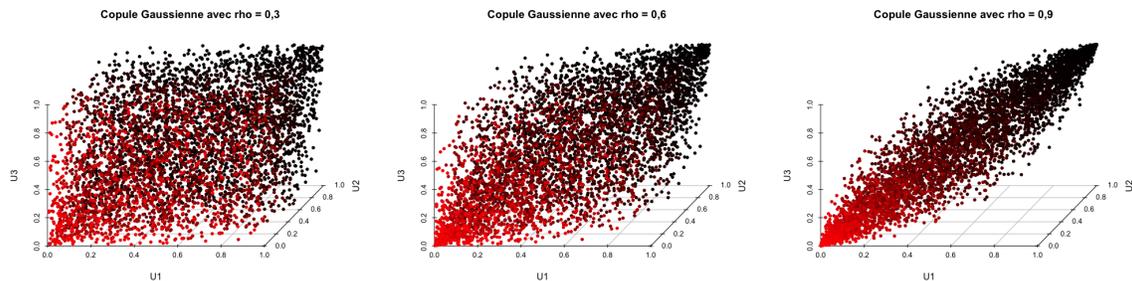


FIGURE 3.1 Nuage de points d'une copule Gaussienne en dimension 3

La matrice de corrélation linéaire détermine les caractéristiques statistiques de cette copule. Les nuages de points présentent une symétrie. Les tracés de copules Gaussiennes pour  $\rho = 0, 3$

montre la dispersion des points, suggérant une indépendance entre les valeurs aléatoires de la copule. Cependant, à mesure que  $\rho$  augmente, les points sont moins dispersés. Il est intéressant de noter que les copules n'ont pas de dépendance de queue à gauche ou à droite. Donc leurs coefficients de dépendance à gauche et à droite sont tous les deux égaux à 0 ( $\lambda_L = \lambda_U = 0$ ).

### 3.2.2 Copule de Student multivariée à $v$

Une variable aléatoire  $\eta_i$  qui suit une loi de student à  $v$  degré de liberté peut toujours s'écrire comme :

$$\eta_i = \frac{X_i}{\sqrt{\frac{\xi}{v}}} = \frac{\sqrt{v}X_i}{\sqrt{(Y_1)^2 + \dots + (Y_v)^2}}$$

Où  $X_i$  et  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_v)$  sont normalement distribuées et indépendantes entre elles, tandis que  $\xi$  une variable mélangeante qui suit une loi du khi-deux ( $\chi^2$ ) à  $v$  degrés de liberté.

#### Définition 3

Soient  $\mathbf{X} \sim MN_d(\mathbf{0}, \Sigma)$ , avec  $\Sigma$  une matrice de corrélation, donc la distribution de Student multivariée à  $v$  degrés de liberté, de dimension  $d$  est obtenue via :  $(\eta_1, \dots, \eta_d) = (\frac{X_1}{\sqrt{\frac{\xi}{v}}}, \dots, \frac{X_d}{\sqrt{\frac{\xi}{v}}})$ , avec  $\mathbf{X}$  est indépendant de  $\xi$ .

Selon le **théorème de Sklar**, la couple de Student multivariée est définie comme :

$$C_{v,\Sigma}^t(u_1, \dots, u_d; v, \Sigma) = \mathbf{t}_{v,\Sigma}(t_{v,\Sigma}^{-1}(u_1), \dots, t_{v,\Sigma}^{-1}(u_d))$$

$$C_{v,\Sigma}^t(u_1, \dots, u_d; v, \Sigma) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} \frac{\Gamma(\frac{v+d}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})(v\pi)^{\frac{d}{2}}\sqrt{\det(\Sigma)}} \left(1 + \frac{X^T \Sigma^{-1} X}{v}\right)^{-\frac{v+d}{2}} dx_1 \dots dx_d$$

avec  $X_i = t_{v,\Sigma}^{-1}(u_i)$ ,  $u_i \in [0, 1]$ .

Où  $\mathbf{t}_{v,\Sigma}(\cdot)$  la fonction de répartition de la distribution de Student de dimension  $d$  et à  $v$  degrés de liberté, et  $t_{v,\Sigma}(\cdot)$  la fonction de répartition de la distribution de Student univariée à  $v$  degrés de liberté.  $\Gamma$  la fonction de répartition d'une loi Gamma.

La **densité** est donnée par :

$$c_{v,\Sigma}(u_1, \dots, u_d; v, \Sigma) = \frac{\Gamma(\frac{v+d}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})\sqrt{\det(\Sigma)}} \left(\frac{\Gamma(\frac{v}{2})}{\Gamma(\frac{v+1}{2})}\right)^d \frac{\left(1 + \frac{X^T \Sigma^{-1} X}{v}\right)^{-\frac{v+d}{2}}}{\prod_j^d \left(1 + \frac{x_j^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}}$$

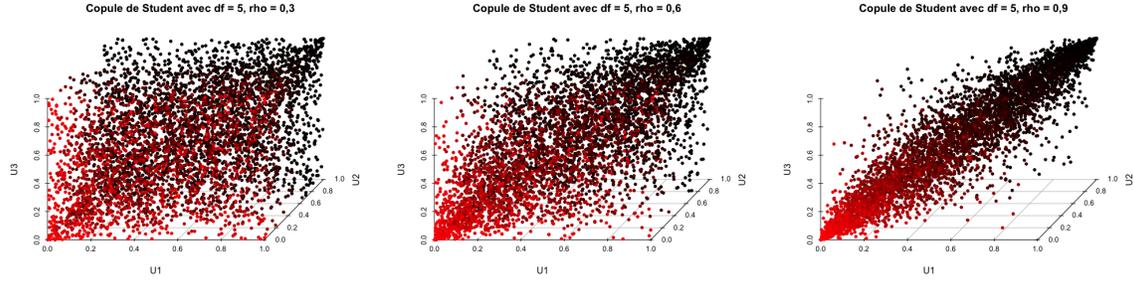


FIGURE 3.2 Nuage de points de copule de Student ( $\nu = 5$ ) en dimension 3

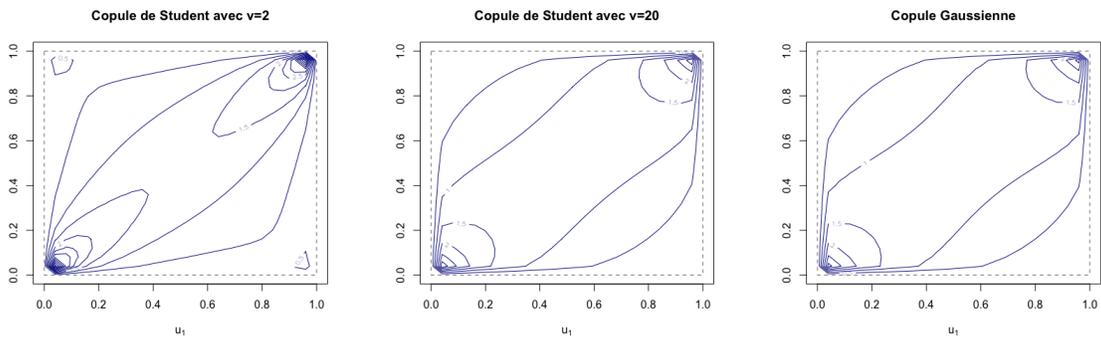


FIGURE 3.3 Comparaison des copules elliptiques avec  $\rho = 0, 5$

La copule de Student est similaire à la copule Gaussienne, la différence étant l'épaisseur des queues pour les deux. Pour la copule de Student, le degré de liberté  $\nu$  affecte l'épaisseur de la queue de la fonction, plus  $\nu$  est petit, plus la queue est épaisse. Inversement, lorsque  $\nu$  tend vers l'infini, les états de dépendance de queue des deux sont très proches. La corrélation de queue de la copule de Student n'est pas égal à 0 ( $\lambda_L = \lambda_U \neq 0$ ).

### 3.3 Copules archimédiennes

La **Copule Archimédienne** peut représenter la structure de dépendance plus complexe entre les variables aléatoires multivariées par un générateur  $\varphi(\cdot)$ . Elle peut simplifier certains problèmes et l'estimation des paramètres dans la modélisation pratique.

**Théorème 2**

Soit une fonction  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ , continue et strictement décroissante sur  $[0, 1]$  telle

que  $\varphi(1) = 0$ . La fonction :

$$\varphi^{-1}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \text{si } \varphi(0) < t < \infty \end{cases}$$

est une copule si et seulement si  $\varphi^{-1}(t)$  est convexe.

Si  $d > 2$ , supposons que  $\varphi^{-1}$  est  $d$ -complètement monotone<sup>a</sup>, une copule Archimédienne est alors définie par

$$C(u_1, \dots, u_d) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d))$$

pour tout  $u_1, \dots, u_d \in [0, 1]$ .

a.  $\varphi$  est  $d$ -complètement monotone si elle est continue, et que ses dérivées sont monotones, de signe alterné (Charpentier, 2010) [29].

### 3.3.1 Copule de Clayton multivariée de paramètre $\theta$

#### Définition 4

Pour tout  $\theta \geq 0$ , la copule de Clayton multivariée de paramètre  $\theta$  est définie sur  $[0, 1] \times \dots \times [0, 1]$  par :

$$C_\theta^C(u_1, \dots, u_d) = \left( \sum_{i=1}^d u_i^{-\theta} - (d-1) \right)^{-\frac{1}{\theta}}$$

La fonction génératrice d'une copule de Clayton avec paramètre  $\theta$  est<sup>1</sup> :

$$\varphi_\theta^C(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1), \quad \theta > 0$$

Par conséquent, cette copule est générée par la formule suivante :

$$U^C = \varphi_\theta^{C^{-1}}(t) = (1 + \theta y)^{-\frac{1}{\theta}} \quad (3.3.1)$$

La copule de Clayton capture plus la corrélation de queue à gauche, qui est plus épaisse par rapport à celle de la copule Gaussienne, alors que la corrélation de queue à droite est similaire pour toutes les deux.

1. Cette fonction de générateur n'est pas unique, il suffit d'avoir un générateur qui satisfait le **Théorème 2**.

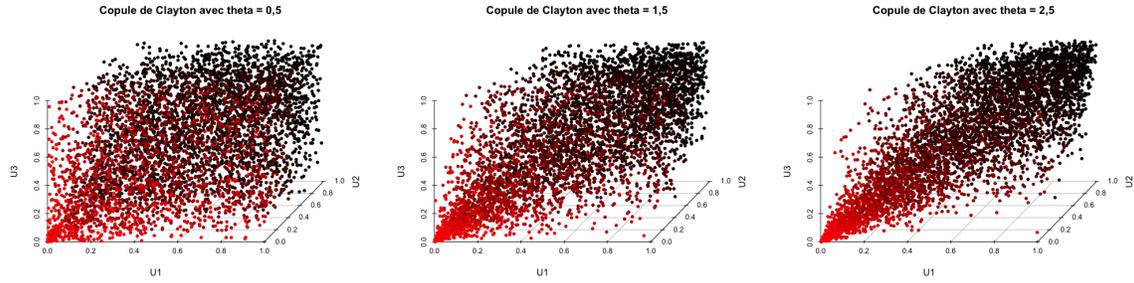


FIGURE 3.4 Nuage de points de copule de Clayton en dimension 3

### 3.3.2 Copule Gumbel-Hougaard multivariée de paramètre $\theta$

**Définition 5**

Pour tout  $\theta \geq 1$ , la copule Gumbel-Hougaard multivariée de paramètre  $\theta$  est définie sur  $[0, 1] \times \dots \times [0, 1]$  par :

$$C_{\theta}^G(u_1, \dots, u_d) = \exp \left\{ - \left[ \sum_{i=1}^d (-\ln u_i)^{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}$$

Le générateur pour la copule de Gumbel-Hougaard est :

$$\varphi_{\theta}^G(t) = (-\log t)^{\theta}, \quad 1 \leq \theta < +\infty \tag{3.3.2}$$

Alors la copule générée s'écrit de la manière suivante :

$$U^G = \varphi_{\theta}^{G^{-1}}(t) = \exp \left( -y^{\theta-1} \right) \tag{3.3.3}$$

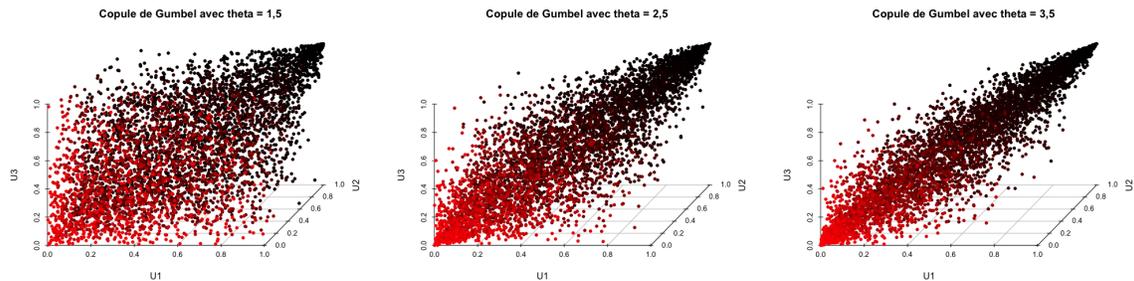


FIGURE 3.5 Nuage de points de copule de Gumbel en dimension 3

Contrairement à la copule de Clayton, la copule de Gumbel présente une caractéristique de corrélation de la queue supérieure plus prononcée.

### 3.4 Mesures de dépendance

#### 3.4.1 Coefficients de corrélation

La dépendance entre deux (*ou plusieurs*) variables aléatoires a suscité beaucoup d'intérêt. La dépendance est un concept qui exprime le degré de corrélation entre ces variables. Cependant, il diffère de la corrélation souvent mentionnée, qui est utilisée dans la plupart des modèles basés sur l'hypothèse de la normalité multivariée. Le coefficient de corrélation de **Pearson** ( $\rho$ ) est couramment utilisé pour mesurer la corrélation, mais il ne capture que la relation **linéaire** entre les variables aléatoires et ne fournit pas une indication complète de la structure de la dépendance lorsque la distribution n'est pas gaussienne.

- Coefficient de corrélation linéaire de Pearson ( $\rho$ ) :

$$\rho = \frac{\text{Cov}(A_1, A_2)}{\sigma_{A_1} \sigma_{A_2}} \quad (3.4.1)$$

Où la fonction de copule qui caractérise  $(A_1, A_2)$  est  $C(u_1, u_2)$ .

Afin de mesurer la dépendance non linéaire, les autres coefficients de corrélation comme celui de **Spearman** ( $\rho_s$ ) ou de **Kendall** ( $\tau$ ) sont plus adaptés pour mesurer la relation d'ordre sur les paires de variables. En outre,  $\rho_s$  et  $\tau$  sont invariants par transformation strictement croissante des variables aléatoires.

La dépendance entre les variables aléatoires peut être modélisée par des copules. Une copule renvoie la distribution conjointe en fonction des distributions marginales.

Selon *Schwettzer et Wolff (1981)* [30], la relation entre le coefficient des rangs et la copule bivariée peut présenter comme :

- Coefficient de Spearman ( $\rho_s$ ) :

$$\rho_s = 12 \int_0^1 \int_0^1 u_1 u_2 dC(u_1, u_2) - 3$$

- Coefficient de Kendall ( $\tau$ ) :

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1$$

Ci-dessous un tableau décrit les relations entre les coefficients de corrélation :

<b>La relation entre les coefficients de corrélation des copules</b>			
<b>Type de Copule multivariée</b>	<b>Pearson (<math>\rho</math>)</b>	<b>Kendall's (<math>\tau</math>)</b>	<b>Spearman (<math>\rho_s</math>)</b>
Copule Gaussienne	$\rho$	$\frac{2}{\pi} \arcsin \rho$	$\frac{6}{\pi} \arcsin \left( \frac{\rho}{2} \right)$
Copule de Student	$\rho$	$\frac{2}{\pi} \arcsin \rho$	$\frac{6}{\pi} \arcsin \left( \frac{\rho}{2} \right)$
Copule de Clayton	—	$\frac{\theta}{\theta+2}$	Formes complexes
Copule Gumbel-Hougaard	—	$1 - \frac{1}{\theta}$	—

TABLEAU 3.1 La relation entre les mesures de dépendance selon type de copule

### 3.4.2 Dépendance dans les queues de distribution

La corrélation de queue des variables jouant un rôle très important dans le domaine de la gestion des risques, la copule peut être employée pour caractériser le risque dans des cas extrêmes, offrant ainsi un moyen très pratique de traiter ces caractéristiques de dépendance dans les queues de distribution.

En supposant que le portefeuille ne contienne que deux réassureurs,  $A_i$  décrit la valeur de l'actif pour le réassureur  $i$ . Le réassureur fait défaut lorsque la valeur  $A_i$  est inférieure au seuil  $c_i$ . La probabilité conditionnelle  $P(A_1 > c_1 | A_2 > c_2)$  indique que la probabilité que la valeur des actifs d'un réassureur augmente après que celle d'un autre réassureur du même portefeuille augmente.

Si la relation entre  $A_1$  et  $A_2$  est déterminée par une fonction de copule, alors,

$$\bar{C}(u_1, u_2) = P\{A_1 > c_1 | A_2 > c_2\} = P\{U_1 > u_1 | U_2 > u_2\} \quad (3.4.2)$$

Quand  $c_1, c_2 \rightarrow \infty$ ,  $u_1, u_2 \rightarrow 1$ .

Selon l'équation (3.4.2),  $A_1$  et  $A_2$  sont deux variables aléatoires continues avec des distributions marginales de  $F_1(\cdot)$  et  $F_2(\cdot)$ , les coefficients de dépendance de queue sont définis comme suit :

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} P(A_1 \leq F_1^{-1}(u) | A_2 \leq F_2^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u} \quad (3.4.3)$$

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} P(A_1 \geq F_1^{-1}(u) | A_2 \geq F_2^{-1}(u)) = 2 - \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - C(u, u)}{1 - u} \quad (3.4.4)$$

Si  $\lambda_L$  ( $\lambda_U$ ) existe et se trouve dans  $]0; 1]$ ,  $A_1, A_2$  sont liées dans la queue *inférieure* (*supérieure*), la copule  $C$  a une dépendance de queue à *gauche* (*droite*). Si  $\lambda_L$  ( $\lambda_U$ ) est égal à 0,

alors  $A_1, A_2$  sont indépendantes.

La mesure de dépendance de queue indique la dépendance des valeurs extrêmes, ce qui, par extension, peut être interprétée comme la probabilité qu'un réassureur fasse défaut et qu'un autre réassureur du même portefeuille soit en défaut.

Pour une distribution elliptique, la corrélation est une mesure exhaustive de la structure de dépendance. Pour  $d = 2$ , le coefficient est  $\rho$ . Quand  $d > 2$ , la description de la structure de dépendance nécessite la connaissance des corrélations entre les paires de variables.

Dépendance de queue des copules			
Type de copule multivariée	Paramètres	Dépendance de queue supérieure $\lambda^U$	Dépendance de queue inférieure $\lambda^L$
Copule Gaussienne	$ \rho  < 1$	0	0
Copule de Student	$ \rho  < 1$	$2t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho}/\sqrt{1+\rho})$	$2t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho}/\sqrt{1+\rho})$
Copule Gumbel Hougaard	$\theta \in [1; +\infty)$	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	0
Copule de Clayton	$\theta \in (0; +\infty)$	0	$2^{-\frac{1}{\theta}}$

TABLEAU 3.2 Dépendance de queue selon le type de copule

La copule de Student offre une corrélation symétrique de la queue par rapport à la copule Gaussienne. La copule de Clayton est adaptée pour modéliser des valeurs avec une queue épaisse dans la partie inférieure, tandis que la copule de Gumbel est utile pour modéliser des valeurs avec une queue épaisse à droite.

## CHAPITRE 4 Risque de contrepartie en réassurance par une approche modèle interne

Dans ce chapitre, nous présentons au lecteur l'approche modèle interne pour le calcul du capital économique, également connu chez AXA sous le nom de **capital économique à court terme** (*STEC*)<sup>1</sup>. Nous décrirons la structure et le fonctionnement du modèle interne.

Les sections précédentes nous ont appris que le besoin en capital d'un assureur dépendent dans une large mesure des notations des réassureurs concernés. Le sujet de la généralisation des nouveaux événements de notation sur une période de projection est crucial pour déterminer le montant du STEC. Nous examinerons deux modèles suivants : *le modèle de Ter Berg* et *le modèle de Merton*, qui sont au cœur pour la simulation des nouveaux événements de défauts à horizon un an.

### 4.1 Présentation générale du modèle interne

Depuis l'adoption des accords de Bâle II et des normes prudentielles de Solvabilité II, il est possible pour les institutions bancaires et compagnies d'assurance d'estimer leurs risques et de calculer un capital de solvabilité requis en utilisant leurs modèles internes. L'objectif de ce STEC détenu est de couvrir les événements futurs inattendus. La définition du STEC pour le risque de contrepartie est donnée par :

$$STEC_{RCR} = VaR_{99,5\%}(Y) - E(Y) \quad (4.1.1)$$

Où :

- $Y$  : un processus stochastique qui décrit la meilleure estimation des pertes des réassureurs en cas de défaut dans l'horizon d'un an.
- $E(Y)$  : l'espérance des pertes estimées qui est simplement la moyenne des pertes.
- $VaR_{99,5\%}(Y)$  : le quantile à 99,5% de la distribution des pertes. Si le nombre de simulations est 1000, alors, il décrit la 5<sup>ème</sup> plus grande perte du réassureur.

La *figure 4.1* ci-dessous illustre cette méthode de calcul. Étant donné la distribution de pertes des réassureurs, le STEC est obtenu par une méthode **VaR-Moyenne**, il s'agit d'une estimation de la déviation autour de l'espérance des pertes.

---

1. correspondant au SCR dans Solvabilité II

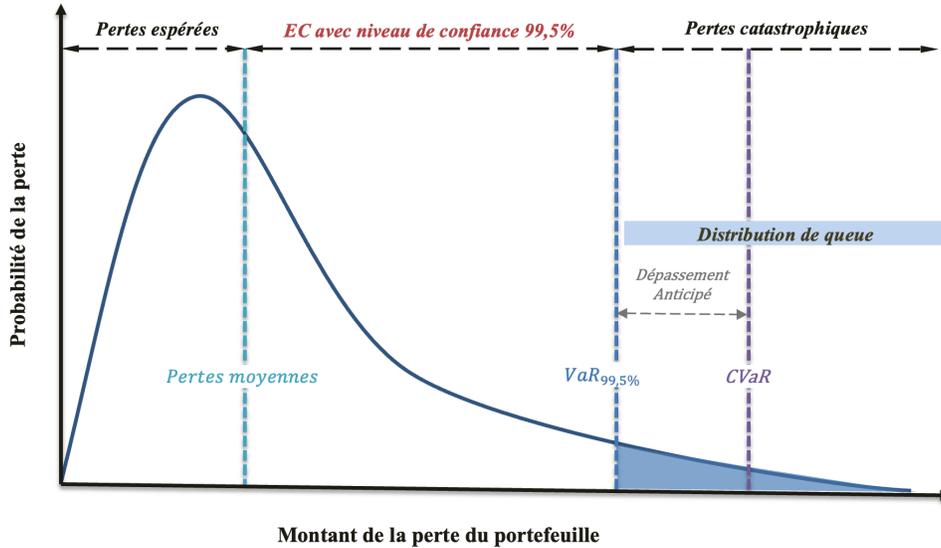


FIGURE 4.1 Présentation du capital économique

Pour mieux saisir l'occurrence des pertes extrêmes, nous nous concentrerons sur la partie située au-delà du quantile à 99,5%, que nous appelons la **queue** de la distribution des pertes. Nous pouvons utiliser *CVaR* pour évaluer la taille de la perte, ce qu'on l'appelle également *Expected Shortfall* (*en anglais*) qui est donc la perte moyenne dans les pires 0,5% des cas.

#### Définition 6: CVaR

Soit une V.A.  $Y$ , on l'appelle **Valeur à Risque conditionnelle** (*CVaR*) de niveau  $\alpha$  de  $Y$ , avec  $\alpha \in ]0, 1[$ , on note également  $ES_\alpha(Y)$ , la perte attendue lorsque la  $VaR_\alpha(Y)$  est dépassée :

$$ES_\alpha(Y) = E(Y \mid Y \geq VaR_\alpha(Y))$$

Le calcul du STEC a besoin de distinguer deux types de risques selon leur nature. Le risque de **réserve** et le risque de **souscription** sont les deux principales formes de risque qui sont rendues visibles dans le modèle pour le risque de contrepartie en réassurance. Les expositions des réassureurs sont distinguées donc :

- **Exposition pour le risque de réserves** (*Run-Off*) : l'exposition actuelle au risque de défaut des contreparties sur les sinistres passés. Elle est déterministe basée sur les données bilancielle des entités.
- **Exposition pour le risque de souscription** (*Underwriting*) : l'exposition potentielle des contrats de réassurance de l'année en cours, dont les sinistres futurs. Elle est estimée par une méthode stochastique.

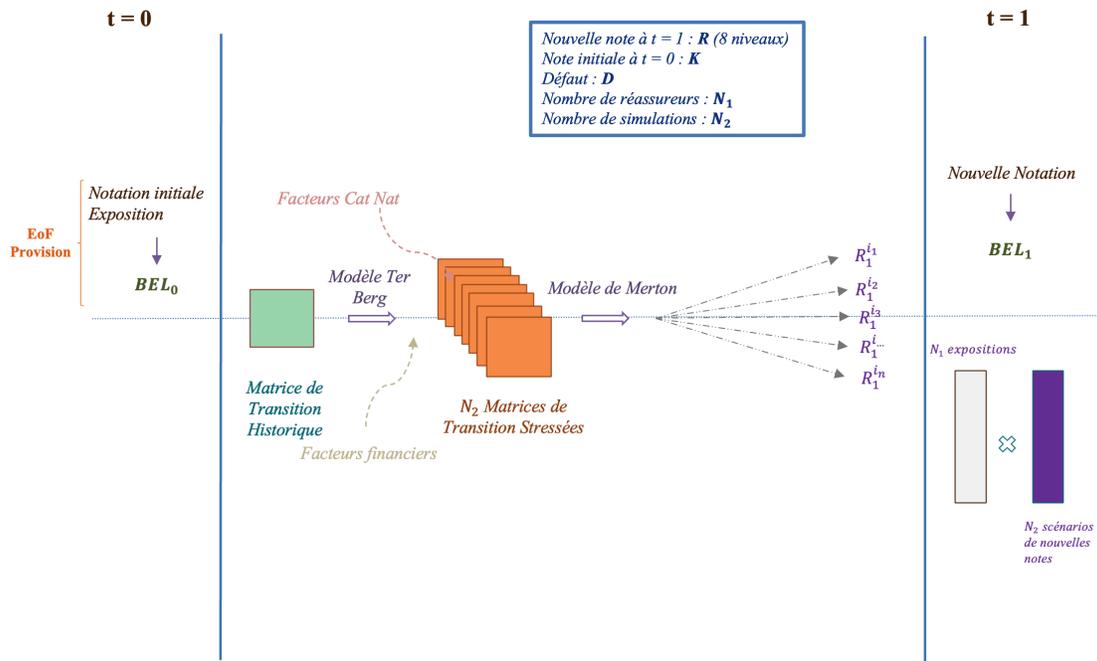


FIGURE 4.2 Explication du modèle RCR interne

Les notations des réassureurs en  $t = 0$  sont essentielles à la modélisation du risque de contrepartie. Elles sont données par des agences de notation externes ou par des méthodologies internes développées par AXA selon les différents types de réassureurs.

L'estimation des pertes est déduite des notations de réassureurs à  $t = 1$  qui sont modélisées stochastiquement par le modèle de Ter Berg (2008) et le modèle de Merton (1974).

Étant donné une matrice de transition historique d'après l'étude des agences de notation, une approche de « **Choc Commun** » est appliquée afin d'obtenir les probabilités de transitions de notations stressées. Celle-ci est définie par le modèle de Ter Berg, qui tient compte de facteurs de risque tels que les pertes liées aux catastrophes naturelles et les scénarios de rendements des actifs du portefeuille des réassureurs. Ensuite, par le biais d'une application du modèle de Merton, chaque réassureur se voit alors attribué un vecteur de nouvelles notes estimées ( $R$ ) qui sont les scénarios projetés dans 1 an.

Le **STEC RCR** est déduit de l'écart de la meilleure estimation des pertes ( $\Delta BEL$ ) entre  $t = 0$  et  $t = 1$ , en fonction de la notation initiale à  $t = 0$  et la nouvelle notation générée à  $t = 1$  :

$$\Delta BEL = Y_{t=1} - Y_{t=0} \quad (4.1.2)$$

Selon Solvabilité II, le calcul de la meilleure estimation doit être conforme au marché, ce qui signifie qu'il s'agit de la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs au taux sans risque.

Pour les réserves cédées dans le bilan économique, le réassureur peut faire défaut pendant la durée du contrat. La défaillance potentielle dans l'année en cours génère des pertes pour l'exposition au défaut du réassureur. La somme des pertes possibles des années avec l'effet d'actualisation est donc la meilleure estimation des pertes de RCR.

Le calcul de  $Y_{(t=0)}$  est fondé sur : **(1)** les « payment patterns » représentant le rythme espéré pour le paiement des créances en réassurance auprès de l'assureur, les réassureurs règlent chaque année une partie (*en pourcentage*) des expositions de l'assureur. **(2)** les probabilités de défaut cumulées historiques. **(3)** la notation initiale du réassureur. **(4)** le taux de recouvrement.

$$Y_{t=0} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\text{années}} (1 - RR) \times I \times PP_i \times PD_i(K) \times DF_i, & \text{si } K \neq D \\ I \times (1 - RR) \times DF_1, & \text{si } K = D \end{cases} \quad (4.1.3)$$

- $K$  : la notation initiale de la contrepartie.
- $RR$  : le taux de recouvrement.
- $PP_i$  : le taux de règlement à  $t_i$ .
- $I$  : les expositions de l'assureur à la réassurance.
- $DF$  : l'effet de l'actualisation dans l'année  $i$  qui est calculée à partir de la courbe des taux sans risque.

Le  $Y_{(t=1)}$  évolue selon les nouvelles notations simulées, on peut distinguer trois cas différents :

$$Y_{t=1} = \begin{cases} \sum_{i=2}^{\text{années}} (1 - RR) \times I \times PP_i \times PD_i(R) \times DF_i, & \text{si } R = K \\ I \times PP_i \times (1 - RR) \times DF_1, & \text{si } R = D \\ \sum_{i=2}^{\text{années}} I \times PP_i \times (1 - RR) \times PD_{i-1}(R) \times DF_i, & \text{si } R \notin \{K, D\} \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Lorsque la notation initiale est  $D$ , c'est-à-dire que le réassureur est en cas de défaut, la notation de ce réassureur ne peut évoluer vers une notation différente de  $D$  dans 1 an. On retrouve alors le cas où  $\Delta BEL = 0$ .

La formule finale pour calculer le STEC pour le risque de défaut de contrepartie est :

$$STEC_{RCR} = \text{VaR}_{99,5\%}(\Delta BEL) - E(\Delta BEL) \quad (4.1.5)$$

## 4.2 Modèle de Ter Berg

Le modèle de Ter Berg permet d'écrire la probabilité de défaut comme la fonction d'un choc stochastique ( $S$ ). Par définition, les réassureurs dans le marché peuvent être simultanément exposés aux mêmes risques comme les événements financiers et catastrophiques. Étant donné une variable  $s$  qui représente l'intensité du choc commun, plus  $s$  tend vers 1, plus les réassureurs sont affectés par le choc. La fonction de densité d'un choc est donnée par une *loi Beta*, dont le paramètre  $\alpha$ .

$$f(s) = \alpha s^{\alpha-1}, \quad \text{avec } s \in (0, 1), \alpha \in (0, 1) \quad (4.2.1)$$

La probabilité de défaut est calculée en fonction de la taille de ce choc commun particulier. À cette fin, la fonction pour la probabilité de défaut modifiée par  $s$  est donnée par :

$$p(s) = b + (1 - b)s^{\frac{\tau}{b}}, \quad \text{avec } 0 < b < 1 \text{ et } \tau > 0 \quad (4.2.2)$$

Où :

- $b$  : la probabilité de défaut de base qui est spécifique et historique donnée par les agences de notations.
- $s$  : le choc commun.
- $\delta = \frac{\tau}{b}$  : l'exposant qui décrit la sensibilité de réassureur à propos du choc commun, une relation négative est observée entre  $b$  et  $\delta$ , une valeur plus élevée de  $b$  devrait entraîner une augmentation plus forte de la probabilité d'un défaut choquée.

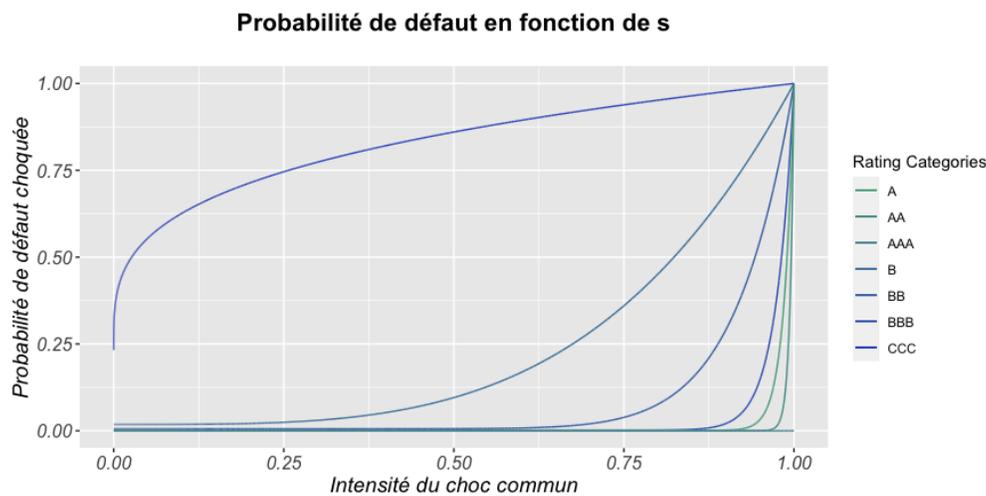


FIGURE 4.3 Probabilité de défaut en fonction du choc commun

Les courbes représentent la probabilité de défaut (*voir figure 2.1*) pour chaque catégorie de notation en fonction du choc commun  $s$ , qui est déterminé par une distribution Bêta avec des paramètres  $\alpha$  et  $\beta = 1$ . Plus la notation du réassureur est faible, plus il est sensible et vulnérable aux chocs. La probabilité de défaut augmente en fonction de la taille du choc commun.

En utilisant les formules (4.2.1) et (4.2.2), on déduit la valeur espérée observée de cette probabilité de défaut  $p$  comme suit :

$$p = E(p(s)) = \int_0^1 p(s)f(s)ds = b + (1 - b)E\left(s^{\frac{\tau}{b}}\right) = b + (1 - b)\frac{\alpha}{\frac{\tau}{b} + \alpha} = \frac{(\tau + \alpha)b}{\tau + \alpha b}$$

Avec

$$b = \frac{p\tau}{\alpha(1 - p) + \tau}$$

, qui dépend de  $\alpha$  et  $\tau$  ainsi que de la probabilité de défaut observée  $p$ .

Le paramètre  $\tau$  qui n'a pas encore été paramétré, dans l'approche de modèle interne, il pourra être choisi par l'entreprise selon son propre profil de risque.

La production des facteurs de risque doit être cohérente et logique, un exemple est donné ci-dessus présentant les facteurs de risques générés par le modèle Ter Berg. La majorité de l'intensité du choc étant regroupée au voisinage de 0 en raison de la rareté des événements catastrophiques.

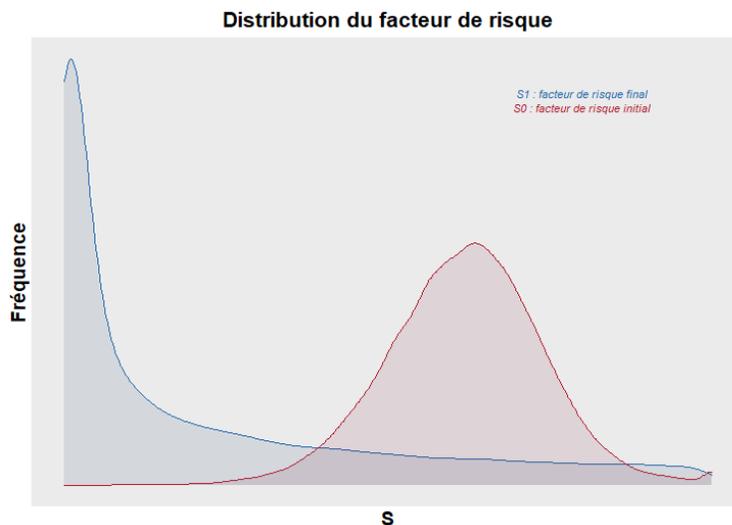


FIGURE 4.4 Distribution du facteur de risque

Une fois que nous disposons des facteurs de risque, nous pouvons appliquer l'équation (4.2.2) pour obtenir les nouvelles matrices de transition stressées, ou plus précisément, les scénarios de probabilité de défaut choqués. À partir de cela, nous pouvons utiliser le modèle de Merton ensuite pour définir les conditions de passage au défaut du réassureur.

### 4.3 Modèle de Merton

L'objectif du modèle de Merton (1974) est d'évaluer la probabilité de défaut de toute firme jusqu'à un certain horizon. L'idée de base du modèle répond aux critères sur le calcul du capital économique de Solvabilité II puisqu'il suppose que le bilan de toutes les firmes peuvent être représenté simplement à l'exercice  $t$  par trois grandeurs :

- $A_t$  : la valeur des actifs de la firme
- $L_t$  : la dette
- $E_t$  : la valeur des fonds propres

**Bilan en vision économique en t**

$A_t$	$E_t$
	$L_t$

FIGURE 4.5 Bilan économique dans le modèle de Merton

L'identité actif-passif caractérise ce bilan économique comme suit :

$$A_t = L_t + E_t$$

L'assureur cède une partie du risque au réassureur. Si la valeur de l'actif du réassureur est supérieure à la dette détenue, la créance de réassurance est remboursée et le gain de l'assureur est de  $L_t$  à la date  $t$ . Inversement, si la valeur de l'actif du réassureur est inférieure à la valeur de sa dette, le réassureur est exposé au risque de défaut, l'assureur n'est pas capable de récupérer une partie ou la totalité des créances, il doit faire face à une perte de  $L_t - A_t$ . Les défaillances d'entreprises sont étroitement liées aux leurs actifs, les fonds propres de la firme peuvent être considérés comme une option *CALL* sur  $A_t$ , avec la maturité  $t$  et le strike  $L_t$ .

Le modèle de Merton reprend les hypothèses du modèle de Black-Scholes (1973), la valeur des actifs de la compagnie suit un mouvement brownien géométrique. La variation du prix

de son actif est :

$$dA_t = \mu A_t dt + \sigma A_t dW_t$$

$$\Leftrightarrow \frac{dA_t}{A_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (4.3.1)$$

$$\Leftrightarrow A_T = A_t \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma (W_T - W_t) \right]$$

Avec :

- $W_t$  : un mouvement brownien standard dépendant du temps  $t$  sous  $\mathbb{Q}$ .
- $\mu$  : le taux d'intérêt sans risque.
- $\sigma$  : la volatilité de la valeur des actifs.

Dans le modèle interne, on s'intéresse l'évolution à partir de  $t = 0$ . Donc, l'équation (4.3.1) peut s'écrire de manière suivante :

$$A_T = A_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T \right]$$

$L_T$  est équivalent à une valeur seuil, l'évènement de défaut ( $D$ ) ne peut intervenir qu'en date  $T$  si  $A_T < L_T$ , la probabilité de défaut  $p$  d'une firme est :

$$\begin{aligned} P(D = 1) &\Leftrightarrow P(A_T < L_T) \\ &= P\left(A_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T \right] < L_T\right) \\ &= P\left(W_T < \frac{1}{\sigma} \left( \ln \left( \frac{L}{A_0} \right) - \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right)\right) \\ &= P\left(\frac{1}{\sqrt{T}} W_T < \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left( \ln \left( \frac{A_0}{L} \right) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right)\right) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

D'après les propriétés de  $W_T$ , on sait que :  $W_T \sim N(0, T)$ , et  $A' = W_T T^{-\frac{1}{2}} \sim N(0, 1)$ . On pose également  $d_2 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left( \ln \left( \frac{L}{A_0} \right) - \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right)$ , l'équation (4.3.2) devient :

$$P(A_T < L_T) = P(A' < -d_2) = p \quad (4.3.3)$$

Le modèle nous dit qu'en supposant la valeur des actifs de la firme suit une loi normale centrée réduite dans le temps, alors il existe un **seuil** ( $-d_2$ ) qui fait que la probabilité de défaut sera supérieure à 0 si la firme dispose moins d'actifs que ce seuil.

## 4.4 Généralisation de nouveaux évènements de notations

### 4.4.1 Définition des seuils de la valuation des actifs

Afin d'évaluer la nouvelle notation de chaque contrepartie à horizon un an, une matrice de seuils<sup>2</sup> à grande dimension est nécessaire pour définir les changements de notation auxquels le réassureur sera confronté.

Selon le modèle de Merton, la probabilité qu'un réassureur fasse défaut est celle où la valeur de son actif est inférieure à la dette de son bilan, ce qui peut être décrit par une distribution normale centrée réduite. L'équation (4.3.3) nous donne :

$$P(A' < -d_2) = N(-d_2)$$

$N(-d_2)$  représente la probabilité de défaut d'un réassureur sous probabilité risque neutre.  $-d_2$  est défini comme une limite décrivant le montant des engagements ajusté en dessous duquel le réassureur ne peut pas descendre.

On veut maintenant chercher ce seuil (*cut-off*)  $c (= -d_2)$  pour lequel la firme tombe dans le cas de défaut au temps  $T$  avec une probabilité de défaut  $p_k$ .

On pose  $R$  qui représente les 8 catégories de notations :  $D, CCC, B, BB, BBB, A, AA, AAA$ , pour chaque réassureur, on a la variable aléatoire de défaut  $D$  qui suit une loi Bernoulli de paramètre  $p_k$ .

On définit un seuil  $c_i$  pour chaque réassureur, le réassureur  $i$  est tombé en défaut si et seulement si quand il n'est pas capable de payer  $A_i$ , qui a les valeurs de seuils prédéterminées  $c_i$ .

$$A_i < c_i \Leftrightarrow D = \mathbf{1}_{\{A_i < c_i\}}$$

Une hypothèse fondamentale et importante du modèle interne est que les valeurs des actifs de chaque paire de réassureurs du portefeuille sont corrélés entre elles à  $\rho$ <sup>3</sup>. La méthode actuelle pour simuler une matrice de seuils utilise la formule suivante<sup>4</sup> :

$$U = \Phi(\sqrt{\rho}G + \sqrt{1 - \rho}M) = \Phi_\rho(A) \sim \mathcal{U}_\rho[0,1] \quad (4.4.1)$$

Avec :

- 
2. La définition sera présentée après.
  3. Cette définition du coefficient de corrélation  $\rho$  est le résultat d'une recherche interne chez AXA.
  4. La représentation de cette formule en détail peut être consultée dans l'annexe B.

- Soient  $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \dots \\ G_j \\ \dots \\ G_m \end{pmatrix}$ , un vecteur gaussien et  $M = \begin{pmatrix} M_1^1 \dots & M_1^i \dots & M_1^n \\ M_j^1 \dots & M_j^i \dots & M_j^n \\ M_m^1 \dots & M_m^i \dots & M_m^n \end{pmatrix}$ , une matrice

qui suit la loi normale  $N(0, 1)$ .

- $U$  représente la matrice de seuils finale comprenant les distributions marginales des valeurs *cut-off* des actifs de réassurance corrélées en  $\rho$ .
- $i = 1, \dots, n$  le nombre de réassureurs présentés au niveau du portefeuille d'AXA et  $j = 1, \dots, m$  le nombre de scénarios simulés.

L'application de cette méthode nécessite d'une vérification de la corrélation  $\rho$  entre  $A_i$  et  $A_{i+1}$ .

Après une extension de la formule générale (4.4.1), on a, pour le nombre total de réassureurs dans le portefeuille :

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n) \\ = (\sqrt{\rho} G + \sqrt{1 - \rho} M^1, \dots, \sqrt{\rho} G + \sqrt{1 - \rho} M^i, \dots, \sqrt{\rho} G + \sqrt{1 - \rho} M^n)$$

Toutes les paires de  $A_i$  sont corrélées avec  $\rho^5$ , donc :

$$\rho_{i,i+1} = \frac{Cov(A_i, A_{i+1})}{\sigma_{A_i} \sigma_{A_{i+1}}} = \rho$$

La matrice de seuils est une matrice de taille  $N_1 \times N_2$ ,  $N_1^i (i=1, \dots, n)$  est le nombre de réassureurs total dans le groupe AXA, et  $N_2^j (j=1, \dots, m)$  est le nombre de simulations des scénarios de seuils. Chaque réassureur dans le portefeuille aura un  $m$  simulations de seuils.

	Scénario 1	...	Scénario j	...	Scénario m
Réassureur 1	$c_{11}$	...	$c_{j1}$	...	$c_{m1}$
...			...		
Réassureur i	$c_{1i}$	...	$c_{ji}$	...	$c_{mi}$
...			...		
Réassureur n	$c_{1n}$	...	$c_{jn}$	...	$c_{mn}$

FIGURE 4.6 Présentation d'une matrice de seuils

Pour rappel,  $p_k$  décrit la probabilité de défaut sachant la notation initiale de réassureur à

---

5. La démonstration est dans l'annexe C.

$t = 0$ . Le seuil  $c_i$  est donné par :

$$c_i = \Phi^{-1}(p_{i,k})$$

Où  $\Phi(\cdot)$  est la fonction de distribution normale standard cumulative.

On a la probabilité que  $i^{\text{ème}}$  réassureur fasse défaut conditionnement à  $G$  s'écrit de façon :

$$\begin{aligned} P(i^{\text{ème}} \text{ réassureur fait défaut} \mid G) &= P(A_i < c_i \mid G) \\ &= P\left[\sqrt{\rho}G + \sqrt{1-\rho}M^i \leq \Phi^{-1}(p_{i,k})\right] = P\left[M^i \leq \frac{\Phi^{-1}(p_{i,k}) - \sqrt{\rho}G}{\sqrt{1-\rho}}\right] \end{aligned}$$

$$p_{i,k} = P(D = 1 \mid G) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_{i,k}) - \sqrt{\rho}G}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

$$D = 1 \Leftrightarrow u < p_{i,k}$$

Avec :

- $K$  : la notation à  $t = 0$ .
- $p_k$  : la probabilité de défaut pour chaque catégorie de notation.
- $u \sim \mathcal{U}[0, 1]$ , la probabilité de migration de la notation entre  $t = 0$  et  $t = 1$ .

La matrice de seuils finale correspond donc à de nombreux tirages d'une distribution uniforme de dimension  $N_1$  qui sont corrélées entre elles en  $\rho$ , où  $N_1$  représente le nombre de réassureurs.

Voici un exemple de la probabilité de défaut cumulée par catégorie de notation à  $t = 0$ , ce sont les probabilités qui sont déformées par le facteur de risque donné par le modèle de Ter Berg.

$\tilde{\mathbf{A}} / \mathbf{DE}$	<b>AAA</b>	<b>AA</b>	<b>A</b>	<b>BBB</b>	<b>BB</b>	<b>B</b>	<b>CCC</b>	<b>D</b>
$\mathbf{D}_{t=1}$	0	0,0001	0,0001	0,0003	0,0014	0,0077	0,1887	1

TABLEAU 4.1 Exemple des probabilités de défaut cumulées et stressées par l'approche de choc commun

Pour un  $i^{\text{ème}}$  réassureur qui est initialement noté  $BBB$ , durant la  $j^{\text{ème}}$  simulation, il sera en défaut dans 1 an si et seulement si  $u_{i,j} < p_{i,BBB}$ , donc,  $u_{i,j} < 0,0003$ . Un réassureur ayant une notation  $AAA$  en  $t = 0$  ne fait jamais défaut.

Pour chaque réassureur, le mouvement d'une notation vers le bas peut être expliqué par le

fait que la valeur des capitaux propres est inférieure à un certain niveau des dettes, mathématiquement, on a :

$$E < \gamma_1 L \Leftrightarrow A - L < \gamma_1 L \Leftrightarrow A < (1 + \gamma_1)L$$

$$P(A < (1 + \gamma_1)L) = P(K \rightarrow R_1) = p_1 > u$$

Avec  $\gamma_1 \in [0, 1]$ ,  $p_1$  la probabilité de la nouvelle note « *downgraded* ».

$$\begin{aligned} P((1 + \gamma_2)L \leq A < (1 + \gamma_1)L) &= \Phi((1 + \gamma_1)L) - \Phi((1 + \gamma_2)L) \\ &= P(c_2 \leq A < c_1) = \Phi(c_1) - \Phi(c_2) \end{aligned}$$

#### 4.4.2 Choix de nouvelle notation

Afin de déterminer les nouveaux événements de notation, pour chaque scénario  $j$ , nous aurons une matrice de transition qui est stressée par le choc commun. Elle indique la probabilité qu'un réassureur passe de sa notation existante à une nouvelle notation dans la  $j^{\text{ème}}$  simulation qui aide la sélection d'une nouvelle notation de réassureur. Pour chaque réassureur  $i$ , comme on l'explique précédemment, une loi uniforme est générée, chaque réassureur se voit avoir un strip de seuils.

Voici un exemple de la matrice de transition cumulative stressée :

	D	CCC	B	BB	BBB	A	AA	AAA
AAA	0,00	0,11	0,17	0,22	0,22	0,59	11,82	100,00
AA	0,03	0,04	0,07	0,13	0,51	8,71	99,74	100,00
A	0,07	0,10	0,17	0,35	5,55	98,54	99,99	100,00
BBB	0,18	0,31	0,71	4,24	96,76	99,92	100,00	100,00
BB	0,73	1,27	9,11	95,29	99,90	99,98	99,99	100,00
B	3,74	9,39	94,67	99,74	99,95	99,99	100,00	100,00
CCC	29,83	85,33	99,34	99,71	99,93	100,00	100,00	100,00
D	100,00	100,00	100,00	100,00				

TABLEAU 4.2 Matrice de transition stressée (en %) pour  $j^{\text{ème}}$  scénario

À partir de la notation initiale du réassureur, la nouvelle notation sera celle correspondant à la probabilité de transition de la borne supérieure. Pour clarifier le choix de la notation, nous donnons ci-dessous un exemple de trois cas différents :

Réassureur	Notation à $t = 0$	Seuil pour la $j^{\text{ème}}$ simulation	Notation à $t = 1$
1	A	0,12	B
2	BBB	87,77	BBB
3	B	98,98	BB

TABLEAU 4.3 Génération de la nouvelle note sachant la note initiale

Le premier réassureur noté  $A$  initialement connaît un seuil de 0,12% dans la  $j^{\text{ème}}$  simulation, ce seuil se trouve dans  $(0, 1\%; 0, 17\%)$ , sa notation estimée dans un an est donc  $B$ . Pour les deux réassureurs restants, la logique est la même.

En même temps, nous remarquons à partir de la matrice de transition ci-dessus que, quelle que soit la notation initiale, la probabilité qu'elle reste à la même notation après un an est la plus élevée (*la diagonale*). En effet, il est généralement peu probable que les notations des réassureurs changent en l'absence d'un choc très fort. Par conséquent, la notation équivalente se produit le plus souvent dans tous les scénarios simulés.

Un exemple pour un réassureur initialement noté  $AA$  (*voir figure 4.7*) est présenté ci-dessous, qui est sa diffusion de nouvelles notations dans les 50 000 scénarios. La probabilité de déviation par rapport à la notation initiale est faible car il a une bonne notation à  $t = 0$ , ce qui témoigne de la forte solidité financière de ce réassureur, la projection des nouvelles notations se situe dans la plupart à  $AA$ , les événements de défaut sont rares.

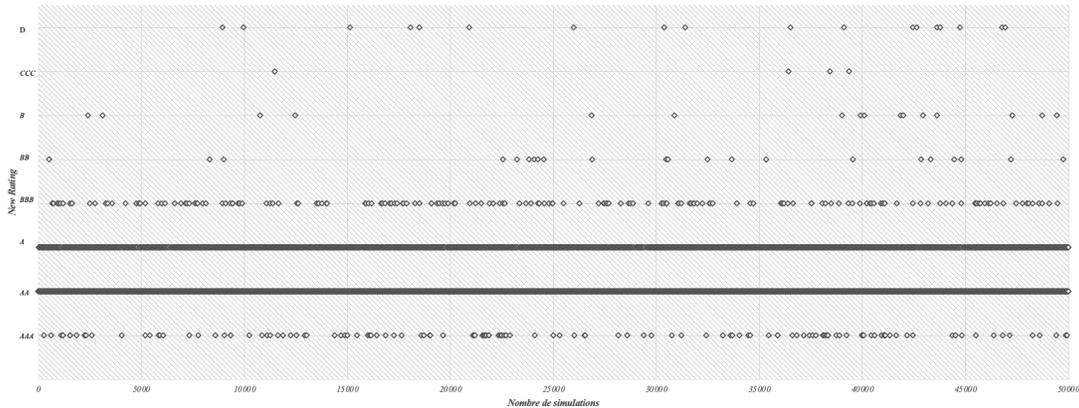


FIGURE 4.7 Distribution de nouvelles notations à  $t = 1$

Après avoir généré les événements de nouvelles notations, afin d'obtenir le STEC, nous calculons la meilleure estimation de la perte en cas de défaut pour chaque nouvelle notation du réassureur concerné. Finalement, nous aurons une distribution des pertes, le STEC est déduit de la méthode **VaR-Moyenne** mentionnée précédemment.

## CHAPITRE 5 Réduction de la volatilité du STEC RCR

L'objectif de ce mémoire est de modéliser la corrélation entre les réassureurs et de mesurer la sensibilité du STEC aux changements de la corrélation. À cette fin, la volatilité implicite des résultats du STEC existant dans le modèle doit être réduite pour garantir la crédibilité des résultats finaux. Cette volatilité provient du fait que la simulation du processus stochastique des actifs est sujette à des erreurs lorsque le nombre de réassureurs au sein du portefeuille varie.

La section proposera trois méthodes pour tenter de produire de nouvelles notations des réassureurs, on choisira finalement la méthode qui minimise la variance du STEC en fonction de la taille de portefeuille. La méthode sélectionnée sera ensuite utilisée dans la modélisation des corrélations.

### 5.1 Structure du portefeuille

Le portefeuille à modéliser correspond à une entité d'AXA, elle présente les caractéristiques suivantes :

- **Nombre de réassureurs, notations initiales et expositions :**

Il dispose de 100 réassureurs au total, 76 réassureurs pour le risque de réserves (*Run-off Risk*) et 40 réassureurs pour le risque de souscription (*Underwriting Risk*). De côté *Run-off*, il y a 34 réassureurs qui sont notés en *BB* (45%) qui représente quasi la moitié du portefeuille, cela va pénaliser beaucoup le STEC. C'est-à-dire qu'il faut davantage de capital pour couvrir le risque de contrepartie de ces réassureurs ayant une notation relativement basse. Par contre, de côté *Underwriting*, La majorité des réassureurs (63%) ont initialement noté *A*.

<i>Risque de réserve</i>					
Notation initiale	AA	A	BBB	BB	Total
Nombre de réassureurs	21	19	2	34	76
Montant de l'exposition	25,0	1,1	7,0	6,8	39,8

<i>Risque de souscription</i>				
Notation initiale	AA	A	BB	Total
Nombre de réassureurs	9	25	6	40
Montant de l'exposition	27,9	0,8	2,4	31,2

TABLEAU 5.1 Répartition des notations et des expositions (en millions d'€) du portefeuille

- **Probabilité de défaut :**

Les probabilités de défaut utilisées sont les probabilités historiques fournies par les agences de notation. Plus la note est basse, plus la probabilité de défaut augmente rapidement avec l'année.

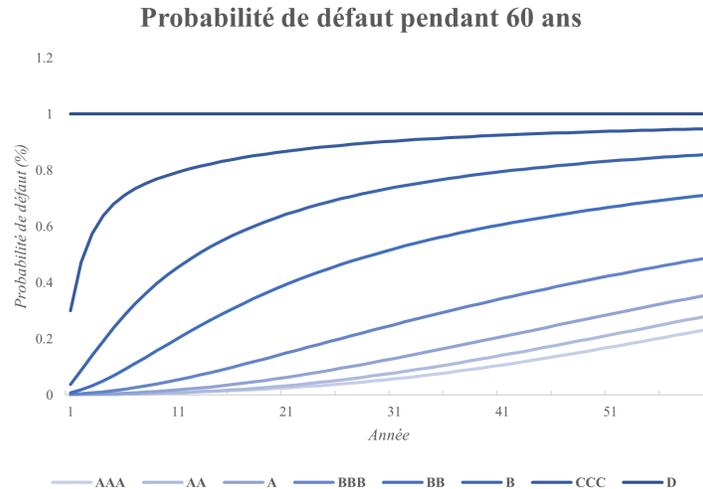


FIGURE 5.1 Exemple des probabilités de défaut pendant 60 ans

- **Pertes en cas de défaut (Loss Given Default (LGD))<sup>1</sup> :**

Il est simple d'avoir un *risque de concentration* en réassurance, où l'assureur a une exposition significative au réassureur. La dispersion de la LGD du risque de réserve est importante, indiquant un écart-type notable. La plus grande LGD représentant 40,21% de la LGD totale. La plus grande LGD représente même 79% du portefeuille total, ce qui rend la situation encore plus mauvaise pour le risque de souscription. Les expositions les plus importantes correspondent toutefois à des réassureurs ayant des notations *AA* et un faible risque de défaut, de sorte que, dans l'ensemble, il s'agit d'une cession relativement en sécurité. Le **skewness** et le **kurtosis** montrent que la distribution de LGD est asymétrique à droite et a une queue épaisse, la plupart des valeurs de LGD étant relativement petites.

	Minimum	Quantile à 25%	Médiane	Quantile 75%	Maximum
Risque de réserve	3	2 667	11 039	142 925	10 562 767
Risque de souscription	496	834,5	4 454	138 492	16 287 749

	Moyenne	Écart-type	Skewness	Kurtosis	Somme d'exposition
Risque de réserve	345 633	1 283 436	7,1	55,3	26 268 118
Risque de souscription	514 000	2 566 965	6,3	39,4	20 560 015

TABLEAU 5.2 Statistiques descriptives des LGD

1. la perte en cas de défaut est calculée selon la formule 2.2.3

## 5.2 Volatilité implicite de la matrice de nouvelles notes

Afin de modéliser une interaction des réassureurs intragroupes dans les prochaines sections, nous voulons réduire la volatilité engendrée par la dimension de la matrice de nouvelles notes. La volatilité provient du fait que la matrice de nouvelles notes est simulée stochastiquement au niveau du groupe AXA par la méthode de Monte-Carlo. Le nombre de réassureurs au niveau du groupe  $n$  pourrait varier légèrement d'une année à l'autre comme la structure du portefeuille est changée. Alors, le calcul du STEC est réalisé intensivement en parallèle par chaque entité elle-même en prenant un sous-ensemble de cette matrice de nouvelles notes avec les réassureurs concernés.

Un exemple ci-dessous présente la distribution de nouvelles notations dans les 50 000 scénarios simulés d'un réassureur qui se situe dans le portefeuille présenté précédemment.

Ce réassureur est initialement noté *AA* ayant la plus grande exposition en risque de réserve. Lorsque le nombre de réassureurs, la dimension de la matrice de nouvelles notes change, une volatilité sur la diffusion des notations en  $t = 1$  émerge, ce qui signifie que pour la  $j^{\text{ème}}$  simulation, la nouvelle notation générée pourra ne pas être la même.

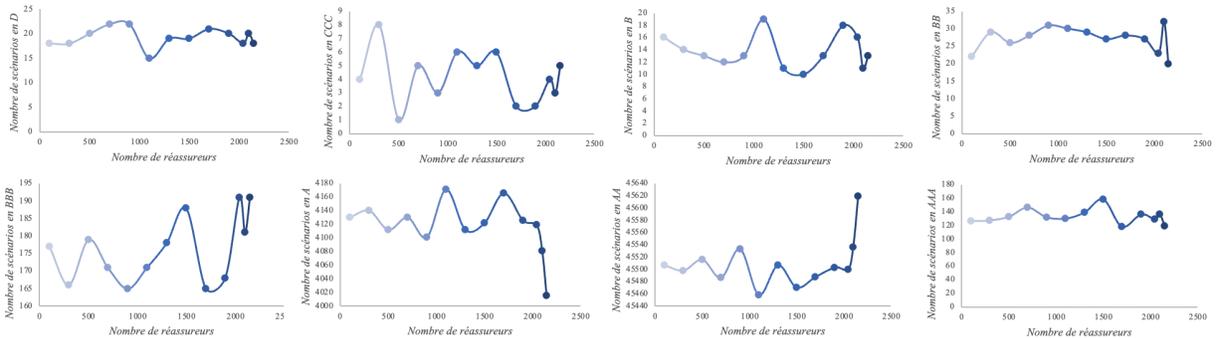


FIGURE 5.2 Distribution de nouvelles notations par catégorie en fonction de la dimension (*nombre de réassureurs*)

Pour chaque nouvel événement de notation, une valeur de *BEL* correspondante est donnée par l'équation (4.1.2). Le calcul du STEC tient compte de la diversification entre les réassureurs, ainsi entre les risques (avec une agrégation des modules de risque : le risque de réserve et le risque de souscription). Les entités dont les portefeuilles des réassureurs sont moins concentrés présentent généralement un risque de contrepartie plus faible en raison de la diversification efficace.

La distribution finale des *BELs* est obtenue en additionnant tous les strips de *BEL* par

réassureur du même panier. Le STEC pour le risque de contrepartie est calculé comme suit :

$$STEC_{RCR} = \text{VaR}_{99,5\%}(\Delta BEL) - \text{Mean}(\Delta BEL) \quad (5.2.1)$$

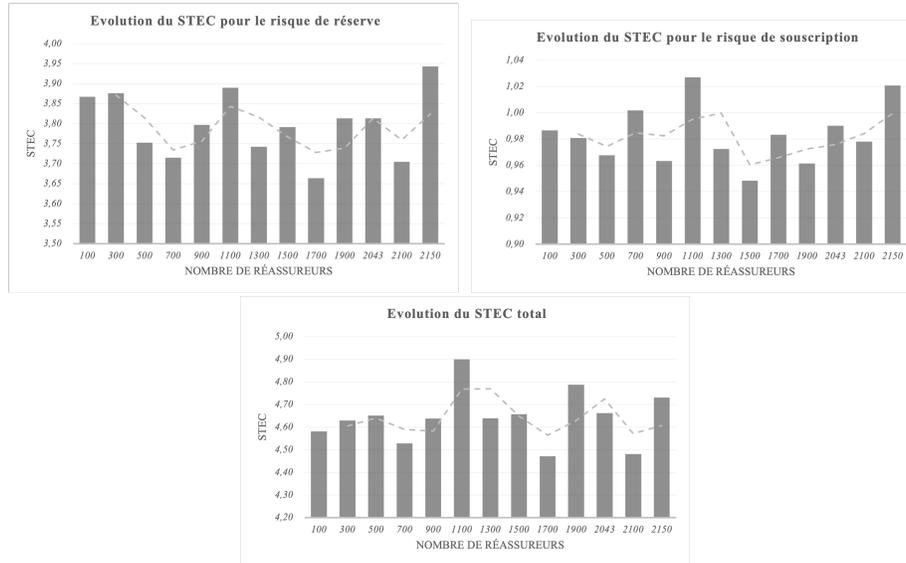


FIGURE 5.3 Évolution du STEC RCR en fonction de la dimension

Comme mentionné avant, le changement de la distribution de nouvelles notes provoque une variation du STEC (*figure 5.3*)<sup>2</sup> sous d'autres paramètres fixes (*notation initiale, exposition, rythme du paiement, taux de recouvrement, etc.*).

	Minimum	Maximum	Ecart en %
<b>Run-off STEC</b>	3,7	3,9	7,6%
<b>Underwriting STEC</b>	0,9	1,0	8,3%
<b>Total STEC</b>	4,5	4,9	9,6%

TABLEAU 5.3 Écart de l'estimation du STEC (en millions d'€) par la méthode de Monte-Carlo

Pour une seule filiale du groupe AXA, la différence entre le STEC minimum et maximum est relativement importante, de sorte qu'un résultat de STEC plus stable pour l'ensemble du groupe devrait être envisagé.

2. Les chiffres sont présentés en millions d'euros.

## 5.3 Méthodologies proposées pour la stabilisation du STEC

### 5.3.1 Méthode d'optimisation par la distance euclidienne

L'idée de cette première méthode est de choisir une matrice de seuils qui respecte le plus l'hypothèse fondamentale du modèle sur la corrélation entre les probabilités de passage des notations de réassureurs (*asset correlation*).

La logique est de simuler plusieurs matrices de seuils<sup>3</sup>, et de prendre celle qui admet une matrice de corrélation plus proche de l'hypothèse de corrélation ( $\rho$ ) en utilisant la **Distance Euclidienne** (*distance L2*) :

$$d(\hat{P}, P) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\hat{\rho}_{ij} - \rho_{ij})^2} \quad (5.3.1)$$

Afin d'optimiser le temps d'exécution, on a choisi la méthode de « *Bootstrap* », l'idée est donc de prendre un sous-ensemble de réassureurs à chaque itération, et de calculer la distance cellule par cellule entre la matrice de corrélation théorique et celle simulée. On répète 10 fois cette action et enfin calculer la *distance L2*, on prendra la matrice qui donne une distance minimale à la fin.

Pour chaque itération, une matrice des seuils est générée,

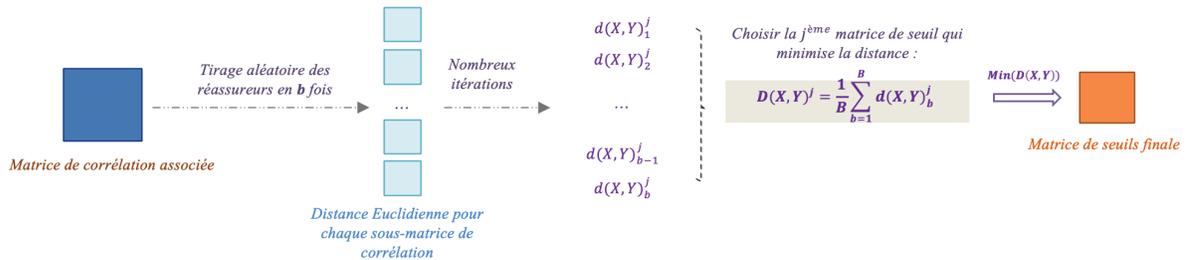


FIGURE 5.4 Processus de sélection d'une matrice de seuils

### 5.3.2 Minimisation de la distance L2 par bloc

En raison du grand nombre de réassureurs et de l'impossibilité de connaître la valeur exacte des actifs inscrits par les réassureurs dans leurs bilans, étant donné qu'il existe de petits réassureurs qui ne publient pas leur situation financière, il n'est pas possible d'évaluer di-

3. Le nombre de simulations est 10 dans notre modèle pour réduire le temps d'exécution. Il n'est pas conseillé d'augmenter le nombre d'itérations par contrainte IT.

rectement leurs notations. Comme le modèle interne suppose une distribution normale de la valeur des actifs pour les réassureurs, de nouvelles matrices de notation ( $NN$ ) peuvent être générées indépendamment en utilisant la méthode de Monte-Carlo. Avec chaque matrice, l'entité calcule le STECs et trouve finalement la moyenne arithmétique de ces STECs, qui est la valeur attendue du capital à détenir.

Soit  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées qui représentent les distributions des pertes de réassureurs obtenues à travers de  $NN$  par bloc. Le STEC par bloc est déduit de la différence entre la  $Var_{99,5\%}$  et la moyenne des pertes.

La convergence en probabilité nous dit que les STECs convergent vers un montant  $z$  en probabilité si pour  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(|STEC_m - z| < \varepsilon) = 1$$

Aussi petit que soit l'intervalle autour de  $z$ , la probabilité que  $STEC_m$  tombe dans cet intervalle tend vers 1 lorsque  $m \rightarrow \infty$ . La moyenne des STECs de  $m$  bloc est donnée par :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m STEC_j = \mathbb{E}(STEC)$$

Nous pouvons en déduire **la Loi des Grands Nombres**, pour une séquence de STECs avec moyenne  $\hat{\mu}$  et variance finie, pour  $\varepsilon > 0$ , on a,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\{|\hat{\mu} - \mu| < \varepsilon\} = 1$$

$$STEC \xrightarrow{P} \mu \tag{5.3.2}$$

La moyenne des STECs obtenus tend à se rapprocher de l'espérance mathématique avec la probabilité 1 lorsque le nombre de blocs augmente.

Cette deuxième méthode propose donc de calculer le STEC par bloc. Elle reprend l'idée de la première méthode, qui est de rapprocher l'hypothèse de corrélation du modèle. Au lieu de calculer un seul STEC, on augmente le nombre d'itérations. Chaque itération représente un bloc, on simule 10 matrices de nouvelles notes par bloc, et prend celle qui admet une distance  $L2$  minimale. À la fin, on calcule par bloc un STEC correspondant en utilisant la matrice de nouvelles notes choisie, la moyenne des STECs sera le résultat final du capital requis.

Voici une description du processus de calcul du STEC :

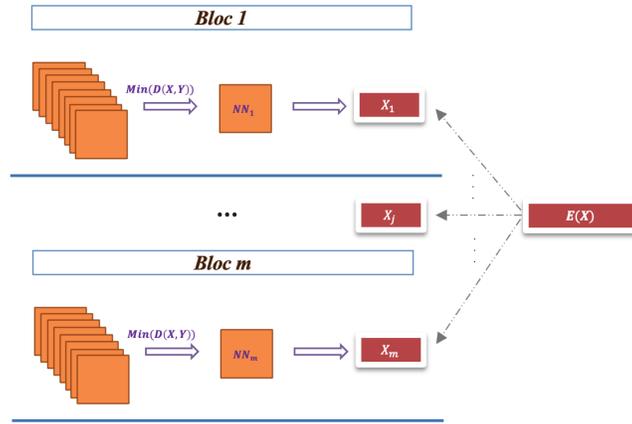


FIGURE 5.5 Processus de sélection d'une matrice de seuils par bloc

### 5.3.3 Stabilité par la moyenne des distributions normales

La troisième méthode proposée va appliquer la propriété de la « **stabilité par la moyenne des distributions normales** » pour générer une matrice des seuils.

En théorie des probabilités, une distribution est dite *stable* si la combinaison linéaire de deux variables aléatoires (*indépendantes l'une de l'autre*) ayant la même loi est identique, par exemple, la loi normale.

On pose  $A_1, A_2, \dots, A_N$ , les variables aléatoires indépendantes entre elles, et chacune suit une loi normale  $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2), \dots, N(\mu_n, \sigma_n^2)$ .

Alors, la moyenne de ces variables aléatoires suit aussi une loi normale :

$$\bar{A} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \sim N\left(\frac{\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n}{n}, \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}{n^2}\right),$$

ce qui signifie  $N\left(0, \frac{1}{n}\right)$ , donc,

$$A^{new} = \frac{\bar{A}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \sim N(0, 1) \quad (5.3.3)$$

Afin d'utiliser cette méthode, il est suffisant de démontrer que :

$$A_i = \sqrt{\rho}G + \sqrt{1-\rho}M^i \sim N(u_i, \sigma_i^2), \quad \text{avec } i = 1, \dots, N_1 \quad (5.3.4)$$

$$\phi_A(t) = E[e^{itA}] = E[e^{itG\sqrt{\rho}}] E[e^{itM\sqrt{1-\rho}}] = e^{-\frac{t^2\rho}{2}} e^{-\frac{t^2(1-\rho)}{2}} = e^{\left(\frac{-t^2\rho - t^2 + t^2\rho}{2}\right)} = e^{\left(\frac{-t^2}{2}\right)}$$

La fonction caractéristique d'une loi normale centrée réduite est trouvée.

## 5.4 Comparaison des résultats

Les notations des méthodes s'écrivent de manière suivante :

- **Méthode 0** : la méthode actuelle utilisée dans le modèle interne avec le modèle d'un seul facteur
- **Méthode 1** : la méthode qui minimise la distance  $L2$  entre la corrélation de l'hypothèse et celle simulée
- **Méthode 2** : la méthode qui calcule le STEC final basé sur la méthode Monte-Carlo en respectant la corrélation prédéfinie
- **Méthode 3** : la méthode qui stabilise le résultat par la moyenne des lois normales

Les tableaux suivants sont les statistiques sur les résultats de STEC (en millions d'euros) sous deux modules de risques et de STEC total prenant compte la diversification des risques :

STEC pour le Risque de Réserve					
Méthode	Moyenne	Écart-type	Coefficient de variation	Intervalle du STEC	Variation en %
0	3,8048	0,0823	2,168%	[3,67 ; 3,94]	7,62%
1	3,8250	0,0691	1,806%	[3,68 ; 3,91]	6,26%
2	3,7863	0,0638	1,684%	[3,65 ; 3,89]	6,21%
3	3,7900	0,0817	2,156%	[3,67 ; 3,98]	8,28%

TABLEAU 5.4 Résultats du STEC pour le risque de réserve

STEC pour le Risque de Souscription					
Méthode	Moyenne	Écart-type	Coefficient de variation	Intervalle du STEC	Variation en %
0	0,9831	0,0232	2,363%	[0,95 ; 1,03]	8,25%
1	1,0329	0,0350	3,392%	[0,96 ; 1,08]	12,48%
2	1,0179	0,0202	1,980%	[0,98 ; 1,05]	6,25%
3	1,0264	0,0306	2,982%	[0,98 ; 1,09]	11,50%

TABLEAU 5.5 Résultats du STEC pour le risque de souscription

STEC Total					
Méthode	Moyenne	Écart-type	Coefficient de variation	Intervalle du STEC	Variation en %
0	4,6430	0,1188	2,558%	[4,54 ; 4,90]	9,60%
1	4,7789	0,1085	2,270%	[4,59 ; 4,91]	7,16%
2	4,7264	0,0946	2,001%	[4,55 ; 4,84]	6,46%
3	4,7491	0,1241	2,614%	[4,50 ; 4,97]	10,32%

TABLEAU 5.6 Résultats du STEC avec la diversification entre les risques

La **méthode 2** (Minimisation de la distance  $L2$  par bloc) est la méthode la plus appréciée qui donne le plus petit écart-type de STEC dans les quatre cas, ainsi, la plus petite variation

entre le STEC minimum et maximum, alors que le STEC pour le risque de réserve en moyenne est le plus petit, il y a potentiellement une préoccupation de sous-estimation. Selon l'idée de la méthode de Monte-Carlo, nous espérons une marge d'erreur plus petite lorsque le nombre d'itérations augmente.

Parmi les deux sous-risques, le portefeuille est plus exposé au risque de réserve en termes de nombre de réassureurs, montant d'exposition, nombre de réassureurs moins bien notés. Donc, le STEC pour ce risque est plus grand et est à la position dominante, il détermine la position du STEC total réalisé par les quatre méthodes.

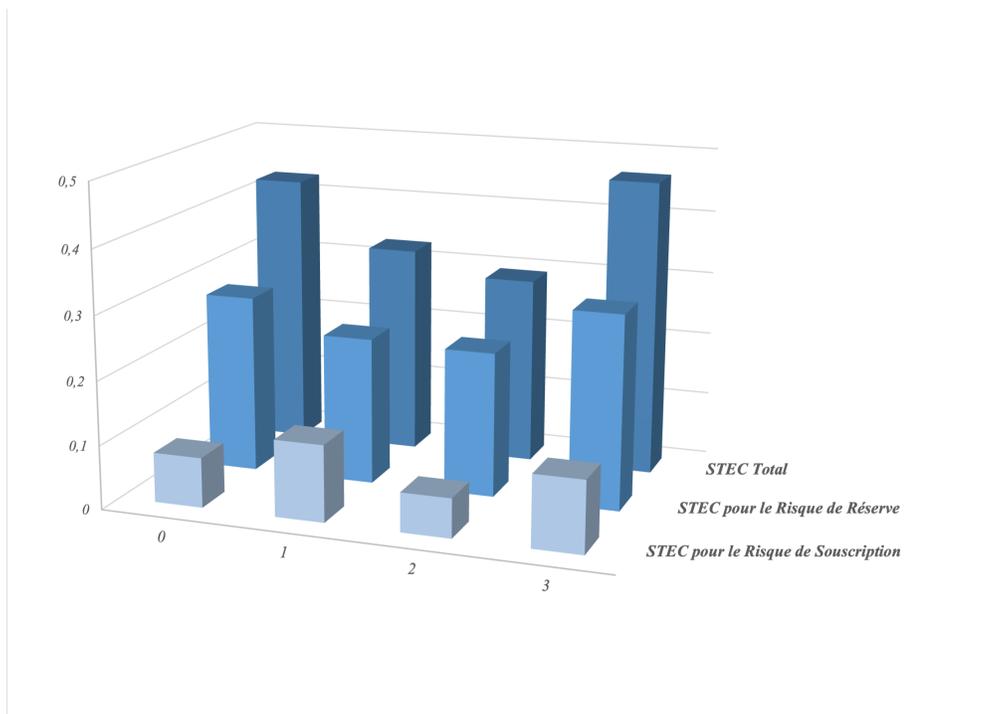


FIGURE 5.6 Montant du STEC par méthode et par risque

En raison du volume élevé d'expositions, en particulier parmi les réassureurs à faible notation pour le risque de réserve, il est intéressant de comparer les ratios ( $Run-off\ STEC / Exposition$ ) de différentes méthodes.

Le graphique (*figure 5.7*) montre que le ratio calculé par les **méthodes 2** (*Minimisation de la distance L2 par bloc*) et **3** (*Stabilisation du STEC par la moyenne des lois normales*) augmente davantage lorsque la notation diminue. Cela prouve la prudence du point de vue de réassureur individuel, la dégradation de la notation est suivie par une pénalisation de STEC plus forte.

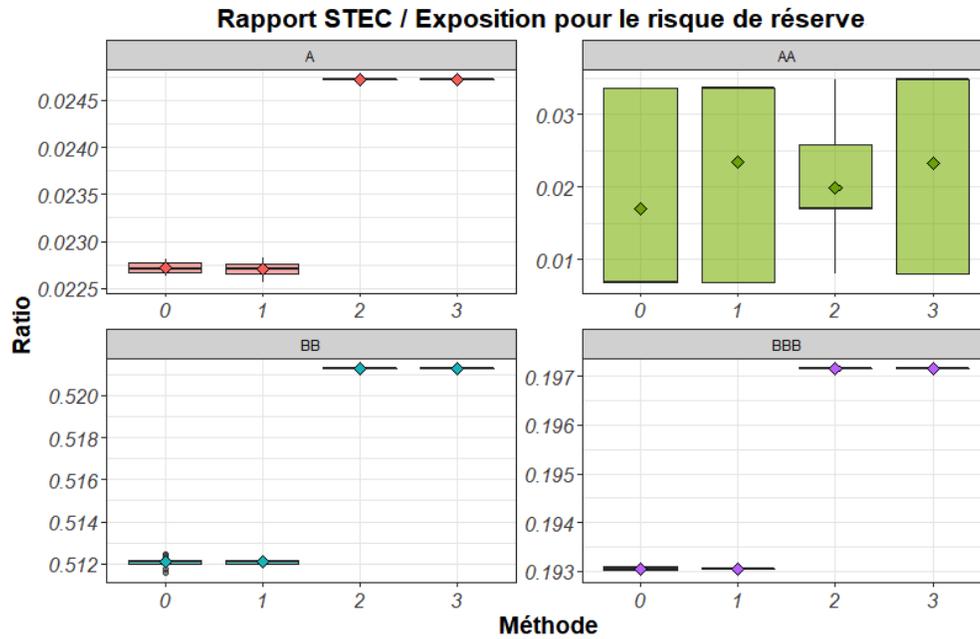


FIGURE 5.7 Ratio (Run-off STEC / Exposition) par catégorie de notation et par méthode

	Méthode			
	0	1	2	3
<b>Ratio total avec diversification</b>	9,58%	9,34%	9,48%	9,96%
<b>Ratio moyen sans diversification</b>	24,46%	24,63%	25,01%	25,10%

TABLEAU 5.7 Ratio (Run-off STEC / Exposition) moyen et total des réassureurs du portefeuille

En revanche, comme le calcul du STEC prend en compte l'ensemble du panier de réassureurs de l'entité (tableau 5.7), le montant du STEC calculé est partiellement éliminé par cet effet de diversification. Le ratio (*Run-off STEC / Exposition*) calculé par la **méthode 2** passe en 3<sup>ème</sup> position (de 25,01% à 9,48%).

Dans ce chapitre, nous avons exploré trois méthodes pour réduire la volatilité dans la matrice de nouvelles notations. Nous avons opté pour l'utilisation d'une variable de contrôle, qui repose sur l'hypothèse selon laquelle la corrélation entre les valeurs des actifs des réassureurs dans le portefeuille est  $\rho$ . En simulant plusieurs fois la matrice des seuils et en sélectionnant celle qui se rapproche le plus de cette hypothèse, nous sommes en mesure de générer des notations à horizon un an pour les réassureurs.

Cependant, les résultats expérimentaux montrent que cette méthode ne réduit la volatilité implicite que dans une certaine mesure. Pour surmonter cette limitation, nous appliquons la Loi des Grands Nombres. En répétant plusieurs fois la sélection de la meilleure matrice de



seuils par bloc, nous obtenons le STEC final par une espérance mathématique. Les résultats indiquent que cette méthode est efficace pour réduire la variance du STEC.

Bien que l'augmentation du nombre d'itérations<sup>4</sup> ne soit pas actuellement recommandée en raison des limitations informatiques, cette méthode parvient à diminuer la volatilité. Par conséquent, pour assurer la fiabilité des résultats, notre prochaine modélisation sur la corrélation entre les réassureurs fera appel à cette méthode.

---

4. *c'est-à-dire le nombre de blocs.*

## CHAPITRE 6 Modélisation de la corrélation intergroupe des réassureurs

Dans le marché financier, le cas le plus idéal est que chaque facteur de risque soit indépendant les uns des autres. Cependant, après la grande récession économique en 2008, les acteurs du marché ont pris conscience de la forte corrélation entre les défauts des contreparties, ce qui pouvait entraîner des pertes inattendues sur le capital. Dans ce contexte, les théories des copules fournissent un moyen d'analyser finement la structure de dépendance du portefeuille. Grâce à elles, nous pouvons mesurer des corrélations autres que des corrélations linéaires.

Nous allons modéliser la dépendance entre les valeurs d'actifs de réassurance par copules multivariées. Ce chapitre expliquera la sélection des copules qui vont employer pour modéliser la corrélation intergroupe. Ensuite, le calibrage du modèle interne pour produire les nouvelles notations des réassureurs. Enfin, une étude sur les résultats des STECs sera présentée afin de comprendre comment ils évoluent en capturant la dépendance de queue. Cette approche contribuera à améliorer la gestion du risque de contrepartie en réassurance.

### 6.1 Problématique

La base de données qui sert à modéliser le risque de contrepartie fait référence au portefeuille présenté dans le chapitre 5 (*voir section 5.1*).

La structure de ce portefeuille présenté rend nécessaire une attention particulière à certaines de ces caractéristiques :

- Le nombre de réassureurs ayant une notation *BB* ou *BBB* représente une proportion importante du portefeuille, ce qui peut augmenter le capital requis car ils ont une probabilité de défaut plus élevée.
- La distribution de LGD des réassureurs a les propriétés d'asymétrie à droite et de queue épaisse, celle-ci nous rappelle qu'il faut prêter une attention particulière aux expositions extrêmes. Une exposition excessive peut également faire augmenter largement le capital requis.

En général, si le réassureur a une faible notation, l'assureur ne cédera qu'une petite partie des provisions techniques, car ces réassureurs sont plus enclins à faire défaut. Avec un réassureur bien noté, l'assureur lui fera davantage confiance, de ce fait, la majorité de l'exposition sera concentrée chez lui.

La quantité du STEC dépend essentiellement de la notation du réassureur et de la taille de

l'exposition. Le STEC est positivement corrélé à l'exposition des réassureurs et négativement corrélé à la notation des réassureurs. Pour une même exposition, le STEC requis pour le réassureur augmente davantage à mesure que sa notation diminue. De même, pour la même notation, le STEC pour le réassureur augmente lorsque l'exposition monte.

Dans ce contexte, la corrélation entre les réassureurs qui sont moins bien notés requiert une attention particulière. La description de leurs interactions est cruciale pour le calcul d'un STEC plus juste. En outre, compte tenu du risque de concentration, la corrélation entre certains réassureurs présentant des expositions élevées doit faire l'objet d'une considération spécifique.

Dans l'idée de mieux capturer la queue de distribution, les copules multivariées donnent une méthode de caractériser la corrélation intergroupe ( $\rho$ ) définie dans l'approche de modèle interne. Nous allons ensuite présenter le choix des copules utilisées pour la modélisation.

## 6.2 Choix des copules multivariées

### 6.2.1 Copule Gaussienne

L'idée de modéliser le risque de contrepartie des réassureurs avec la formule (4.4.1) destine à employer une copule Gaussienne pour décrire la corrélation  $\rho$  entre chaque paire de réassureurs, c'est-à-dire la probabilité de passer d'une notation à une autre dans un an.

On commence par un développement de l'équation (4.3.3), la probabilité de défaut d'un réassureur  $i$  (la probabilité de défaut marginale) s'écrit comme suit :

$$P(A_{i,T} \leq L_{i,T}) = P(A_{i,T}^* \leq -d_2) = p_i, \text{ avec } p_i \in [0, 1] \quad (6.2.1)$$

La distribution jointe des  $n$  réassureurs est :

$$\begin{aligned} C_{\rho}^{\text{Gaus}}(\mathbf{p}) &= P(A_1^* \leq c_1, \dots, A_n^* \leq c_n) = P(\Phi(A_1^*) \leq p_1, \dots, \Phi(A_n^*) \leq p_n) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}(p_1), \dots, \Phi^{-1}(p_n)) = (\Phi(A^*))^n \end{aligned}$$

qui vérifie **le théorème de Sklar**. Dans la copule Gaussienne, le coefficient de corrélation « Pearson » est égal approximativement au coefficient de corrélation « Spearman ».

La copule Gaussienne est très connue dans le domaine de la tarification des produits financiers, ainsi la mesure du risque de portefeuille grâce à sa simplicité à appliquer. En revanche, elle présente de nombreuses faiblesses, certaines d'entre elles sont particulièrement sévères.

Dans la réalité, la plupart des rendements des actifs s'écartent de la normalité, ce qui signifie qu'ils sont asymétriques et à queue épaisse. La copule Gaussienne ne peut pas caractériser les corrélations non linéaires telles que la corrélation de queue, qui entraîne potentiellement une sous-estimation des risques de pertes extrêmes.

### 6.2.2 Copule de Student à $v$

Par rapport à la copule Gaussienne, la copule de Student a une queue plus épaisse. Son paramètre, le degré de liberté  $v$ , affecte l'épaisseur de la queue de distribution, plus  $v$  est petit, plus la queue est épaisse avec un  $\rho$  fixé.<sup>1</sup>

La simulation d'une copule de Student est accessible par la formule suivante :

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \sqrt{B}\mathbf{Z}$$

Avec  $B \sim \text{Gamma}^{-1}(v/2, v/2)$ , et  $\nu/B \sim \chi_\nu^2$ ,  $\mathbf{Z} \sim N_d(0, \Sigma)$ ,  $B$  est indépendant de  $\mathbf{Z}$ .

$$C_{\nu, \rho}^t(\mathbf{p}) = P\left(\sqrt{B}A_1^* \leq t^{-1}(p_1), \dots, \sqrt{B}A_n^* \leq t^{-1}(p_n) | B\right) = \mathbf{E}[(\Phi(A^*))^n]$$

La copule de Student est une bonne alternative pour la modélisation du risque de contrepartie en réassurance grâce à sa propriété de queues **épaisses** et **symétriques**. Cette propriété est bien adaptée à la nécessité pour le portefeuille de réassurance de se concentrer sur l'interaction entre les réassureurs présentant des expositions à faible et à fort risque.

Cependant, la difficulté présentée aujourd'hui est une incertitude du paramètre. Le manque de données à calibrer comme le marché de réassurance est relativement petit par rapport au celui de l'assurance, ainsi la faillite d'une compagnie de réassurance est un évènement à très faible probabilité. L'application de cette copule sur le portefeuille d'AXA a besoin donc les *jugements des experts* ou assez de données historiques pour déterminer le paramètre  $v$  dans le futur.

Dans le mémoire, la simulation d'une copule de Student est faite sous **R** par le package *rCopula*. Les degrés de libertés choisis sont : 2, 5, 20. Il est intéressant de tester sur les différents degrés de liberté<sup>2</sup> et voir l'impact sur le résultat du STEC. Généralement, quand le risque de pertes extrêmes est plus élevé, l'assureur a besoin plus de capital pour se protéger contre la ruine.

---

1. Lorsque  $v \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_L \rightarrow 0$ ,  $\lambda_U \rightarrow 0$ .

2. Elle tend vers une copule Gaussienne lorsque le degré de liberté sont supérieurs à 30.

### 6.2.3 Copule de Clayton de paramètre $\theta$

Nous avons décrit précédemment certaines des propriétés de la copule de Clayton qui sont liées à notre portefeuille des réassureurs : sa corrélation se rapproche de 0 au fur et à mesure que l'on descend dans la queue à gauche de la distribution jointe. Elle est plus éloignée du côté droit de la distribution conjointe quand  $\theta > 0$ . Elle produit des probabilités à faibles valeurs qui ne décroissent pas aussi rapidement qu'une copule Gaussienne, de sorte qu'elle permet de capturer la corrélation entre les valeurs extrêmes dans la queue **inférieure**, alors, on a  $\lambda_L > 0$  et  $\lambda_U = 0$ .

Le choix de la copule de Clayton s'est fondé sur le fait que des petites valeurs d'expositions des réassureurs qui sont moins bien notés ont été observées. Les réassureurs modèrent les chocs dans la même direction. Si le capital d'un réassureur subit un choc de forte intensité, en particulier un réassureur qui est moins bien noté est très vulnérable au choc, cela entraîne des effets ultérieurs négatifs sur les autres réassureurs du secteur.

Selon notre modèle, la queue à gauche de la distribution jointe représente une interaction sur la probabilité passant à un défaut entre les réassureurs. Si  $\lambda_L$  est plus grand, alors, la corrélation de défaut est plus forte.

Nous définissons d'abord la formule pour générer une copule de Clayton multivariée :

$$U_{\theta}^{Clayton} = \varphi_{\theta}^{C[-1]}(t) = (1 + y)^{-\frac{1}{\theta}} \quad (6.2.2)$$

Alors  $(U_1, \dots, U_n)$  admet pour la loi jointe  $C(u_1, \dots, u_n)$  donnée par la définition de la copule.  $n$  est le nombre de réassureurs du portefeuille qui est aussi la dimension de la copule.

La modélisation **RCR** par une copule de Clayton doit respecter l'**hypothèse de base** : *les valeurs des actifs de chaque paire de réassureurs sont corrélées en  $\rho$* . Cependant, il n'existe pas une relation explicite entre le coefficient de *Pearson*  $\rho$  (ou de *Spearman*  $\rho_s$ ) et  $\theta$ .

Pour optimiser le choix de paramètre  $\theta_{Clayton}$ , nous créons d'abord une séquence de valeurs  $\theta$  qui pourraient être prises, puis nous simulons les copules de Clayton ( $U_{\theta}^{Clayton}$ ) en fonction de  $\theta$  et dérivons la matrice de corrélation estimée ( $\Sigma' =: [\hat{\rho}'_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n}$ ), le paramètre  $\theta$  est calibré en optimisant la formule :

$$\theta^{op} = \underset{\theta}{\text{Argmin}} \sum_i \sum_j (|\hat{\rho}'_{i,j} - \rho|) = \underset{\theta}{\text{Argmin}} (|\hat{P}' - \rho|) \quad (6.2.3)$$

Où  $\hat{P}$  représente un vecteur des coefficients de corrélation des réassureurs. Si  $n = 10$ , le

nombre de coefficients de corrélation dans ce vecteur est  $\frac{n(n-1)}{2} = 45$ .

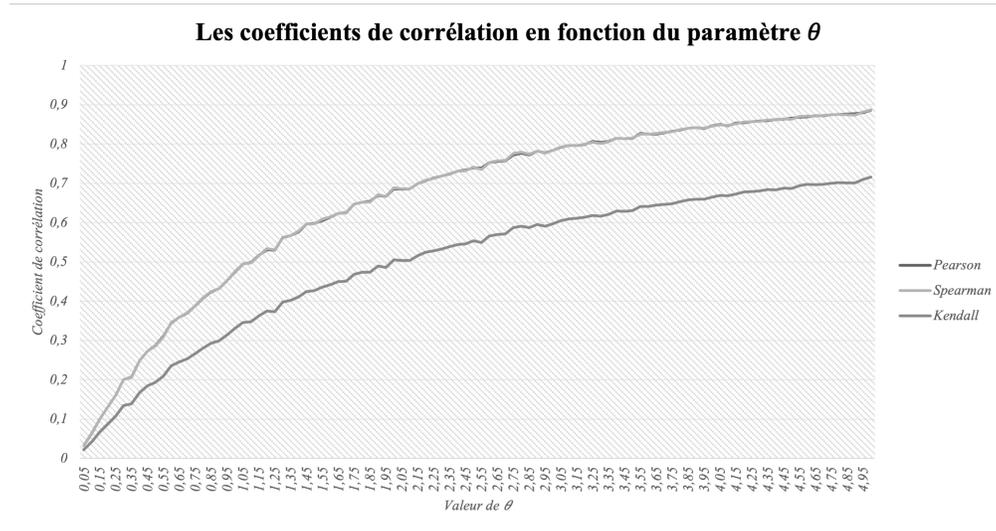


FIGURE 6.1 La relation entre  $\theta_{Clayton}$  et les coefficients de corrélation ( $\rho$ ,  $\rho_s$ ,  $\tau$ )

$\theta$  indique la structure de dépendance dans une copule Archimédienne. Les coefficients de corrélation de *Pearson* et de *Spearman* sont assez proches. Les coefficients de corrélation augmentent quand la valeur de  $\theta$  est plus grande.

- Quand  $\theta \rightarrow \infty$ , la copule tend vers la copule de comonotonie.
- Quand  $\theta \rightarrow 0$ , elle est une copule d'indépendance.

Si le coefficient de corrélation de *Pearson* est proche 0,5, le coefficient de *Spearman* est légèrement inférieur à 0,5, et  $\theta_{Clayton}$  est environ = 1.

#### 6.2.4 Copule de Gumbel-Hougaard de paramètre $\theta$

La copule de Gumbel a une propriété inverse de la copule de Clayton en ce sens qu'elle se concentre davantage sur la corrélation de queue supérieure et que la distribution de queue inférieure n'est pas très différente de celle de la copule Gaussienne ( $\lambda_L = 0$  et  $\lambda_U > 0$ ).

Il est logique que la corrélation entre les actifs de réassurance soit positive. En général, les réassureurs se réagissent au risque dans le même sens. Pour les pertes extraordinaires, cela nécessite l'introduction de la théorie des valeurs extrêmes pour ajuster les données aux pertes de la compagnie d'assurance. Si la théorie des valeurs extrêmes est étendue à une analyse des variables aléatoires multidimensionnelles, il est possible d'utiliser la copule à queue supérieure pour modéliser les pertes importantes.

Notre portefeuille nous dit qu'il existe les grandes expositions pour certains réassureurs. La copule de Gumbel permet de capturer la dépendance localisée dans le coin à droite, c'est-à-dire la corrélation entre les probabilités de passage d'une notation vers le haut, même s'il n'est pas très fréquent, par exemple, une augmentation de la probabilité qu'un réassureur passe de AA à AAA en 1 an peut être suivie d'une augmentation de sa notation par d'autres réassureurs du même portefeuille.

La copule de Gumbel-Hougaard est générée par :

$$U_{\theta}^{Gumbel} = \varphi_{\theta}^{G[-1]}(t) = \exp(-y^{\theta^{-1}}) \quad (6.2.4)$$

Le choix de paramètre  $\theta_{gumbel}$  est effectué de la même manière que le modèle de la copule de Clayton. Le  $\theta_{gumbel}$  décrit la structure de dépendance entre les réassureurs.

- Si  $\theta = 1$ , elle est une copule d'indépendance.
- Si  $\theta \rightarrow \infty$ , la copule tend vers la copule de comonotonie.

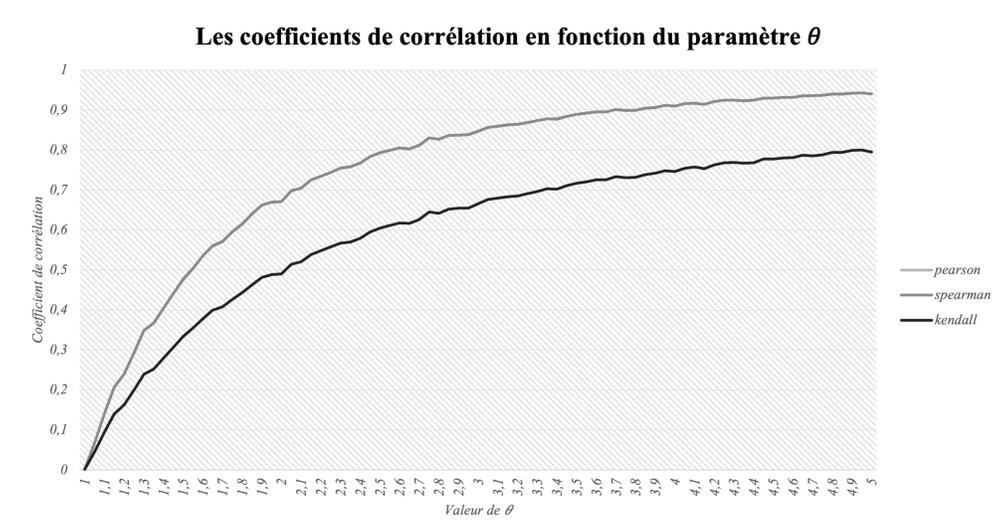


FIGURE 6.2 La relation entre  $\theta_{Gumbel}$  et les coefficients de corrélation ( $\rho$ ,  $\rho_s$ ,  $\tau$ )

Si le coefficient de corrélation de *Pearson* est proche 0,5, le coefficient de *Spearman* est légèrement inférieur à 0,5, et  $\theta_{Gumbel}$  est environ = 1,5.

### 6.2.5 Choix des paramètres

La détermination des paramètres des copules multivariées est réalisée à l'aide des théories présentées dans le chapitre 3. En résumé, les paramètres pour les différentes copules sont

estimées comme indiquées dans le tableau ci-dessous<sup>3</sup> :

Type de copule multivariée	Paramètres					
	$\rho$	$\hat{\rho}_s$	$\hat{\tau}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}_U$	$\hat{\lambda}_L$
<i>Gaussienne</i>	$\rho$	0,2394	0,1609	-	0	0
<i>Student <math>v=20</math></i>	$\rho$	0,2446	0,1654	-	0,0019	0,0019
<i>Student <math>v=5</math></i>	$\rho$	0,2259	0,1560	-	0,1066	0,1066
<i>Student <math>v=2</math></i>	$\rho$	0,227	0,1625	-	0,2722	0,2722
<i>Clayton</i>	-	-	0,1684	0,405	0	0,1806
<i>Gumbel</i>	-	-	0,1667	1,2	0,2183	0

TABLEAU 6.1 Les valeurs des paramètres et la corrélation de la queue

Tous les paramètres nécessaires à la modélisation étant définis, il est maintenant possible de générer la matrice de nouvelles notes en appliquant les différentes copules et de faire le test de sensibilité sur le STEC.

### 6.3 Mesures des matrices de nouvelles notes

Cette section commentera la matrice de nouvelles notations simulée par les différentes copules à travers plusieurs axes. Il y a deux parties principales, la matrice de seuils et la matrice de nouvelles notes. Dans la première partie, nous voulons que les propriétés des copules soient reflétées dans la matrice de seuils. La deuxième partie se concentre sur l'observation des propriétés dans la matrice de notations, par exemple, comment la matrice de transition se déplace sous différentes copules. Le calcul du STEC étant très dépendant de la notation au quantile 99,5%, nous allons mesurer les notations des réassureurs du portefeuille à ce point. Enfin, nous aimerions examiner la probabilité de défaut pour différentes catégories de notation.

#### ► Matrice de seuils

Dans cette partie, on va mesurer les matrices de seuils en fonction de copule multivariée appliquée. Pour la visualisation claire et interprétable, on regarde seulement les caractéristiques d'une copule Gaussienne, d'une copule de Student à degré de liberté  $v = 5$ , d'une copule de Clayton à  $\theta_{Clayton} = 0,405$ , et d'une copule de Gumbel à  $\theta_{Gumbel} = 1,2$ .

La *figure 6.3* représente le nuage des points entre les deux réassureurs positionnés dans le portefeuille. La *figure 6.4* décrit la densité de la copule.

3. Le coefficient de corrélation linéaire  $\rho$  est l'information confidentielle.

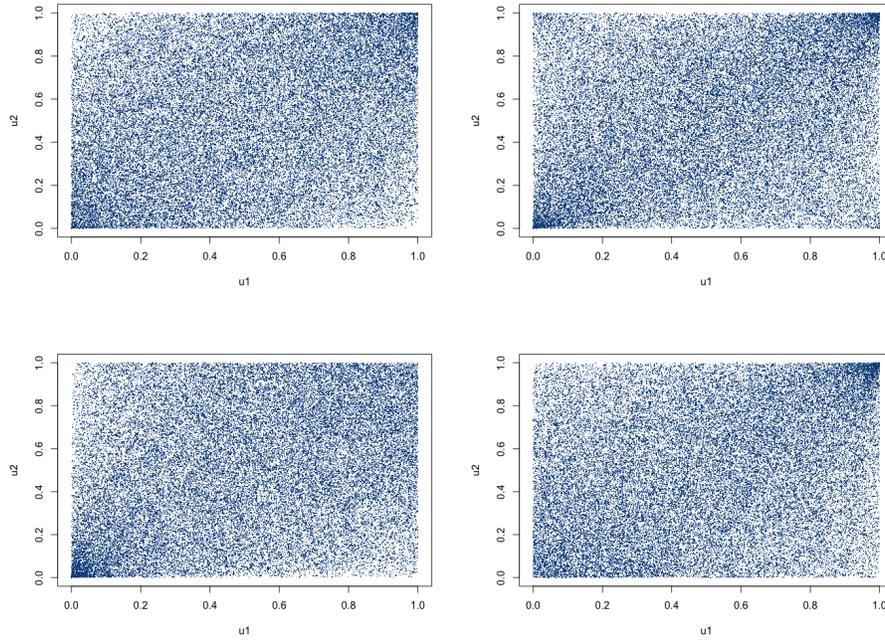


FIGURE 6.3 Nuage de points de la copule : (a) *Gaussienne*, (b) *Student*, (c) *Clayton*, (d) *Gumbel*

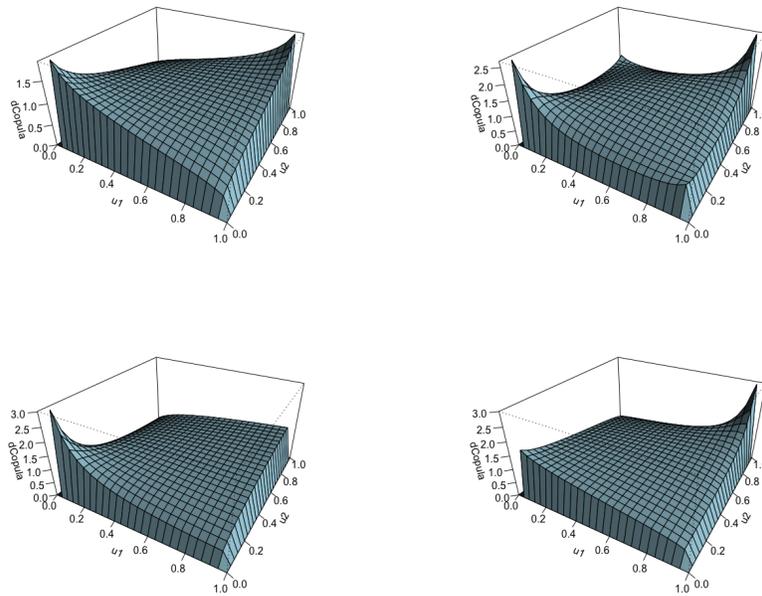


FIGURE 6.4 Densité de la copule : (a) *Gaussienne*, (b) *Student*, (c) *Clayton*, (d) *Gumbel*

Pour rappel, la distribution uniforme univariée marginale peut être interprétée comme la probabilité de passer de la notation initiale du réassureur à une autre nouvelle notation dans

un an. Si cette probabilité est plus proche de 0, elle implique une plus grande probabilité de passage à une note inférieure, le réassureur est plus susceptible d'être en défaut.

La dépendance symétrique est plus forte en queue haute et basse pour la matrice simulée par une copule de Student, cette corrélation augmente quand les degrés de liberté diminuent. La matrice simulée par une copule de Clayton capte bien la dépendance en queue basse, et la dépendance en queue droite est nulle. À l'inverse, le copule de Gumbel permet de donner les points moins dispersés vers le coin à droite.

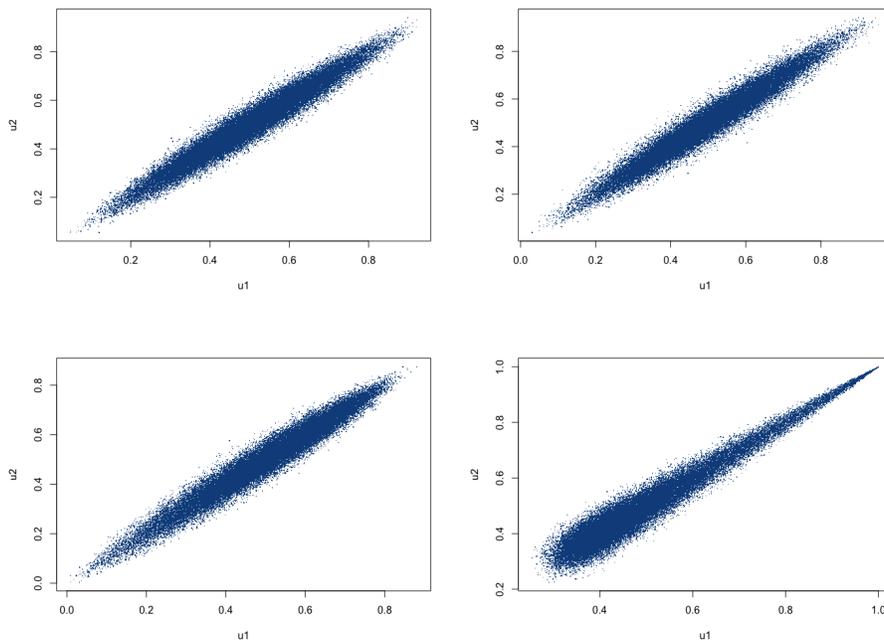


FIGURE 6.5 Nuage de points de la copule : (a) *Gaussienne*, (b) *Student*, (c) *Clayton*, (d) *Gumbel* entre les notations A et BBB

Ci-dessus les graphiques présentent la relation entre les probabilités de transition en moyenne de la notation initiale *A* et de *BBB*. L'abscisse (ordonnée) représente la probabilité de passer de *A* (*BBB*) à une autre notation *BBB* (*A*). Si elle est plus proche de 0, cela veut dire que, dans ce scénario, le réassureur ayant la notation *A* a plus de chance à tomber en défaut, suivi par le défaut d'un autre réassureur noté *BBB* dans le portefeuille. À l'inverse, si elle est plus proche de 1, le réassureur est plus probable d'avoir une note plus élevée. On voit bien qu'il existe plus de valeurs extrêmes dans les matrices de seuils simulées par la copule Clayton et de Student, donc la corrélation de défaut entre les deux catégories de réassureurs est plus forte.

► **Matrice de nouvelles notes**

Pour rappel, la matrice de nouvelles notes est simulée avec l'ensemble de réassureurs existant dans le groupe AXA, elle est obtenue en parcourant les seuils dans les matrices de transition « choquées ». La *figure 6.6* montre la distribution des notations initiales et le *taux de rappel*, le taux selon lequel, dans les scénarios simulés, le nombre de nouvelles notes reste le même que la note à  $t = 0$ .

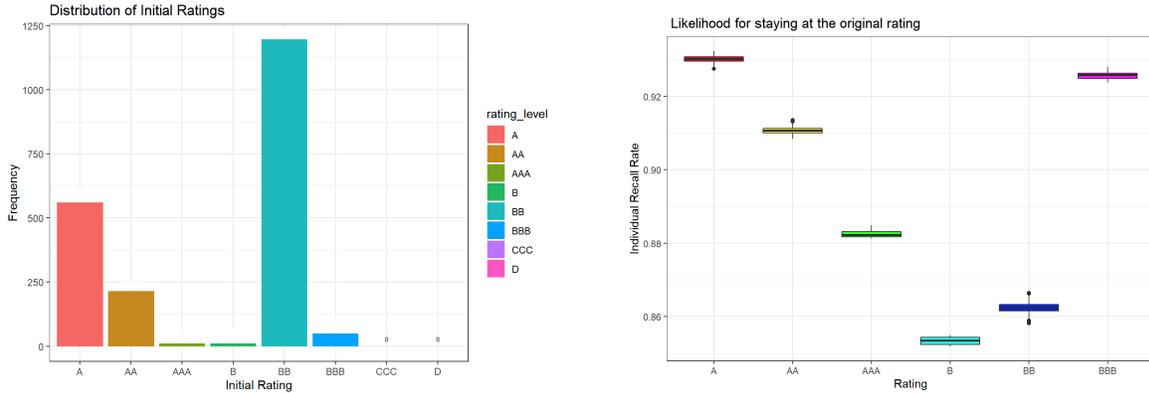


FIGURE 6.6 Statistiques descriptives de la matrice de nouvelles notes

La distribution des notations initiales des réassureurs est concentrée sur *BB* et *A*, les notations initiales des réassureurs étant plus susceptibles de changer à mesure que les notations diminuent.

• *Mesure de la matrice de transition par la distance cellule par cellule*

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0,083%	0,070%	-0,003%	0,000%	0,004%	0,012%	-0,001%	0,000%
AA	0,002%	-0,075%	0,043%	0,028%	0,004%	0,000%	0,000%	-0,002%
A	-0,001%	0,005%	-0,045%	0,019%	0,018%	0,005%	0,002%	-0,002%
BBB	-0,001%	0,003%	-0,005%	-0,039%	0,010%	0,008%	0,012%	0,011%
BB	-0,001%	-0,001%	0,002%	-0,005%	-0,055%	0,032%	-0,002%	0,029%
B	0,000%	-0,002%	-0,004%	-0,007%	-0,013%	-0,065%	0,015%	0,076%

TABLEAU 6.2 Copule Gaussienne vs. Copule de Student à  $\nu = 5$

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0,012%	-0,007%	0,010%	0,000%	0,002%	0,007%	0,000%	0,000%
AA	0,002%	-0,038%	0,010%	0,025%	0,002%	0,001%	0,001%	-0,003%
A	0,000%	0,010%	-0,049%	0,023%	0,011%	0,005%	0,002%	0,000%
BBB	0,000%	0,002%	0,002%	-0,059%	0,023%	0,014%	0,007%	0,012%
BB	0,000%	0,000%	0,000%	0,041%	-0,074%	-0,003%	0,005%	0,032%
B	0,000%	-0,002%	-0,001%	-0,009%	0,002%	-0,083%	0,030%	0,063%

TABLEAU 6.3 Copule Gaussienne vs. Copule de Clayton à  $\theta = 0,405$

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0,104%	0,103%	-0,012%	0,000%	0,005%	0,012%	-0,005%	0,000%
AA	0,013%	-0,085%	0,058%	0,009%	0,002%	0,000%	0,000%	0,003%
A	0,001%	0,053%	-0,107%	0,042%	0,005%	0,003%	0,001%	0,003%
BBB	0,000%	0,006%	0,070%	-0,117%	0,030%	-0,003%	0,005%	0,009%
BB	0,000%	0,001%	0,005%	0,101%	-0,174%	0,062%	-0,004%	0,009%
B	0,000%	-0,003%	0,000%	0,000%	0,100%	-0,268%	0,111%	0,060%

TABLEAU 6.4 Copule Gaussienne vs. Copule de Gumbel-Hougaard à  $\theta = 1,2$

La déviation de la nouvelle matrice simulée par une copule Gaussienne à la copule de Student (*resp.* la copule de Clayton) montre que les probabilités de transition sont généralement bougées positivement vers les notes basses, donc il y a un risque plus élevé lié à la dégradation de notation. À noter qu'une dégradation à une note plus basse et une dégradation à défaut sont deux situations de sévérités différentes, Cette dernière est irréversible.

Le nombre de nouveaux évènements des notes est le nombre de simulations prédéfini dans le modèle, qui implique que la transition entre les notes d'un réassureur est complémentaire. Lorsqu'une notation monte, l'autre descend. Par exemple, dans la matrice de transition simulée par la copule de Clayton, pour un réassureur ayant une note AAA en  $t = 0$ , la réduction de 0,019% de la probabilité de passage à AAA et AA est compensée par la probabilité accrue de déclassement à A, BB et B, ce qui implique un risque de contrepartie plus élevé. De plus, les réassureurs qui sont notés en AAA ne tombent jamais en cas de défaut. Par conséquent, la moyenne des  $\Delta BEL$  a une volatilité dans une fourchette gérable. C'est principalement la variation de la  $\Delta BEL$  à  $VaR_{99,5\%}$  qui influencera l'ampleur de la variation du STEC.

- **Notation à  $VaR_{99,5\%}$**

Notation à VaR 99,5%	Type de copule multivariée			
	Gaussienne	Student avec $\nu=5$	Clayton	Gumbel
A	165	70	67	113
BBB	621	716	719	673
D	1208	1208	1208	1208

TABLEAU 6.5 Notations des réassureurs à VaR 99,5% dans le portefeuille

La notation à  $VaR_{99,5\%}$  par réassureur est la 250<sup>ème</sup> notation la plus basse dans les simulations de nouvelles notes<sup>4</sup>. On constate un mouvement sur les notations des réassureurs à quantile 99,5%. Ce mouvement entre *A* et *BBB* touche seulement les réassureurs qui sont notés initialement *AA*. Cela peut être expliqué par le fait que dans la matrice de transition stressée, la probabilité de passage de *A* à *BBB* tombe exactement à 0,005. Il y a plus de *BBB* en prenant compte la queue de distribution plus épaisse qui est cohérent avec les observations précédentes.

• *Probabilité de défaut*

	Probabilité de défaut selon le type de copule				
	Probabilité de défaut historique	Gaussienne	Student avec $\nu = 5$	Clayton	Gumbel
AA	0,026%	0,035%	0,033%	0,032%	0,038%
A	0,060%	0,068%	0,067%	0,068%	0,071%
BBB	0,172%	0,172%	0,183%	0,184%	0,181%
BB	0,719%	0,713%	0,742%	0,744%	0,722%
B	3,756%	3,679%	3,756%	3,742%	3,739%

TABLEAU 6.6 Comparaison des probabilités de défaut par notation et par copule

- *Copule Gaussienne* : les probabilités de défaut sont plus élevées pour les notations initiales hautes en comparant avec celles historiques, mais on a toujours un risque de sous-estimer les probabilités de défaut en *BB* et *B*.
- *Copule de Student* : les probabilités de défaut sont plus élevées de deux côtés.
- *Copule de Clayton* : les probabilités de défaut sont plus élevées quand la notation initiale tombe.
- *Copule de Gumbel* : les probabilités de défaut sont plus proches de celles de la copule Gaussienne.

Aucune des copules n'est en mesure de capturer une probabilité de défaut plus élevée que la probabilité historique pour la notation *B*. Cependant, cette catégorie de réassureurs est très peu dans le portefeuille, donc l'impact n'est pas significatif.

4. En supposant que le nombre de simulations soit 50 000.

En conclusion, l'application des copules avec dépendance de la queue nous montre une plus grande sévérité en termes de notation. Nous espérons donc un STEC plus élevé en prenant compte la dépendance de queue.

## 6.4 Résultats et comparaison

Les résultats sont obtenus en appliquant les théories des copules pour capturer la structure de dépendance entre les réassureurs du portefeuille présenté dans la section 5.1 du chapitre 5.

Le tableau ci-dessous présente les statistiques descriptives de la distribution du BEL total avec la diversification entre réassureurs et risques :

	Type de copule multivariée					
	Gaussienne	Student avec $v=20$	Student avec $v=5$	Student avec $v=2$	Clayton avec $\theta=0,405$	Gumbel avec $\theta=1,2$
Minimum	723 003	741 789	589 446	543 555	870 734	357 434
Moyenne	1 875 850	1 878 301	1 879 673	1 879 131	1 878 396	1 877 207
Maximum	46 389 202	78 680 994	77 113 491	80 082 144	82 951 642	46 317 032
Écart-type	975 858	1 007 976	1 040 844	1 072 345	1 061 185	976 848
Coefficient de variation	52%	54%	55%	57%	56%	52%
Skewness	20,88	25,51	23,11	23,95	24,62	20,20
Kurtosis	684,70	1194,50	969,38	1029,66	1128,95	639,11
$VaR_{99,5\%}$	6 469 180	6 828 542	7 092 791	7 205 077	7 051 351	6 520 247
$ES_{99,5\%}$	11 505 491	11 639 425	12 254 292	12 454 846	12 261 096	11 663 593
Dépassement anticipé	5 036 311	4 810 883	5 161 502	5 249 769	5 209 745	5 143 345
STEC Total	4 593 331	4 950 241	5 213 118	5 325 946	5 172 955	4 643 040

TABLEAU 6.7 Statistiques descriptives du BEL Total par copule

On constate une moyenne plus élevée en appliquant les copules ayant la queue de distribution. En regardant le **maximum** et le **minimum**, la plus petite valeur du BEL total est observée pour la copule de Gumbel, qui implique qu'il est probable de sous-estimer le BEL puisque les probabilités d'un changement de notation vers une autre notation supérieure seraient plus corrélées. L'**écart-type** et le **coefficient de variation** permettent de comparer la dispersion des distributions. Une plus grande dispersion est observée pour la copule de Student et la copule de Clayton alors que les probabilités de défaut des réassureurs sont plus corrélées. Le **Kurtosis** fournit des informations sur la queue de la distribution du BEL total. L'utilisation de la copule de Student et de la copule de Clayton nous donne une distribution avec plus de valeurs extrêmes (*distributions leptokurtiques*), tandis que la copule de Gumbel donne une distribution avec moins de valeurs aberrantes par rapport à la copule Gaussienne. Le **Skewness** mesure l'asymétrie de la distribution du BEL total, nous aurons une queue de distribution plus longue à droite pour la copule de Student et la copule de Clayton. Normalement, un BEL plus élevé est attendu pour une queue de distribution plus longue.

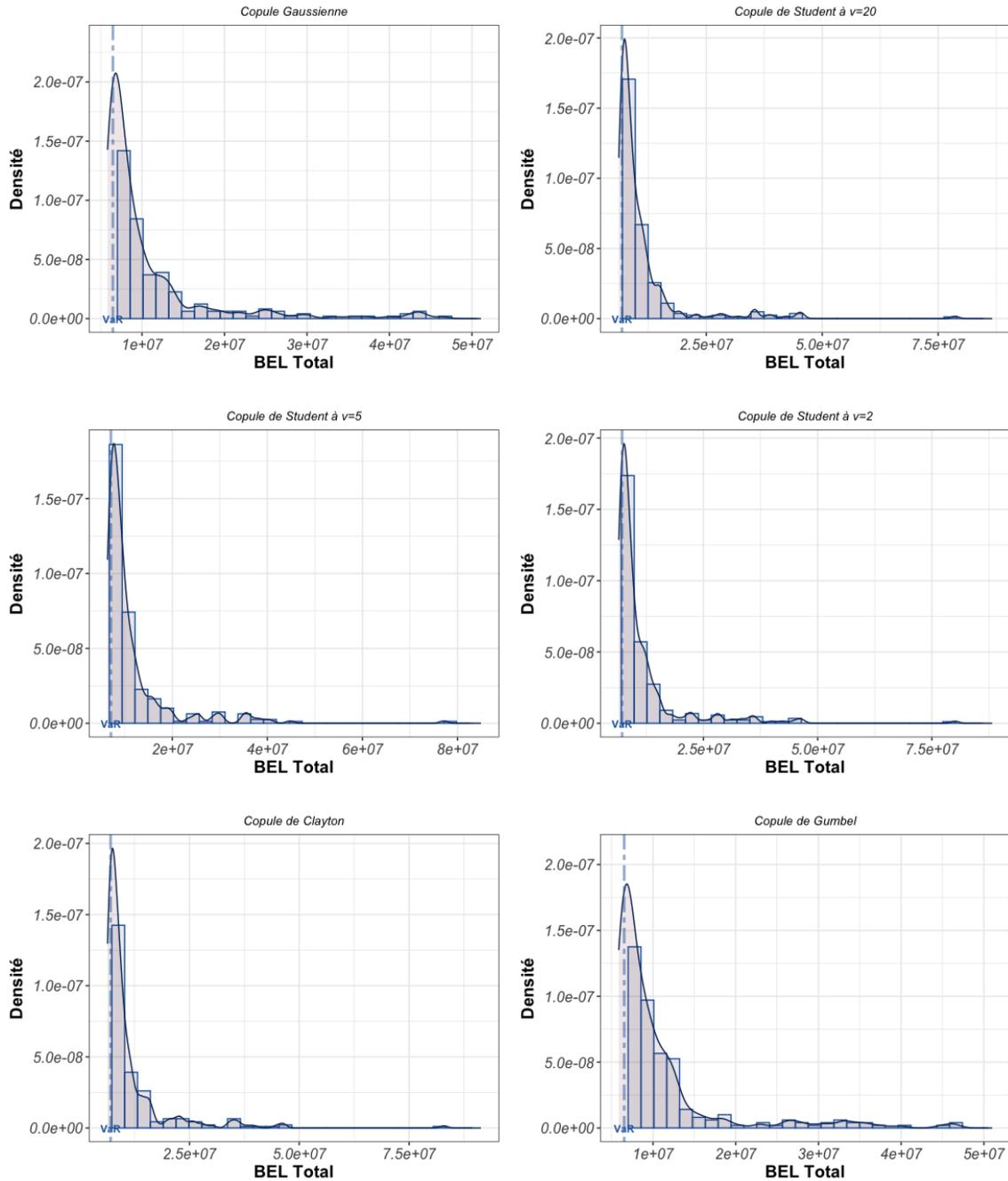


FIGURE 6.7 Queue de distribution des BELs avec diversification entre les réassureurs et les risques

Dans un portefeuille typique des pertes en risque de contrepartie en réassurance, la plupart des pertes sont autour de 0. La valeur à risque ( $VaR$ ) est un indicateur utilisé pour déterminer le risque potentiel d'un portefeuille. Avec un niveau de confiance de 99,5%, on s'attend à ce qu'un portefeuille ne perde pas plus de cette valeur pendant une période donnée. La **VaR** est plus grande avec d'autres copules ayant la dépendance de la queue.

Pour permettre une vision plus détaillée des pertes extrêmes dans la distribution, nous adoptons l'**Expected Shortfall**, ou communément appelée **Valeur à Risque Conditionnelle (CVaR)**. L'**ES** peut s'expliquer comme la valeur attendue du risque de queue.

La distribution des 250 pertes maximales est présentée à la *figure 6.7*, où l'*ES* est plus important lorsque les queues les plus grossières sont prises en compte, surtout pour les copules de Student avec de plus petits degrés de liberté et de Clayton. L'application de la copule de Gumbel donne un *ES* proche de celui de la copule Gaussienne. Un autre indicateur qui peut mesurer la distribution de la queue des pertes est le dépassement de *VaR*, on le note  $EE_\alpha$ . Il est l'écart entre l'*ES* et la *VaR*. À l'exception de la copule de Student avec un degré de liberté de 20, tous les autres résultats de STEC ont un *EE* plus grand par rapport au résultat obtenu par la copule Gaussienne.

**Définition 7: Dépassement de VaR**

Soit une V.A.  $Y$ . On appelle **dépassement anticipé** au niveau de probabilité  $\alpha$  de  $Y$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , les pertes attendues seront ajoutées à la  $VaR_\alpha$  quand elle est dépassée :

$$EE_\alpha(Y) = ES_\alpha(Y) - VaR_\alpha(Y)$$

Le même phénomène se produit pour le STEC total : seulement 1% de hausse est observée avec la copule de Gumbel. En revanche, 13% d'augmentation est constatée avec la copule de Clayton, et 8% (13%, 16%) pour la copule de Student à  $\nu = 20$  ( $\nu = 5$ ,  $\nu = 2$ ).

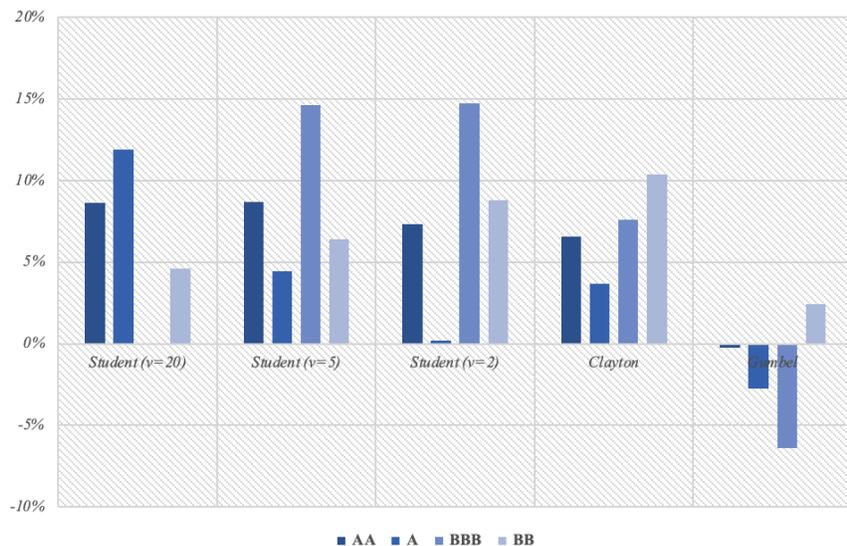


FIGURE 6.8 Évolution du STEC total par notation en %

La *figure 6.8* détaille l'évolution en pourcentage des STECs total par catégorie de notation en comparant avec celui de la copule Gaussienne. En utilisant les copules de Student à  $\nu = 5$  et de Clayton, le STEC total augmente pour chaque notation initiale, mais en appliquant la copule de Gumbel, on obtient des STECs plus faibles pour les notations *AA*, *A* et *BBB*, ce qui ne correspond pas à la réalité car on espère plutôt un STEC plus large en tenant compte de la corrélation des actifs élevés.

**En conclusion**, cette section fournit une analyse de l'hétérogénéité qui existe actuellement dans le portefeuille des réassureurs. Contrairement aux portefeuilles homogènes dans le secteur bancaire, les portefeuilles de réassurance sont exposés souvent au risque de concentration. Par conséquent, l'effet de diversification est pris en compte dans l'agrégation du STEC afin de modérer les pertes dues aux défauts des réassureurs.

Dans le portefeuille analysé, la plupart des réassureurs ont une notation *BB*, ce qui est problématique car ces notations sont très volatiles et sensibles aux chocs communs. Même si les montants d'expositions des réassureurs sont petits, ils ont un impact négatif sur le STEC. Ainsi, il est important de prendre en compte la corrélation entre les réassureurs ayant une faible valeur d'actifs de réassurance.

Nous avons choisi trois types de copules multivariées pour capturer la corrélation entre les réassureurs. Premièrement, la copule de Student, qui est similaire à la copule Gaussienne utilisée dans le modèle existant, mais diffère par sa queue symétrique et épaisse. Elle peut modéliser la valeur des actifs entre les réassureurs et les propriétés combinatoires. Deuxièmement, la copule de Clayton capture bien le risque de dégradation de la notation et le risque de défaut entre les réassureurs en raison de sa corrélation à queue inférieure. Enfin, nous utilisons la copule de Gumbel pour prendre en compte les expositions extrêmes en raison de sa corrélation de queue supérieure.

Les résultats obtenus montrent que la copule de Clayton et la copule de Student à  $\nu = 5$  sont celles qui correspondent le mieux à nos attentes concernant les STECs. Pour chaque notation, la prise en compte des corrélations de queue fait augmenter le STEC. Actuellement, à cause de l'absence de données historiques suffisantes, nous ne disposons pas actuellement des moyens pour choisir la copule optimale. Le choix final de la copule nécessite beaucoup de conseils d'experts. Un test de sensibilité sur le STEC permet de donner un aperçu et de progresser vers les calibrages ultérieurs.

## CHAPITRE 7 Modélisation de la corrélation intragroupe des réassureurs

Les recherches sur la modélisation du risque de contrepartie des réassureurs ont souligné l'importance de se concentrer sur les corrélations entre les réassureurs. Cependant, en raison de la plus petite taille du marché de la réassurance par rapport à celui de l'assurance, les corrélations des réassureurs ne sont pas catégorisées. Par conséquent, il est souvent supposé de manière uniforme que tous les réassureurs ont une corrélation d'actifs de  $\rho$ .

Nous soutenons qu'il est nécessaire de prendre en compte la nature des réassureurs pour mieux calculer un STEC approprié. Par exemple, si deux réassureurs sont des filiales du même groupe, la valeur de leurs actifs est généralement plus corrélée que celle des réassureurs n'appartenant pas au même groupe.

Dans le dernier chapitre du mémoire, nous introduirons une nouvelle variable, la corrélation intragroupe des réassureurs, que nous supposons plus élevée que l'hypothèse de base du modèle original. Nous l'appliquerons ensuite à la simulation de la matrice de nouvelles notations et observons comment le STEC évolue en fonction des variations de la corrélation intragroupe.

### 7.1 Problématique

*Bernard et Ludkovski (2012)* [10] suggèrent que le risque de défaut des réassureurs augmente avec la demande de réassurance, ce qui peut être interprété comme une corrélation positive entre la détérioration de la notation de la contrepartie et l'augmentation de l'exposition de l'assureur vis-à-vis au réassureur, on l'appelle aussi « **Wrong way Risk** ».

Selon la théorie du portefeuille, le risque de portefeuille est généralement divisé en risque systématique et spécifique lié à la compagnie lui-même. Le risque non systématique, tel que la défaillance d'un assureur en raison de sa propre mauvaise gestion, nécessite une compréhension très détaillée de ses contreparties et des tests de résistance pour obtenir une estimation approximative du risque.

*Michel et Giorgio (2012)* [11] mentionnent que lorsque le marché obligataire américain a été touché en 1998, les réassureurs ont dû se demander s'ils devaient vendre des bons du Trésor plus sécurisés ou des actifs à risque élevé avec un prix bas pour couvrir les sinistres sévères des assureurs qui sont conventionnellement définis dans les contrats de la réassurance. L'une ou l'autre de ces options les exposerait à un abaissement potentiel de leur notation en raison des

changements importants apportés aux bilans, surtout le côté d'actif. Ce type de risque non diversifiable affecte tout le secteur de l'assurance, avec un *effet domino* dû à l'interconnexion étroite entre réassureurs et assureurs.

Le risque de contrepartie des réassureurs peut être enregistré comme un processus discret par les changements de notations. *Park et Xie (2014)* [14] examinent en détail la dépendance des assureurs et des réassureurs dans le secteur de l'assurance P&C aux États-Unis, en faisant valoir que les baisses de notation des réassureurs de contrepartie devraient avoir un effet négatif sur les notes de solidité financière et les cours des actions des assureurs primaires. S'ils ne sont pas affiliés les uns aux autres, ils bénéficient de la diversification interentreprises. Si les assureurs et les réassureurs sont affiliés, alors, le risque de contrepartie sera partiellement diversifié par un effet intragroupe. Dans le même ordre d'idées, il est possible d'affirmer que le risque de défaut potentiel des contreparties est plus élevé lorsque leur solidité financière est fortement corrélée.

La modélisation actuelle du risque de contrepartie en réassurance ne tient pas compte de l'**effet intragroupe** des réassureurs. Dans ce chapitre, on introduit une nouvelle variable : **la corrélation intragroupe des réassureurs**. Les notations des deux réassureurs intragroupes dans le portefeuille bougent dans le même sens. Les réassureurs qui sont dans le même groupe présentent une corrélation sur les défauts plus forte que celles intergroupes.

Nous avons décidé de faire une analyse sur le coefficient de corrélation, pour voir si le STEC déplace beaucoup lorsque la corrélation passe de  $\rho$  à 0,9 pour les réassureurs intragroupes.

## 7.2 Description du portefeuille

Pour étudier la conséquence de la corrélation intragroupe des réassureurs sur les résultats de STEC au niveau du groupe AXA, on décide de prendre 5 portefeuilles qui désignent les 5 entités d'AXA<sup>1</sup>. Ensuite, nous allons agréger les pertes en prenant compte la diversification entre les entités, les groupes de réassureurs et les notations au cours de l'année.

La *figure 7.1* illustre la répartition des expositions par portefeuille. Le *tableau 7.1* ci-dessous est la répartition des expositions et des notations au niveau du groupe AXA<sup>2</sup>. En effet, il ne s'agit pas d'un véritable groupe AXA. Pour faciliter le processus de calcul de STEC, seules 5 entités ont été considérées, qui représentent les principaux risques.

La majorité des expositions se trouvent dans l'entité 5, tandis que l'entité 1 représente 29%

---

1. L'une des entités est celle qui est présentée dans la section 5.1.  
 2. Toutes les données sont trafiquées par un multiplicateur.

des risques de réserve et 13% des risques de souscription. Dans l'ensemble, le portefeuille présente une hétérogénéité d'expositions aux risques.

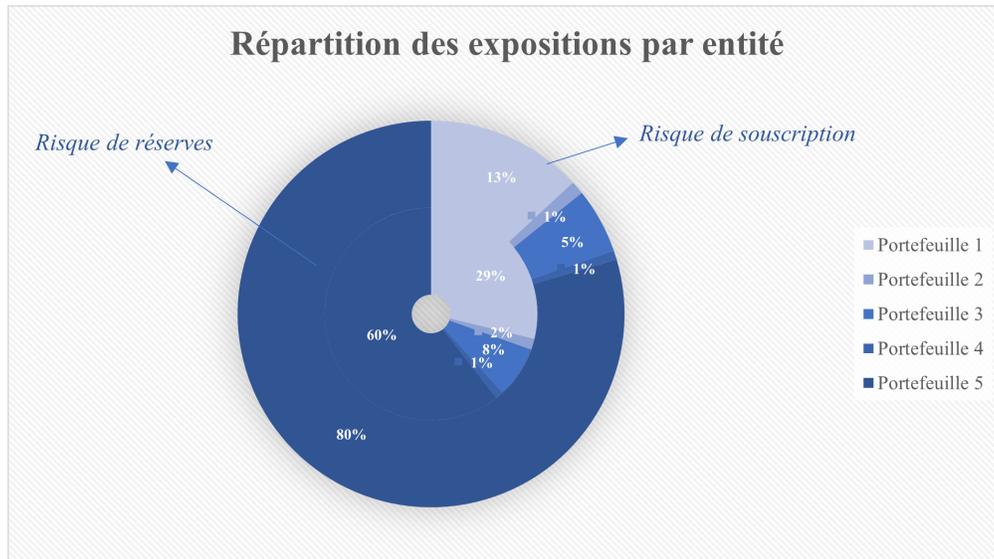


FIGURE 7.1 Répartition des expositions par entité et par risque

Le portefeuille total ne compose aucun réassureur en défaut. Les réassureurs notés *BB* et *A* sont très fréquents, surtout pour le risque de réserve. 42% de réassureurs sont notés en *BB*. Plus de réassureurs sont exposés au risque de contrepartie des réserves (63%), le montant total des expositions est d'environ 61%.

<i>en millions d'euros</i>						
Nombre de réassureurs	AAA	AA	A	BBB	BB	Total
Montant de l'exposition pour le risque de réserves	6	124	410	26	412	978
	8	1595	2550	67	226	4446
Nombre de réassureurs	5	96	279	19	173	572
Montant de l'exposition pour le risque de souscription	3	1227	1372	52	141	2795

TABLEAU 7.1 Répartition des expositions par risque et par groupe de réassurance

Nous nous concentrons maintenant sur la structure des expositions des groupes de réassurance<sup>3</sup>. En prenant ces 5 entités comme une **unité**, nous considérons qu'il s'agit de « **Groupe AXA** ».

<i>en millions d'euros</i>	Nombre de groupes de réassurance	Exposition (hors réassureurs individuels)	Exposition (yc réassureurs individuels)
Risque de réserve	529	4427	4446
Risque de souscription	254	2760	2795

TABLEAU 7.2 Répartition des expositions par risque et par groupe de réassurance

3. Ici, on parle les compagnies de réassurance ayant les filiales comme AXA, Swiss Re...

Le groupe de réassurance présente une exposition beaucoup plus élevée au risque de réserve par rapport au risque de souscription. Les réassureurs faisant partie d'un groupe représentent la majeure partie du portefeuille, ce qui signifie qu'en ajoutant une corrélation intragroupe, celle-ci serait calibrée sur l'exposition de l'ensemble du portefeuille de réassureurs.

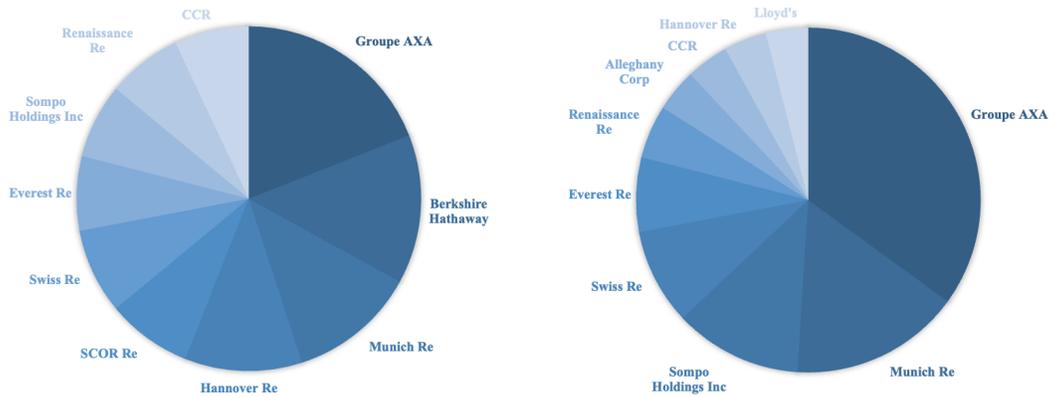


FIGURE 7.2 Les top 10 expositions des groupes de réassurance pour le risque de réserve à gauche, le risque de souscription à droite

En termes de risque, les graphiques 7.2) illustrent les 10 groupes de réassureurs présentant le plus grand risque de souscription (*resp.* le risque de réserve), qui sont également des acteurs détenant une part importante du marché de la réassurance. En particulier, une grande partie de ce risque de défaut de la contrepartie provient d'AXA lui-même<sup>4</sup>.

### 7.3 Calibrage du modèle

Il existe les transactions intragroupes entre les réassureurs, c'est-à-dire que les réassureurs peuvent échanger entre eux au sein d'un même groupe de réassurance. Il est une situation qui accroît l'interdépendance des réassureurs et donc le risque de défaut de ces derniers. Cette section introduira une nouvelle variable dans la modélisation du risque de contrepartie pour les réassureurs et examinera la relation entre la corrélation intragroupe et le STEC.

Pour rappel, la modélisation sur la corrélation intragroupe repose sur deux hypothèses fondamentales :

- La valeur des actifs de réassurance dans le portefeuille est supposée suivre une loi normale standard. Par conséquent, la corrélation entre les réassureurs est décrite par une copule Gaussienne.

4. Nous prenons compte de la réassurance interne pour une analyse en détails des résultats du STEC.

- On dit que les réassureurs intragroupes sont plus corrélés aux défaillances que les réassureurs intergroupes. Le modèle à facteur unique n'est plus utilisé car il ne permet pas de distinguer les corrélations intra et intergroupes. Au lieu d'introduire un seul coefficient de corrélation entre les réassureurs ( $\rho$ ), on va introduire une matrice de corrélation ( $\Sigma$ ). Tous ceux qui font partie du même groupe de réassurance définissent maintenant le coefficient de corrélation intragroupe ( $\gamma$ ) et retiennent ( $\rho$ ) si les réassureurs ne sont pas affiliés.

Un exemple de la matrice de corrélation ( $4 \times 4$ ) est donnée ci-dessous :

	Réassureur 1	Réassureur 2	Réassureur 3	Réassureur 4
Réassureur 1	1	0,5	$\rho$	$\rho$
Réassureur 2	0,5	1	$\rho$	$\rho$
Réassureur 3	$\rho$	$\rho$	1	$\rho$
Réassureur 4	$\rho$	$\rho$	$\rho$	1

TABLEAU 7.3 Exemple de la matrice de corrélation avec l'introduction de l'effet intragroupe

Les réassureurs 1 et 2 sont les deux filiales du même groupe de réassurance, donc, on donne une corrélation intragroupe  $\gamma = 0,5$  qui est plus élevée. Pour les autres réassureurs intergroupes, la corrélation  $\rho$  sera appliquée. Cette matrice de corrélation ( $\Sigma$ ) sera le paramètre crucial lors de la simulation d'une copule Gaussienne ( $C_{\Sigma}^{Gaus}$ ).

Pour tester la sensibilité de cette corrélation intragroupe au STEC final, nous avons d'abord fixé un  $\rho \in (0; 0,5)$ , et  $\gamma \in \{\rho; 0,5; 0,75; 0,9\}$  pour étudier l'évolution du STEC en fonction de  $\gamma$ .

Afin d'assurer la stabilité des résultats de STEC, on va faire plusieurs itérations de la matrice de nouvelles notes. On imposera à chaque itération la matrice de corrélation prédéterminée et on calculera un STEC associé. Enfin, on prendra la moyenne des STECs qui sera le résultat final<sup>5</sup>.

## 7.4 Test de sensibilité au STEC

Dans cette section, nous allons examiner l'incorporation de la corrélation intragroupe dans le calcul du STEC. L'objectif est de comparer et d'analyser les variations des STECs obtenues avec différents coefficients de corrélation intragroupe.

5. Cette méthode fait référence de la Méthode 2 mentionnée dans la section 5.3.2

### 7.4.1 Diversification et corrélation

Dans le processus de modélisation *RCR*, nous devons tenir compte de l'effet de diversification entre les différents réassureurs et également entre les deux risques.

► **Diversification entre les risques (de réserve et de souscription)**

Les risques de réserve et de souscription ne sont pas pertinents, autrement dit que la distribution des pertes totale est obtenue en additionnant les deux distributions séparées par le risque. La diversification permet de réduire l'effet négatif de la volatilité. Voici un tableau indique le montant de STEC avec l'effet de diversification entre les risques :

Montant du STEC au niveau du Groupe AXA				
en millions d'€	$\gamma = \rho$	$\gamma^* = 0,5$	$\gamma^{**} = 0,75$	$\gamma^{***} = 0,9$
STEC pour le risque de réserve	105,86	108,17	108,54	110,14
STEC pour le risque de souscription	43,56	42,56	42,81	42,68
STEC Total avec diversification par risque	149,92	151,08	151,75	152,95
Contribution de diversification (en valeur)	-0,49	-0,35	-0,40	-0,13

TABLEAU 7.4 Montant du STEC total avec diversification en risque

Une hausse du STEC pour le risque de réserve est observée quand la corrélation intragroupe augmente de  $\rho$  à 0,9 (+4%), qui domine la tendance haussière du STEC total (*yc risque de souscription*) en fonction de  $\gamma$ . La contribution de diversification des risques au STEC est négative qui peut être expliqué par le fait que le STEC total avec diversification est calculé en sommant seulement les vecteurs de  $\Delta$ BELs des deux risques. À partir de cela, le STEC total est une soustraction simple entre la valeur à quantile 99,5% et la valeur moyenne des  $\Delta$ BELs. Les deux types de risques ne sont pas corrélés entre eux. On s'attend à une contribution moins négative lorsque  $\gamma$  augmente étant donné que le portefeuille est composé en majorité d'expositions (93,1%) provenant de réassureurs initialement notés *A* et *AA*.

► **Diversification entre les réassureurs**

Un autre effet de diversification qui doit être pris en compte est l'effet de l'atténuation du risque de contrepartie en réassurance entre les réassureurs individuels. Cet effet peut avoir différentes dimensions (*voir figure 7.3*).

En partant de l'idée que chaque réassureur a sa propre distribution de pertes en cas de défaut, nous pouvons observer une évolution vers un effet de diversification basé sur le groupe de réassurance, puis sur les entités d'AXA. Dans cette évolution, l'intensité de la diversification dépend généralement du nombre de réassureurs impliqués dans une succursale donnée. En

règle générale, plus le nombre de réassureurs est élevé, plus l'effet de diversification sera important, ce qui se traduira par un STEC final inférieur à la somme des STEC des réassureurs individuels.

Dans le cadre du calcul du STEC, ce processus est réparti entre le groupe AXA et ses entités. À chaque exercice, chaque entité soumet sa propre estimation du STEC, qui est ensuite agrégée par l'équipe modèle interne P&C. Cette estimation constitue un indicateur essentiel du risque de contrepartie.

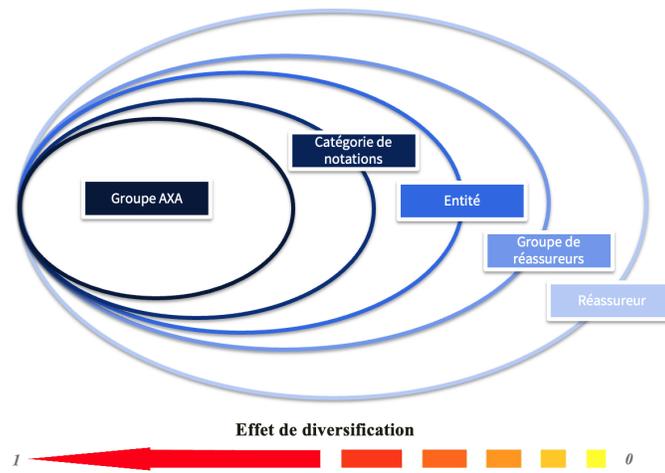


FIGURE 7.3 Type de diversification entre les réassureurs

Les trois histogrammes illustrent l'évolution du STEC total et des STECs par risque selon les types de diversification :

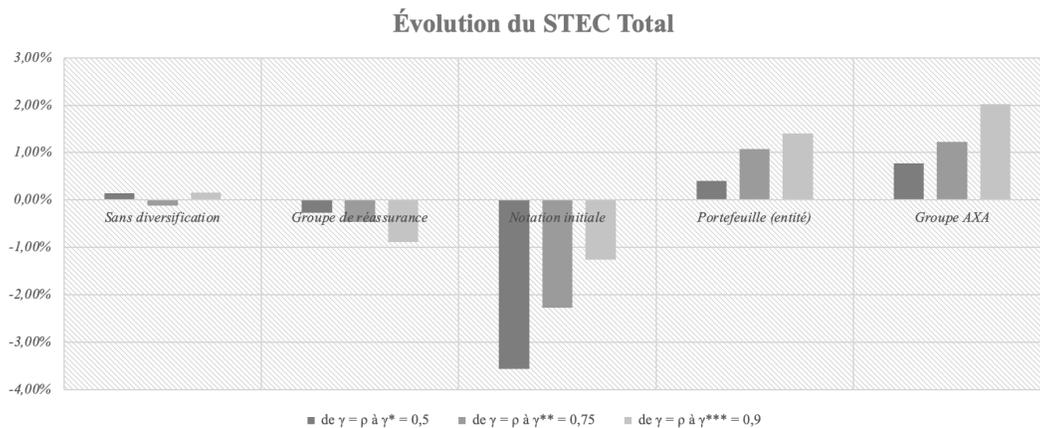


FIGURE 7.4 Évolution du STEC total avec la diversification entre les risques

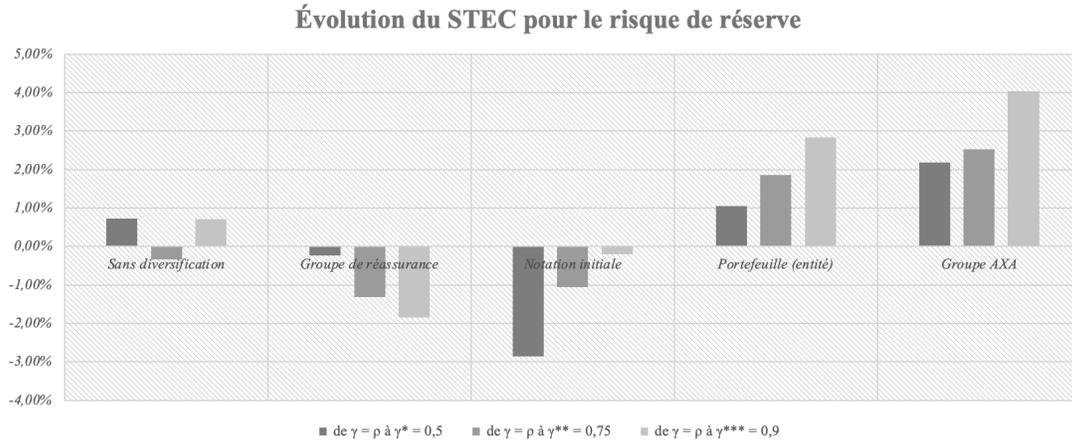


FIGURE 7.5 Évolution du STEC pour le risque de réserve

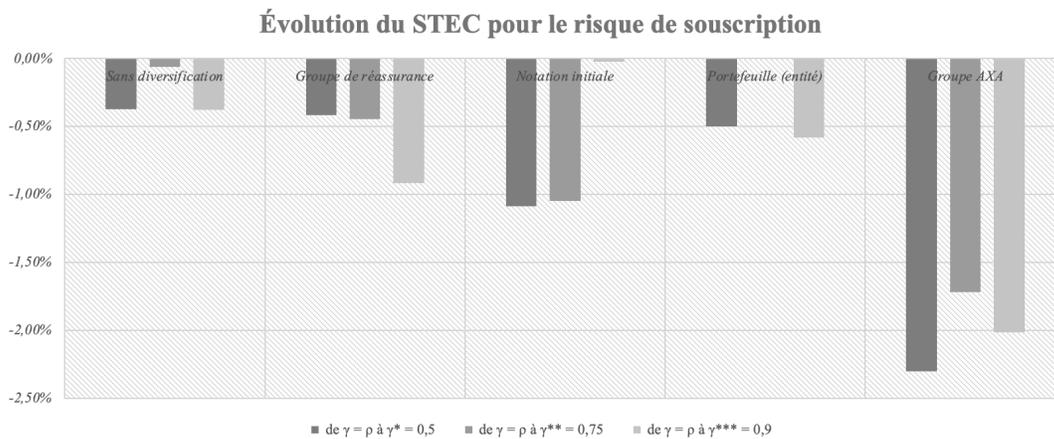


FIGURE 7.6 Évolution du STEC pour le risque de souscription

Premièrement, l'introduction de la corrélation intragroupe ne présente pas une significativité sur le résultat du STEC s'il n'y a pas d'effet de diversification entre les réassureurs. En particulier, lorsqu'on ne considère que l'effet de diversification entre les risques, l'évolution du STEC total est très stable.

La variation du STEC pour le risque de réserve joue un rôle dominant dans la variation de la STEC total, puisque 61,4% des « *reinsurance recoverables* » du portefeuille provient de ce risque. À l'exception de l'impact sur le STEC en introduisant l'effet de diversification par la notation initiale des réassureurs, qui diminue (*en valeur absolue*) lorsque  $\gamma$  augmente, les autres effets de diversification font que le STEC sont plus sensibles à une hausse de  $\gamma$ .

De toute évidence, étant donné qu'il y a une majorité de réassureurs bien notés dans le portefeuille, on considère que le STEC évolue inversement au mouvement de la notation.

Le portefeuille pour le risque de souscription présente un risque de concentration en raison de sa forte exposition au Groupe AXA. Toutefois, étant donné que les réassureurs affiliés font partie du Groupe AXA, leurs notations dépendent largement de la performance financière globale du groupe, qui est généralement bien noté. Par conséquent, une augmentation de la corrélation intragroupe entraînera logiquement une baisse du STEC pour ce risque. Néanmoins, on n'observe pas de tendance claire du STEC en fonction de  $\gamma$ , ce qui peut s'expliquer par une double volatilité présente dans le modèle pour ce risque :

1. l'exposition pour le risque de souscription d'un réassureur est calculée comme la moyenne des expositions simulées stochastiquement, de sorte que le  $\Delta BEL$  pour chaque scénario  $j$  est différent pour la  $j^{\text{ème}}$  exposition.
2. une volatilité existe toujours dans la matrice de nouvelles notes (*voir le chapitre précédent*), cela peut être réduit par la *méthode 2*.

Les *tableaux 7.5, 7.6, 7.7* indiquent les montants des STECs avec l'effet de diversification entre les réassureurs :

<i>en millions d'€</i>	STEC Total				Contribution de diversification (en %)			
	$\gamma = \rho$	$\gamma^* = 0,5$	$\gamma^{**} = 0,75$	$\gamma^{***} = 0,9$	$\gamma = \rho$	$\gamma^* = 0,5$	$\gamma^{**} = 0,75$	$\gamma^{***} = 0,9$
Sans diversification	218,03	218,33	217,77	218,38				
Groupe de réassurance	212,28	211,69	211,29	210,40	0,03	0,03	0,03	0,04
Notation initiale	171,20	165,11	167,31	169,05	0,21	0,24	0,23	0,23
Portefeuille (entité)	191,16	191,93	193,22	193,84	0,12	0,12	0,11	0,11
Groupe AXA	149,92	151,08	151,75	152,95	0,31	0,31	0,30	0,30

TABLEAU 7.5 STEC Total avec l'effet de diversification

<i>en millions d'€</i>	STEC pour le risque de réserve				Contribution de diversification (en %)			
	$\gamma = \rho$	$\gamma^* = 0,5$	$\gamma^{**} = 0,75$	$\gamma^{***} = 0,9$	$\gamma = \rho$	$\gamma^* = 0,5$	$\gamma^{**} = 0,75$	$\gamma^{***} = 0,9$
Sans diversification	156,44	157,59	155,92	157,55				
Groupe de réassurance	159,84	159,47	157,75	156,89	-0,02	-0,01	-0,01	0,00
Notation initiale	124,22	120,67	122,91	123,98	0,21	0,23	0,21	0,21
Portefeuille (entité)	111,06	112,22	113,12	114,20	0,29	0,29	0,27	0,28
Groupe AXA	105,86	108,17	108,54	110,14	0,32	0,31	0,30	0,30

TABLEAU 7.6 Run-off STEC avec l'effet de diversification

<i>en millions d'€</i>	STEC pour le risque de souscription				Contribution de diversification (en %)			
	$\gamma = \rho$	$\gamma^* = 0,5$	$\gamma^{**} = 0,75$	$\gamma^{***} = 0,9$	$\gamma = \rho$	$\gamma^* = 0,5$	$\gamma^{**} = 0,75$	$\gamma^{***} = 0,9$
Sans diversification	62,31	62,07	62,27	62,07				
Groupe de réassurance	60,96	60,71	60,69	60,40	0,02	0,02	0,03	0,03
Notation initiale	47,32	46,80	46,82	47,31	0,24	0,25	0,25	0,24
Portefeuille (entité)	80,11	79,71	80,10	79,64	-0,29	-0,28	-0,29	-0,28
Groupe AXA	43,56	42,56	42,81	42,68	0,30	0,31	0,31	0,31

TABLEAU 7.7 Underwriting STEC avec l'effet de diversification

La **contribution de diversification** ( $CD$ ) entre les réassureurs au STEC RCR est calculée par la formule suivante :

$$CD_l = \frac{STEC_{\text{sans diversification}}}{STEC_l} - 1 \quad (7.4.1)$$

Les types de diversification ( $l$ ) sont :

- Diversification par groupe de réassurance<sup>6</sup>
- Diversification par catégories de notation initiale ( $t = 0$ )
- Diversification par entité (*portefeuille 1 à 5*)
- Diversification par groupe d'AXA (*portefeuille global*)

En raison d'une répartition plus égale des expositions en risque de réserve par rapport au risque de souscription, une augmentation de  $\gamma$  peut entraîner une hausse plus prononcée du risque de contrepartie pour les groupes de réassureurs dont la distribution des notations de réassureurs est plus hétérogène. Ces réassureurs interagissent de manière plus étroite les uns avec les autres et présentent un risque plus élevé de subir une dégradation de leur notation. Bien qu'une certaine diversification entre eux soit présente, elle n'élimine pas complètement le risque de hausse du STEC posé par  $\gamma$ .

#### 7.4.2 Focus sur le risque de réserve

Dans la modélisation du risque de contrepartie pour ce sous-risque, l'exposition de chaque réassureur est déterministe qui correspond au montant inscrit au bilan. Par conséquent, pour chaque catégorie de notation, il existe un montant de  $\Delta BELs$  unique, c'est pour cette raison qu'il est plus facile de faire des tests de sensibilité sur les STECs.

En termes de portefeuille (*voir figures 7.7 et 7.8*), la variation des  $\Delta BELs$  est plus important quand le nombre de réassureurs est plus grand. Le quantile à 99,5% du  $\Delta BELs$  se déplace dans les deux sens en raison du mouvement des notations dans la matrice de nouvelles notes après l'introduction de  $\gamma$ , et la diversification entre les réassureurs fait qu'il ne dépose pas une tendance. Pourtant, l'impact sur la moyenne des  $\Delta BELs$  est plus importante lorsque  $\gamma$  augmente.

---

6. Pour être facile à comprendre. Normalement les réassureurs ne sont pas forcément les compagnies de réassurance, il existe les types de réassureurs comme les captives, les mutuelles, les IP ou les Lloyds ...

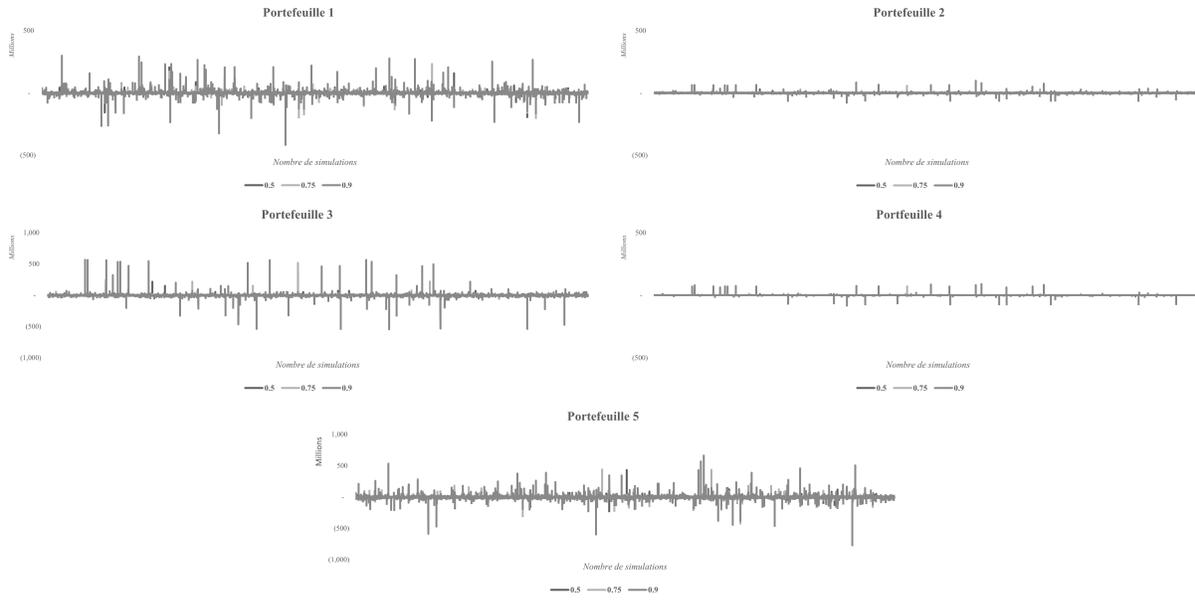


FIGURE 7.7 Volatilité du  $\Delta BEL$  des entités

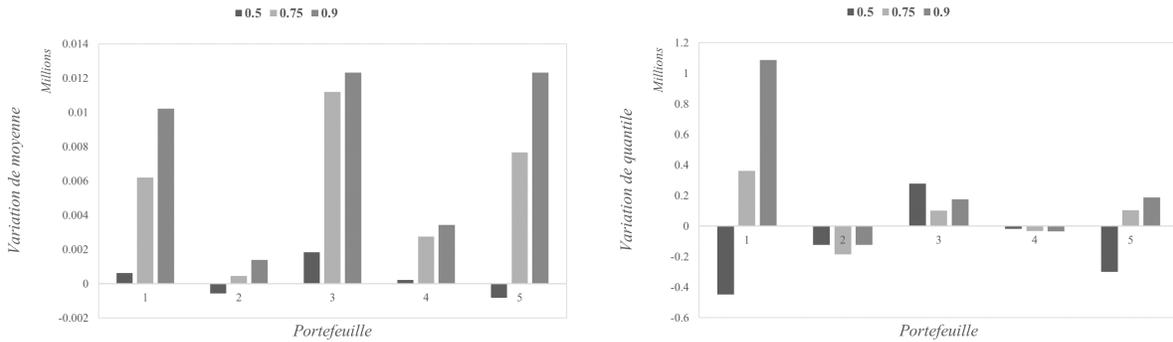


FIGURE 7.8 Les quantiles et moyennes des  $\Delta BEL$  par entité

En termes de réassureur individuel (voir tableau 7.8 et figure 7.9), il y a plus de réassureurs qui ont une migration de la notation à  $VaR_{99,5\%}$  lorsque la corrélation intragroupe monte.

Vu que le STEC est déduite de la méthode **VaR-Moyenne**, un mouvement simple de la notation à horizon un an va gravement changer le montant du STEC.

Souvent, les plus grands écarts du STEC par réassureur sur la hausse de  $\gamma$  vient de cette migration à quantile 99,5%. L'exemple est donné par un mouvement de *A* à *BBB* pour un réassureur initialement noté *AA*. Étant donné que la distribution des notes dans les scénarios simulés est différente pour chaque  $\gamma$  appliqué, cela peut provoquer potentiellement une forte augmentation sur son STEC.

De $\rho$ à	$\gamma^* = 0,5$	$\gamma^{**} = 0,75$	$\gamma^{***} = 0,9$
Nombre de réassureurs migrés	24	31	34

TABLEAU 7.8 Nombre de réassureurs migrés au quantile 99,5%

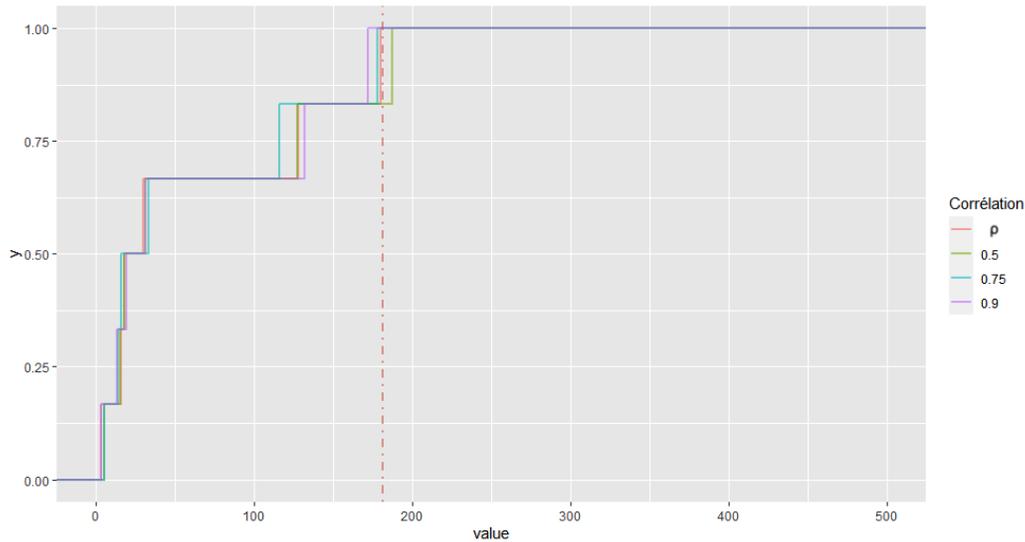


FIGURE 7.9 Exemple d'un réassureur dont la notation initiale est AA mais sa notation au quantile 99,5% a été dégradée (de A à BBB)

En termes de groupe de réassurance (*voir figures 7.10, 7.11 et tableau 7.9*), avec l'effet de diversification, les variations du STEC sont dans la plupart des cas autour de 0. On observe une plus forte variation (*en valeur absolue*) sur le STEC, surtout plus de valeurs extrêmes pour certains groupes de réassureurs quand  $\gamma$  augmente.

Pour trouver le raisonnement derrière, il est indispensable de voir la structure des notations par groupe de réassureurs. Notre objectif au cœur est de mesurer les effets intragroupes sur le STEC. Donc, il est nécessaire de mesurer l'interaction entre les différents groupes de réassurance, notamment ceux qui admet une forte variation de STEC comme les groupes 1680, 11774, 68 et 2332.

Nous allons ensuite voir en détails et expliquer les résultats trouvés.

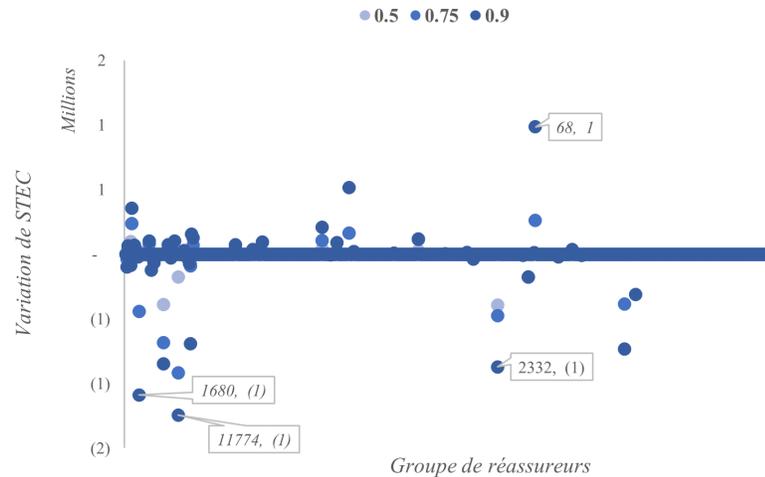


FIGURE 7.10 Variation du STEC pour le risque de réserve par groupe de réassurance

En analysant les résultats, il est observé que la plus importante augmentation du STEC provient du groupe 68, composé exclusivement de réassureurs notés en *BB*. Cette hausse peut être expliquée par le fait que ce groupe présente un degré de risque de contrepartie plus élevé, ce qui nécessite une couverture financière plus importante en STEC.

Le groupe 1680 se classe à la deuxième position en termes de baisse du montant STEC. Il s'agit d'un portefeuille comprenant uniquement des réassureurs notés en *A*, ce qui indique une stabilité financière assez élevée. Par conséquent, ce groupe peut être considéré comme solide sur le plan financier.

Groupe de réassurance	Nombre de réassureurs en AA	Nombre de réassureurs en A	Nombre de réassureurs en BB
1680		193	
946	2	5	3
11774		5	4
2332		6	1
68			4

TABLEAU 7.9 Répartition des réassureurs par notation initiale

Groupe de réassurance	Expositions	BEL ( $t = 0$ )	STEC pour le risque de réserve avec $\rho$	Ratio (STEC/Expositions)
1680	149502575	442549	2093036	1,40%
946	161282831	466391	1405301	0,87%
11774	150016628	572432	1835892	1,22%
2332	102929036	352988	1229250	1,19%
68	7297464	249403	3446681	47,23%

TABLEAU 7.10 Expositions des groupes de réassurance

Par rapport aux autres groupes de réassurance, le groupe 68 a le STEC le plus élevé, le rapport entre le STEC et l'exposition est de 47%. Même s'il a l'exposition la plus faible de

tous, en raison du fait que les quatre réassureurs qu'il comprend sont tous notés *BB*.

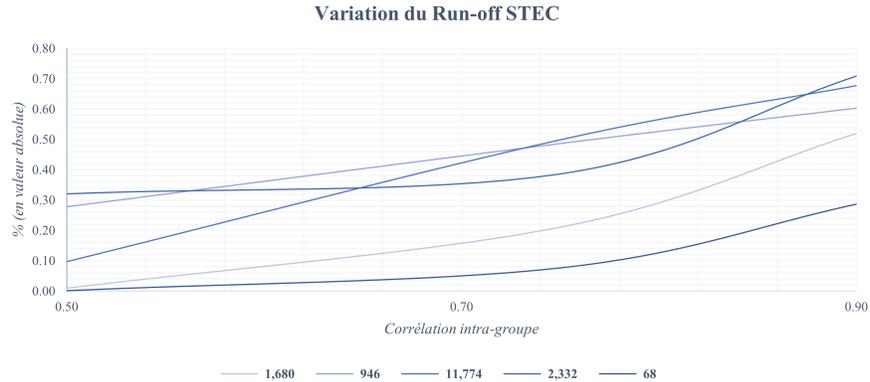


FIGURE 7.11 Variation du STEC en % des groupes de réassurance particuliers

Concernant les groupes qui ont les notations plus hétérogènes comme 946, 11774 et 2332, la variation du STEC est dans les deux sens, il existe une compensation du STEC entre les notations *A* et *BB*. Plus les notations des réassureurs affiliés sont hétérogènes, plus la variation du STEC (*en valeur absolue*) augmente quasi-linéairement.

La variation du STEC ne dépend pas uniquement de la structure des notations, elle est également très dépendante de l'importance de l'exposition en réassurance. Du point de vue de l'assureur, il sera plus susceptible de passer un contrat avec un réassureur bien noté et aura de ce fait généralement une plus grande exposition, tandis que l'assureur aura une plus petite exposition à un réassureur moins bien noté. Il est donc important de gérer les expositions et les notations des réassureurs.

En termes de taille du STEC, le groupe AXA est le deuxième plus grand groupe de réassurance figurent parmi les dix premiers, représentant respectivement 19%<sup>7</sup> et 8%<sup>8</sup> des expositions totales, le rapport entre le STEC et l'exposition est très proche de 0. La valeur du STEC est quelque peu proportionnelle à la taille de l'exposition au RCR. Le reste des groupes ayant les gros montants de STEC présentent la plupart de réassureurs dans eux une notation initiale basse.

**En conclusion**, les résultats obtenus suite à l'introduction des corrélations intragroupe  $\gamma$  pour les réassureurs dans la modélisation ont conduit à un certain nombre de réflexions.

Tout d'abord, nous pouvons conclure que le STEC devient plus sensible lorsque la corrélation intragroupe augmente, en particulier pour le risque de réserve. Pour le risque de souscription,

7. 8,9% en *A*, et 6,5% en *AA*

8. 5.01% en *AA*

il est difficile de l'examiner en détail, car l'exposition des réassureurs n'est pas unique mais plutôt une distribution générée stochastiquement. Cependant, comme le risque de réserve est la composante la plus importante du STEC total par rapport au risque de souscription, nous nous concentrons en particulier sur le STEC pour cette exposition dans la seconde moitié de la section.

Si la structure de notation au sein du groupe de réassurance est orientée vers des notations plus basses, il est certain que l'augmentation de la corrélation au sein du groupe de réassureurs entraînera un changement positif dans le STEC du groupe. Il est important de noter que, puisque le nombre de nouvelles notations est donné dans le processus de génération de la matrice de nouvelles notations, les décalages des événements de notation s'annulent mutuellement, il y a une compensation pour la migration des notations (*combien ils passent au défaut, combien ils passent à une notation plus élevée*). Alors, une augmentation de la corrélation intragroupe ne signifie pas forcément une augmentation du STEC.

En outre, un autre facteur important est l'exposition du réassureur, qui est complémentaire de la transition de la notation du réassureur sur le STEC, c'est-à-dire que si l'exposition est importante mais que la notation est élevée, il est possible que le STEC calculé ne représente également qu'environ 1% de son exposition.

L'évolution des résultats de STEC dépend largement de la structure des notations et des notations initiales des réassureurs.

En plus, la corrélation intragroupe n'est pas très représentative (*moins de 1%*) dans la matrice de corrélation que nous introduisons lorsque la simulation de la copule Gaussienne, ce qui explique que le mini effet de la variation des STEC. On s'attend à une augmentation plus élevée des STEC si l'on simule une matrice de nouvelles notations avec la copule de Student ou de Clayton grâce aux études du chapitre 6.

Cependant, en raison du manque de temps et du volume de données, nous n'avons pas pu tenter d'autres copules multivariées. L'introduction de la corrélation intragroupe est traitée en détail dans le chapitre, y compris la méthodologie des simulations et la présentation des résultats. Avec le développement du marché de la réassurance, ce sujet peut être un domaine qui sera considéré à l'avenir dans le contexte actuariel en termes de comment calculer un STEC plus approprié.

## CONCLUSION

Pour résumer, ce mémoire se compose de deux grandes parties principales.

La première partie de ce mémoire propose une présentation du cadre théorique concernant la réassurance en général, ainsi que du cadre réglementaire du secteur de la banque et de l'assurance. Avec l'introduction de Solvabilité II, les actifs de réassurance ont acquis une importance croissante, ce qui a entraîné l'obligation pour les assureurs de détenir un niveau de capital de solvabilité adéquat afin de couvrir les risques de contrepartie liés aux réassureurs.

Dans la deuxième partie, nous expliquons l'approche de modélisation interne du risque de contrepartie de la réassurance. Le modèle est subdivisé en trois sous-parties.

Premièrement, nous avons tenté de réduire la volatilité implicite dans le modèle interne actuel. L'objectif de cette sous-partie est de trouver une méthode de corrélation pour stabiliser les résultats du STEC. Cette méthode sera utilisée dans la modélisation de la corrélation entre les réassureurs. Elle consiste à calculer le STEC pour chaque bloc en appliquant la méthode de Monte-Carlo et en trouvant le coefficient de corrélation linéaire le plus proche des hypothèses sous-jacentes du modèle.

La deuxième sous-partie se concentre sur l'utilisation de fonctions de copules multivariées pour mesurer plus finement la structure de dépendance entre les réassureurs. Les propriétés du portefeuille de réassurance peuvent être résumées en risque de concentration et de dégradation de la notation. Par conséquent, au-delà de la copule Gaussienne, trois copules supplémentaires capturant la dépendance de queue (*copule de Student, copule de Clayton et copule de Gumbel*) ont été choisies. Il s'avère que le STEC calculé par les copules ayant la distribution de queue est plus élevé que les résultats du modèle existant aujourd'hui. Cela est logique puisque la corrélation de défaut entre les réassureurs est plus élevée.

La dernière partie consiste à modéliser la corrélation entre les réassureurs appartenant à un même groupe des réassureurs. Nous avons distingué deux types de réassureurs : **intragroupes** et **intergroupes**. Nous avons donné aux réassureurs ces deux corrélations afin de générer une matrice de nouvelles notations. Le test de sensibilité sur le STEC reflète une augmentation plus importante lorsque cette corrélation intragroupe est plus grande.

Le processus de calibrage du modèle présente un certain nombre de limites.

Du côté opérationnel, lorsqu'on essaie de stabiliser le STEC en utilisant la *méthode 2*, il est difficile d'aller au-delà de 10 itérations sous la contrainte informatique. Surtout, le calcul est

long alors que le process pour la collection des données de réassurance est court. Deuxièmement, il n'y a pas assez de données historiques. La construction du modèle nécessite beaucoup de conseils d'experts, par exemple, la sélection de la copule optimale pour représenter la corrélation entre les réassureurs intergroupes. Enfin, l'introduction de la corrélation intragroupe entre les réassureurs en tant que point innovant se heurte également au problème du manque de grandes quantités de données.

Toutefois, la modélisation connaît de nombreuses perspectives.

L'approche adoptée pour réduire la volatilité du STEC et les initiatives de modélisation des corrélations intergroupe et intragroupe des réassureurs ont considérablement amélioré le modèle. En termes d'exigences globales de solvabilité, il permet à AXA de calculer plus justement le capital de solvabilité RCR sous Solvabilité II. En outre, la modélisation vise à rendre les résultats du STEC plus prudents en modifiant les hypothèses de corrélation du modèle.

En réponse au Pilier II (*Évaluation interne des risques et de la solvabilité*), nous avons cherché une technique de modélisation qui conviendrait mieux à la structure du portefeuille d'AXA. Nous avons pris en compte des facteurs inhérents qui peuvent expliquer le RCR, par exemple, une corrélation de défaut plus forte était utilisée pour générer la distribution des notations des réassureurs sur l'horizon de projection. Cela permet d'étudier et de quantifier l'impact des chocs de corrélation sur les besoins en capital. Autrement dit, il complète le modèle interne actuel en donnant un aperçu de la sensibilité de cette corrélation aux bilans prudentiels.

L'inclusion de variables entièrement nouvelles dans l'évaluation du RCR à des fins de capital de solvabilité apporte une nouvelle vision à AXA, en représentant mieux son profil de risque et en élargissant les circonstances dans lesquelles le modèle peut être utilisé. Ce mémoire montre comment la modélisation a été réalisée. L'impact de la corrélation intragroupe sur le STEC du portefeuille d'AXA dans différents scénarios a été présenté. En conséquence, si cette corrélation est prise en compte, l'équipe sera en mesure de mettre en œuvre le modèle construit aujourd'hui.

Parallèlement, pour aller plus loin, l'estimation de la corrélation intragroupe peut tenir compte de facteurs macroéconomiques tels que la situation géographique des réassureurs, le PIB historique de différents pays ou des indices boursiers historiques représentatifs. À l'aide de ces variables, nous prévoyons la corrélation des défauts dans le temps. Ces éléments ne sont pas présentés dans ce mémoire, mais ils pourraient être inclus comme point de référence à l'avenir. La corrélation entre les réassureurs est un sujet complexe qui doit faire l'objet de recherches permanentes et être tenue à jour.

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1	Probabilité moyenne pluriannuelle de défaut des entreprises mondiales du secteur de l'assurance (1981-2021) selon S&P . . . . .	15
Tableau 2.2	Catégories des notations de la solidité financière ( <i>Source : Munich Re</i> )	18
Tableau 3.1	La relation entre les mesures de dépendance selon type de copule . . .	35
Tableau 3.2	Dépendance de queue selon le type de copule . . . . .	36
Tableau 4.1	Exemple des probabilités de défaut cumulées et stressées par l'approche de choc commun . . . . .	47
Tableau 4.2	Matrice de transition stressée (en %) pour $j^{\text{ème}}$ scénario . . . . .	48
Tableau 4.3	Génération de la nouvelle note sachant la note initiale . . . . .	49
Tableau 5.1	Répartition des notations et des expositions (en millions d'€) du portefeuille . . . . .	50
Tableau 5.2	Statistiques descriptives des LGD . . . . .	51
Tableau 5.3	Écart de l'estimation du STEC (en millions d'€) par la méthode de Monte-Carlo . . . . .	53
Tableau 5.4	Résultats du STEC pour le risque de réserve . . . . .	57
Tableau 5.5	Résultats du STEC pour le risque de souscription . . . . .	57
Tableau 5.6	Résultats du STEC avec la diversification entre les risques . . . . .	57
Tableau 5.7	Ratio (Run-off STEC / Exposition) moyen et total des réassureurs du portefeuille . . . . .	59
Tableau 6.1	Les valeurs des paramètres et la corrélation de la queue . . . . .	67
Tableau 6.2	Copule Gaussienne vs. Copule de Student à $v = 5$ . . . . .	70
Tableau 6.3	Copule Gaussienne vs. Copule de Clayton à $\theta = 0,405$ . . . . .	71
Tableau 6.4	Copule Gaussienne vs. Copule de Gumbel-Hougaard à $\theta = 1,2$ . . . . .	71
Tableau 6.5	Notations des réassureurs à VaR 99,5% dans le portefeuille . . . . .	72
Tableau 6.6	Comparaison des probabilités de défaut par notation et par copule . . .	72
Tableau 6.7	Statistiques descriptives du BEL Total par copule . . . . .	73
Tableau 7.1	Répartition des expositions par risque et par groupe de réassurance .	79
Tableau 7.2	Répartition des expositions par risque et par groupe de réassurance .	79
Tableau 7.3	Exemple de la matrice de corrélation avec l'introduction de l'effet intragroupe . . . . .	81
Tableau 7.4	Montant du STEC total avec diversification en risque . . . . .	82
Tableau 7.5	STEC Total avec l'effet de diversification . . . . .	85
Tableau 7.6	Run-off STEC avec l'effet de diversification . . . . .	85



Tableau 7.7	Underwriting STEC avec l'effet de diversification . . . . .	85
Tableau 7.8	Nombre de réassureurs migrés au quantile 99,5% . . . . .	88
Tableau 7.9	Répartition des réassureurs par notation initiale . . . . .	89
Tableau 7.10	Expositions des groupes de réassurance . . . . .	89

## LISTE DES FIGURES

Figure 0.1	Résumé de la modélisation du risque de contrepartie en réassurance . . . .	viii
Figure 0.2	Résultats des STECs par copule . . . . .	xi
Figure 0.3	Variation (en %) du STEC passant de $\gamma = \rho$ à $\gamma^* = 0,5$ , $\gamma^{**} = 0,75$ et $\gamma^{***} = 0,9$ . . . . .	xiii
Figure 0.4	Summary of reinsurance counterparty risk modeling . . . . .	xvi
Figure 0.5	STEC results for chosen copula . . . . .	xix
Figure 0.6	Variation (%) in STEC from $\gamma = \rho$ à $\gamma^*$ , $\gamma^{**}$ et $\gamma^{***}$ . . . . .	xx
Figure 1.1	Relation entre assureur et réassureur . . . . .	5
Figure 2.1	Risques spécifiques aux compagnies d'assurance . . . . .	12
Figure 2.2	Facteurs qualitatifs et quantitatifs pour l'attribution d'une note FSR ( <i>Source : AM Best</i> ) . . . . .	17
Figure 2.3	Passage de Solvabilité I à Solvabilité II . . . . .	22
Figure 3.1	Nuage de points d'une copule Gaussienne en dimension 3 . . . . .	29
Figure 3.2	Nuage de points de copule de Student ( $\nu = 5$ ) en dimension 3 . . . . .	31
Figure 3.3	Comparaison des copules elliptiques avec $\rho = 0,5$ . . . . .	31
Figure 3.4	Nuage de points de copule de Clayton en dimension 3 . . . . .	33
Figure 3.5	Nuage de points de copule de Gumbel en dimension 3 . . . . .	33
Figure 4.1	Présentation du capital économique . . . . .	38
Figure 4.2	Explication du modèle RCR interne . . . . .	39
Figure 4.3	Probabilité de défaut en fonction du choc commun . . . . .	41
Figure 4.4	Distribution du facteur de risque . . . . .	42
Figure 4.5	Bilan économique dans le modèle de Merton . . . . .	43
Figure 4.6	Présentation d'une matrice de seuils . . . . .	46
Figure 4.7	Distribution de nouvelles notations à $t = 1$ . . . . .	49
Figure 5.1	Exemple des probabilités de défaut pendant 60 ans . . . . .	51
Figure 5.2	Distribution de nouvelles notations par catégorie en fonction de la dimension ( <i>nombre de réassureurs</i> ) . . . . .	52
Figure 5.3	Évolution du STEC RCR en fonction de la dimension . . . . .	53
Figure 5.4	Processus de sélection d'une matrice de seuils . . . . .	54
Figure 5.5	Processus de sélection d'une matrice de seuils par bloc . . . . .	56
Figure 5.6	Montant du STEC par méthode et par risque . . . . .	58
Figure 5.7	Ratio (Run-off STEC / Exposition) par catégorie de notation et par méthode . . . . .	59

Figure 6.1	La relation entre $\theta_{Clayton}$ et les coefficients de corrélation $(\rho, \rho_s, \tau)$ . . .	65
Figure 6.2	La relation entre $\theta_{Gumbel}$ et les coefficients de corrélation $(\rho, \rho_s, \tau)$ . . .	66
Figure 6.3	Nuage de points de la copule : (a) <i>Gaussienne</i> , (b) <i>Student</i> , (c) <i>Clayton</i> , (d) <i>Gumbel</i> . . . . .	68
Figure 6.4	Densité de la copule : (a) <i>Gaussienne</i> , (b) <i>Student</i> , (c) <i>Clayton</i> , (d) <i>Gumbel</i> . . . . .	68
Figure 6.5	Nuage de points de la copule : (a) <i>Gaussienne</i> , (b) <i>Student</i> , (c) <i>Clayton</i> , (d) <i>Gumbel</i> entre les notations A et BBB . . . . .	69
Figure 6.6	Statistiques descriptives de la matrice de nouvelles notes . . . . .	70
Figure 6.7	Queue de distribution des BELs avec diversification entre les réassu- reurs et les risques . . . . .	74
Figure 6.8	Évolution du STEC total par notation en % . . . . .	75
Figure 7.1	Répartition des expositions par entité et par risque . . . . .	79
Figure 7.2	Les top 10 expositions des groupes de réassurance pour le risque de réserve à <i>gauche</i> , le risque de souscription à <i>droite</i> . . . . .	80
Figure 7.3	Type de diversification entre les réassureurs . . . . .	83
Figure 7.4	Évolution du STEC total avec la diversification entre les risques . . .	83
Figure 7.5	Évolution du STEC pour le risque de réserve . . . . .	84
Figure 7.6	Évolution du STEC pour le risque de souscription . . . . .	84
Figure 7.7	Volatilité du $\Delta BEL$ des entités . . . . .	87
Figure 7.8	Les quantiles et moyennes des $\Delta BEL$ par entité . . . . .	87
Figure 7.9	Exemple d'un réassureur dont la notation initiale est AA mais sa no- tation au quantile 99,5% a été dégradée (de A à BBB) . . . . .	88
Figure 7.10	Variation du STEC pour le risque de réserve par groupe de réassurance	89
Figure 7.11	Variation du STEC en % des groupes de réassurance particuliers . . .	90
Figure .12	Distribution des BELs avec diversification entre les réassureurs et les risques . . . . .	xxxiii
Figure .13	Distribution des BELs pour le risque de réserve . . . . .	xxxiv
Figure .14	Distribution des BELs pour le risque de souscription . . . . .	xxxv

## BIBLIOGRAPHIES

- [1] “« CEIOPS’ Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II : SCR standard formula - Counterparty default risk module »,” 2009.
- [2] “Rapport Financier Annuel 2022 d’AXA.” [En ligne]. Disponible : <https://www.axa.com/fr/investisseurs/rapports-annuels-et-semestriels>
- [3] “Rapport sur la solvabilité et la situation financière du Groupe AXA.” [En ligne]. Disponible : <https://www.axa.fr/configuration-securite/informations-financieres.html>
- [4] R. Bulmer *et al.*, “Reinsurance bad debt provisions for general insurance companies,” *General Insurance Research Organising Committee*, 2000.
- [5] M. Flower *et al.*, “Reinsurance counterparty credit risks,” *GIRO Working Group, The Institute of Actuaries (UK)*, 2007.
- [6] R. Sachs, *Reinsurance Credit Risk*, 01 2009, p. 267–285.
- [7] S. Britt et Y. Krvavych, “Reinsurance credit risk modelling,” dans *Proceedings of the 2009 Astin Conference*, 2009.
- [8] P. Ter Berg, “Portfolio modelling of counterparty reinsurance default risk,” *Life & Pensions*, 4 : 29, vol. 33, 2008.
- [9] “« DIRECTIVE 2009/138/CE DU PARLEMENT EUROPÉEN ET DU CONSEIL du 25 novembre 2009 »,” 2009. [En ligne]. Disponible : <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/PDF/?uri=CELEX:32009L0138&from=sv>
- [10] C. Bernard et M. Ludkovski, “Impact of counterparty risk on the reinsurance market,” *North American Actuarial Journal*, vol. 16, n°. 1, p. 87–111, 2012.
- [11] M. den Boer et G. Brida, “Reinsurance in the ORSA,” *Actuaris-Bulletin van het Actuariel Genootschap*, vol. 20, n°. 1, p. 22, 2012.
- [12] B. Belkin, S. Suchower et L. Forest, “A one-parameter representation of credit risk and transition matrices,” *CreditMetrics monitor*, vol. 1, n°. 3, p. 46–56, 1998.
- [13] S. Trueck et S. T. Rachev, *Rating based modeling of credit risk : theory and application of migration matrices*. Academic press, 2009.
- [14] C.-Y. Lee, “The relationship between insurer solvency and reinsurance : evidence from the taiwan property-liability insurance industry,” *International Journal of Financial Services Management*, vol. 9, n°. 2, p. 187–205, 2018.

- [15] D. Lakdawalla et G. Zanjani, “Catastrophe bonds, reinsurance, and the optimal collateralization of risk transfer,” *The Journal of Risk and Insurance*, vol. 79, n<sup>o</sup>. 2, p. 449–476, 2012. [En ligne]. Disponible : <http://www.jstor.org/stable/23250670>
- [16] M. Bruche et C. González-Aguado, “Recovery rates, default probabilities, and the credit cycle,” *Journal of Banking Finance*, vol. 34, n<sup>o</sup>. 4, p. 754–764, 2010, INTERACTION OF MARKET AND CREDIT RISK. [En ligne]. Disponible : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426609000806>
- [17] O. Burkart, “Are there comovements in the default risk of reinsurance companies?” 06 2007.
- [18] M. Lyra, A. Onwunta et P. Winker, “Threshold accepting for credit risk assessment and validation,” *Journal of Banking Regulation*, vol. 16, 01 2010.
- [19] S. Emmer et D. Tasche, “Calculating credit risk capital charges with the one-factor model,” *Journal of Risk*, vol. 7, p. 2005, 03 2005.
- [20] Standard & Poor’s, “« Annual Global Corporate Default and Rating Transition Study »,” 2011.
- [21] —, “« Annual Global Corporate Default And Rating »,” 2021.
- [22] —, “« Global Reinsurance Highlights 2011 Edition »,” 2011. [En ligne]. Disponible : <https://insurance.maryland.gov/Consumer/Coastal%20Hearings/exhibit253.pdf>
- [23] M. Hofert *et al.*, *Elements of copula modeling with R*. Springer, 2018.
- [24] H. Albrecher, J. Beirlant et J. L. Teugels, *Reinsurance : actuarial and statistical aspects*. John Wiley & Sons, 2017.
- [25] D. B. de Filiquier, “Modélisation du risque de contrepartie sur les réassureurs,” 2016.
- [26] Q. Favre, “Le risque de contrepartie dans les pools de coréassurance,” 2019.
- [27] T. Dhalluin, “Recherche d’amélioration de la solvabilité par la mise en place de réassurance intragroupe sous solvabilité 2 (application à la formule standard en assurance de personnes),” 2017.
- [28] I. Burr, “Impact d’un dispositif de réassurance non-proportionnelle sur le risque de réserve,” 2015.
- [29] A. Charpentier, “Copules et risques corrélés,” *Journées d’Etudes Statistique*, 2010.
- [30] B. Schweizer et E. F. Wolff, “On nonparametric measures of dependence for random variables,” *The annals of statistics*, vol. 9, n<sup>o</sup>. 4, p. 879–885, 1981.
- [31] A. CHARPENTIER, “« Actuariat IARD - Hiver 2013 Actuariat IARD - ACT2040 Partie 8 - réassurance »,” 2013.



- [32] P. Lacoste, “Cours Risk management et réassurance - ENSAE,” 2022.
- [33] A. Skalli, “Cours Mesures des risques et théories des copules - Université Panthéon-Assas,” 2020.

## ANNEXES

### A Calcul du SCR de contrepartie selon le type d'expositions (Conseil du CEIOPS en 2009 [1])

#### A.1 Calcul du SCR de contrepartie pour les expositions 1

La formule est la suivante :

$$SCR_{def,1} = \min \left( \sum_i LGD_i; q \times \sqrt{V} \right)$$

$$V = \sum_j \sum_k u_{jk} \times y_j \times y_k + \sum_j v_j \times z_j - \left( \sum_j w_j \times y_j \right)^2, \quad y_j = \sum_i LGD_i \text{ et } z_j = \sum_i (LGD_i)^2$$

Avec :

- $LGD_i$  : Loss-given-default pour les expositions de type 1
- $q$  : le facteur du risque, il est défini comme :

$$q = \begin{cases} 3 & \text{si } \sqrt{V} \leq \sum_i LGD_i \\ 5 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $V$  : la variance de la distribution des pertes pour les expositions du type 1,  $j$  et  $k$  sont les classements des notations,  $u_{jk}$ ,  $w_j$ , et  $v_j$  sont des paramètres fixés qui ne dépendent que les notations.<sup>9</sup>

#### A.2 Calcul du SCR de contrepartie pour les expositions 2

La formule est la suivante :

$$SCR_{def,2} = x \times E + y \times E_{\text{past-due}}$$

Avec :

- $x$  : facteur de risque pour les expositions de type 2, il est un nombre fixé qui ne dépend pas de probabilité de défaut des contreparties, ni de volume des expositions. Si  $T$  est supérieur à 3 mois,  $x = 15\%$
- $E$  : la somme des expositions de type 2 à l'exception des créances sur intermédiaires dont l'échéance est supérieure à  $T$  mois

---

9. La démonstration de la formule de  $V$  est dans l'annexe A du dossier CEIOPS P55



- $y$  : facteur de risque pour les créances sur intermédiaires. Si  $T$  est supérieur à 3 mois,  
 $y = 90\%$
- $E_{past-due}$  : la somme des valeurs des créances sur intermédiaires

## B Modèle à un facteur

Le modèle d'un seul facteur développé par *Belkin et al. (1998)* [12] est basé sur la valuation des actifs de la firme. Il est avantageux dans la mesure où il présente une structure de dépendance simple et, il est facile d'appliquer et de modéliser le risque de crédit.

Ce modèle est une extension de **CreditMetrics** (*Gupton, Finger et Bhatia (1997)*), il pose une variable aléatoire  $A$  qui permet de refléter la transition de la notation d'une contrepartie en décomposant en deux parties :

- $M$  lié au risque idiosyncratique de la contrepartie lui-même qui explique le changement de sa valeur des actifs,
- $G$  lié au risque systémique subi par toutes les contreparties dans le marché.

$$A_{i,t} = \sqrt{\rho}G_t + \sqrt{1 - \rho}M_{i,t} \quad (\text{B.1})$$

Avec  $G_t$  et  $M_{i,t} \sim N(0, 1)$ , elles sont indépendantes entre elles, et  $\rho$  représente la corrélation de l'actif qui mesure le degré d'exposition du  $i_{\text{ème}}$  actif au risque systématique exprimé par  $G$ ,  $\sqrt{\rho}G_t$  est donc l'exposition de la contrepartie vis-à-vis du choc commun.

La probabilité de passage de la notation initiale ( $K$ ) à une nouvelle note ( $R$ ) est définie par :

$$\Pr(K \rightarrow R | A_{i,t}) = \Phi\left(\frac{A_{i,t}^{R+1} - \sqrt{\rho}G_t}{\sqrt{1 - \rho}}\right) - \Phi\left(\frac{A_{i,t}^R - \sqrt{\rho}G_t}{\sqrt{1 - \rho}}\right)$$

En supposant que la corrélation  $\rho$  soit positive, si  $G$  est inférieur à 0, cela veut dire que les conditions économiques sont mauvaises, alors  $A$  est plus petit, les contreparties sont plus susceptibles de faire défaut et les notations sont plus susceptibles de baisser.

## C Démonstration de la corrélation $\rho$

Il faut démontrer que toutes les paires de  $A_i$  sont corrélés avec  $\rho$  :

$$\rho_{i,i+1} = \frac{Cov(A_i, A_{i+1})}{\sigma_{A_i} \sigma_{A_{i+1}}} = \rho$$

Commençons par le calcul de la covariance,

$$\begin{aligned} Cov(A_i, A_{i+1}) &= E \left[ \left( \sqrt{\rho} G + \sqrt{1-\rho} M^i \right) \left( \sqrt{\rho} G + \sqrt{1-\rho} M^{i+1} \right) \right] \\ &= E \left[ \rho G^2 + \sqrt{1-\rho} \sqrt{\rho} G M^i + \sqrt{1-\rho} \sqrt{\rho} G M^{i+1} + (1-\rho) M^i M^{i+1} \right] \\ &= \rho E[G^2] + \sqrt{1-\rho} \sqrt{\rho} E[G] E[M^{i+1} + M^i] + (1-\rho) E[M^i] E[M^{i+1}] \\ &= \rho Var[G] + 0 + 0 = \rho \end{aligned}$$

Car  $G \sim N(0, 1)$ ,  $E[G^2] = Var[G] = 1$ ,  $E[G] = 0$ . Et  $M^i$  est indépendant de  $M^{i+1}$ ,  $M^i \sim N(0, 1)$ .

Ensuite, le dénominateur est :

$$\begin{aligned} \sigma_{A_i} \sigma_{A_{i+1}} &= \sqrt{Var(\sqrt{\rho} G + \sqrt{1-\rho} M^i)} \sqrt{Var(\sqrt{\rho} G + \sqrt{1-\rho} M^{i+1})} \\ &= \sqrt{E[\rho G^2 + 2\sqrt{\rho}\sqrt{1-\rho} M^i + (1-\rho) M^{i2}]} \sqrt{E[\rho G^2 + 2\sqrt{\rho}\sqrt{1-\rho} M^{i+1} + (1-\rho) M^{i+12}]} \\ &= \sqrt{\rho E[G] + 2\sqrt{\rho}\sqrt{1-\rho} E[M^i] + (1-\rho) E[M^{i2}]} \sqrt{\rho E[G] + 2\sqrt{\rho}\sqrt{1-\rho} E[M^{i+1}] + (1-\rho) E[M^{i+12}]} \\ &= \sqrt{\rho E[G^2] + (1-\rho) E[M^{i2}]} \sqrt{\rho E[G^2] + (1-\rho) E[M^{i+12}]} \\ &= \rho + (1-\rho) = 1 \end{aligned}$$

Donc, on démontre que :

$$\rho_{i,i+1} = \rho / (\rho + (1-\rho)) = \rho$$

## D Distributions des BELs en fonction du risque

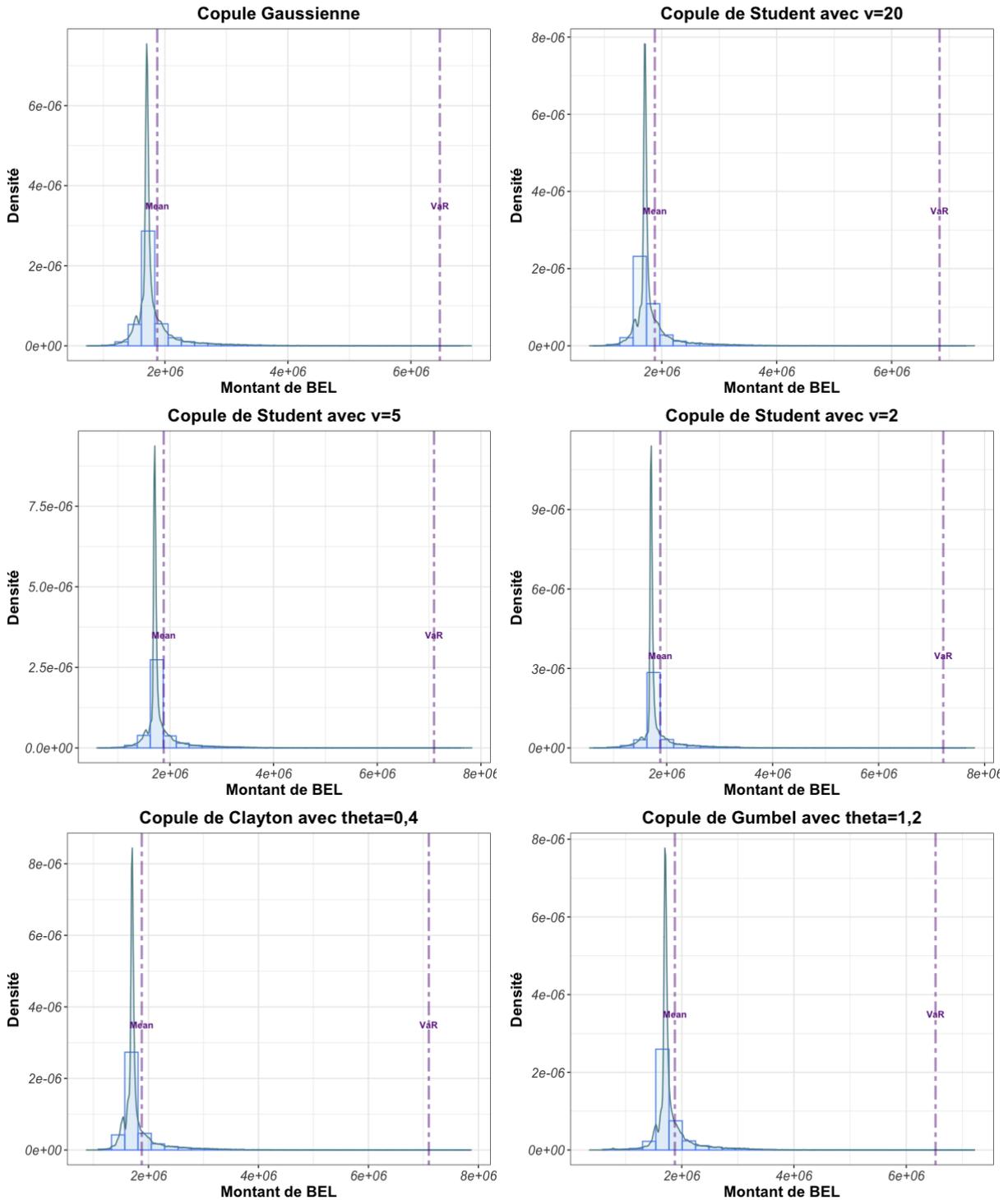


FIGURE .12 Distribution des BELs avec diversification entre les réassureurs et les risques

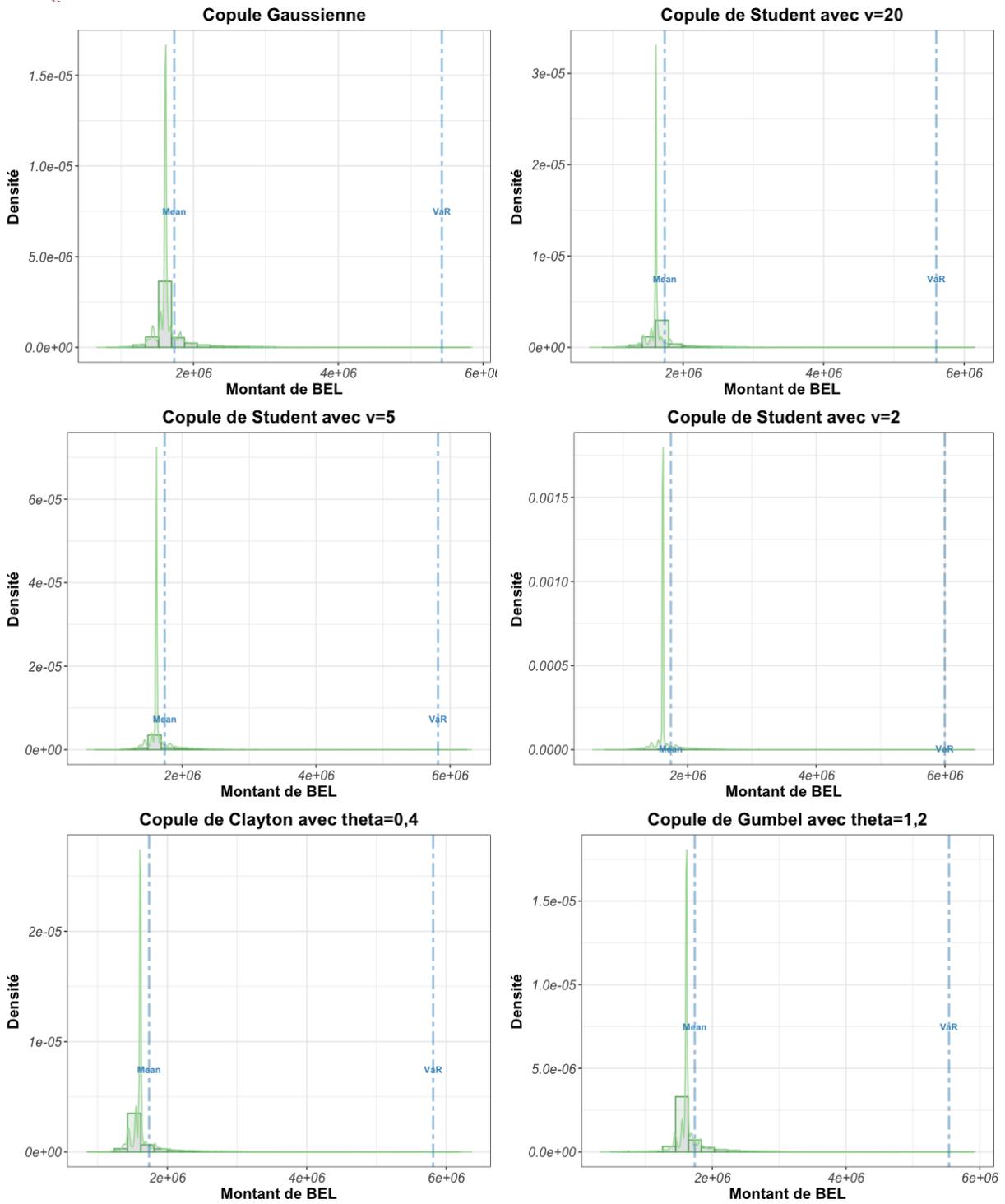


FIGURE .13 Distribution des BELs pour le risque de réserve

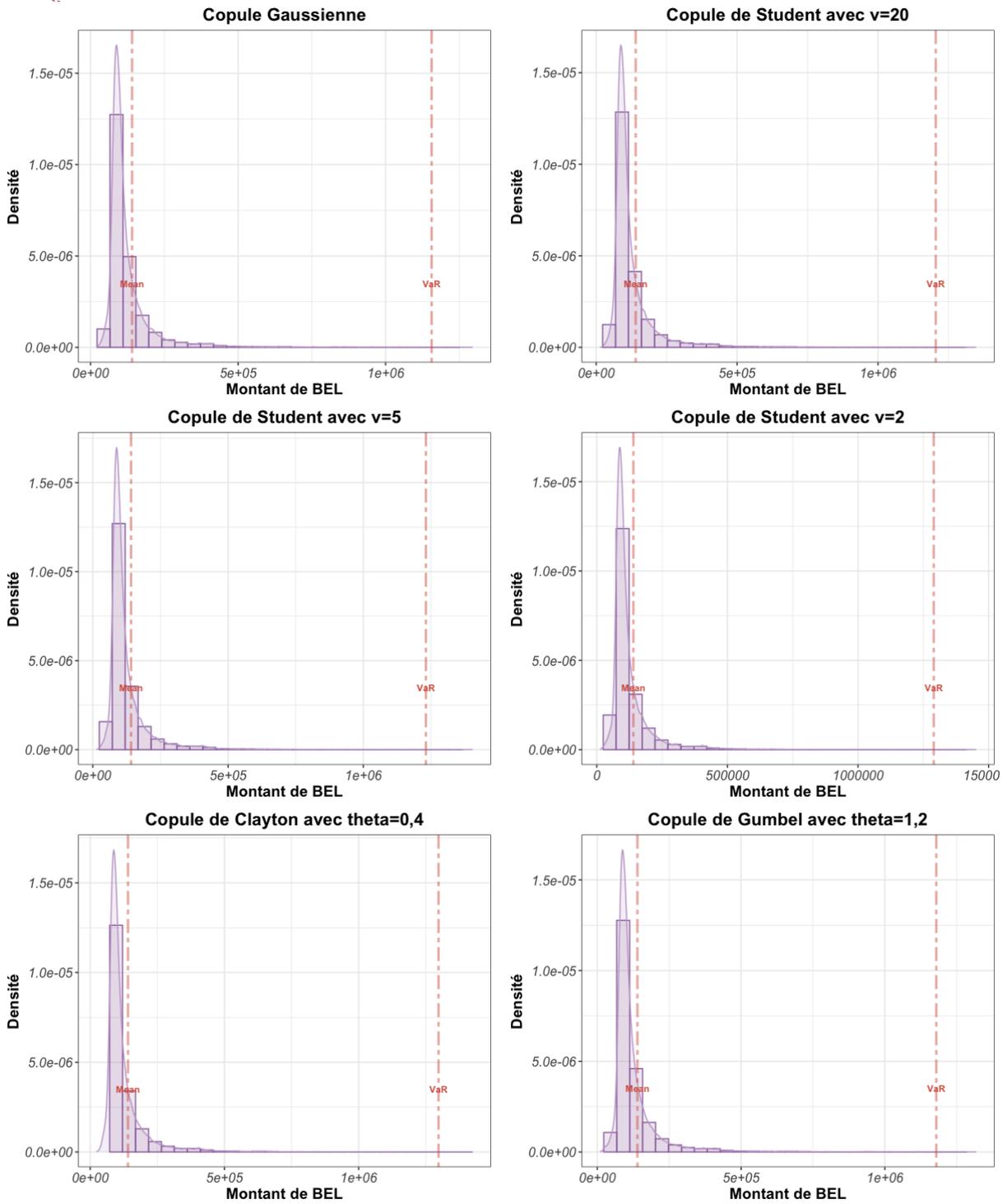


FIGURE .14 Distribution des BELs pour le risque de souscription