



Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du
Diplôme d'Actuaire EURIA
et de l'admission à l'Institut des Actuares

le 20 Septembre 2024

Par : Mohamed BADI

Titre : Étude de quelques extensions du LIBOR Market Model : Intégration dans le cadre
d'un Générateur de Scénarios Économiques risque-neutre

Confidentialité : Non

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

**Membre présent du jury de l'Institut
des Actuares :**

Faris ROUCHATI

Youssef Seyba DEMBELE

Signature :

Entreprise :

MILLIMAN

Signature :

Membres présents du jury de l'EURIA :

Rainer BUCKDAHN

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Mohammed BENNOUNA

Signature :

Invité :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion
de documents actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

Résumé

Le cadre réglementaire Solvabilité II impose aux assureurs d'évaluer leurs actifs et passifs en valeur de marché, dans le cadre de ce qu'on appelle la *market-consistency*. Cette méthode d'évaluation, dite en *juste valeur*, est justifiée par la présence d'options et de garanties embarquées dans le passif de l'assureur. De ce fait, le calcul du *Best Estimate* requiert l'utilisation d'un Générateur de Scénarios Économiques risque-neutre.

Le risque de taux d'intérêt est un élément essentiel dans l'évaluation du *Best Estimate*, car il permet entre autres, de décrire la valeur temps des engagements futurs pris par l'assureur. De ce fait, sa modélisation est d'une grande importance pour l'assureur. Une compréhension approfondie de ces modèles est donc indispensable pour son activité.

L'objet de notre mémoire s'inscrit dans ce cadre. Deux extensions du modèle LIBOR Market (LMM) ont été étudiées : le modèle DDLMM avec shift paramétrique et le DDLMM avec paramètres incertains (DDLMMUP), tout en cherchant à combler les limites de ce dernier, notamment en ce qui concerne la réplication du *smile* de volatilité.

En plus de l'étude théorique du modèle, nous avons porté tout au long de notre travail une attention particulière au calibrage, en présentant soigneusement les méthodologies appliquées dans le but de comprendre le comportement de nos modèles dans différents contextes économiques. De ce fait, plusieurs études ont été menées telles que le calibrage sur des données d'exercices différents et l'objectivation des paramètres embarqués des modèles.

Enfin, nous avons testé nos modèles en réalisant plusieurs sensibilités, tout en anticipant les impacts pour l'assureur dans les différents cas. Les tests de validation de martingalité et de *market-consistency* ont également été réalisés, avec une attention particulière portée à certains phénomènes observés tels que l'explosivité des trajectoires diffusées.

Mots clefs: Solvabilité II, Générateur de Scénarios Économiques (GSE), Risque-neutre, Instruments financiers, *market-consistency*, Modèles de taux, *Libor Market Model*, Paramètres incertains, Shift paramétrique, Calibrage, Diffusion, Réplication, *Smile de volatilité*, *Skew de volatilité*, Taux Libor forward, Martingalité, Corrélation, Tests de validation, *juste valeur*

Abstract

The Solvency II regulatory framework requires that the assets and liabilities on the balance sheet be valued at market value, within the framework of what is called *market-consistency*. This valuation method, known as *fair value*, is motivated by the presence of embedded options and guarantees in the insurer's liabilities. Consequently, calculating the *Best Estimate* requires the use of a risk-neutral Economic Scenario Generator.

The interest rate risk is a crucial factor in the evaluation of the *Best Estimate*, as it helps to describe, among other things, the time value of the insurer's future obligations. Therefore, modeling this risk is paramount to the insurer. A thorough understanding of these models is essential for the insurer's operations.

The purpose of our dissertation is aligned with this context. Two extensions of the LIBOR Market Model (LMM) were studied : the DDLMM model with parametric shift and the DDLMM with uncertain parameters (DDLMMUP), while attempting to address the limitations of the latter, particularly regarding the replication of the volatility smile.

In addition to the theoretical study of the models, we have devoted particular attention throughout our work to the calibration process, providing detailed descriptions of the methodologies employed in order to gain a comprehensive understanding of the model's behavior and its interaction with various economic frameworks. Therefore, several studies were conducted, such as calibration on data from different years and the objectification of the models' embedded parameters.

Finally, we tested our models across different sensitivities, the results of which allowed us to make predictions about the impacts on the insurer in various scenarios. Martingale validation tests and *market-consistency* tests were also performed, with particular attention given to certain observed phenomena, such as the explosiveness of the diffused trajectories.

Keywords: Solvency II, Economic Scenario Generator (ESG), Risk-neutral, Financial instruments, *market-consistency*, Interest rate models, *Libor Market Model*, Uncertain parameters, Parametric shift, Calibration, Diffusion, Replication, *Volatility smile*, *Volatility skew*, Forward Libor rates, Martingality, Correlation, Validation tests, *Fair value*

Note de synthèse

Mise en contexte du mémoire et de la problématique

Le cadre réglementaire Solvabilité II impose aux compagnies d'assurance d'évaluer l'actif et le passif de leurs bilans en valeurs de marché. Cette approche d'évaluation, dite *market-consistent* a été empruntée au monde financier [Kem09] dans lequel elle trouve toute sa légitimité grâce à l'article fondateur de *Black & Scholes* [BS73]. En assurance, elle se justifie par la structure *optionnelle* des engagements de l'assureur. L'estimation de la «*juste valeur*» de ces options et garanties est alors inhérente au calcul du *Best Estimate*.

La complexité de la structure optionnelle sous-jacente au passif des assureurs, rend son évaluation par formule fermée très compliqué ce qui justifie le recours des assureurs aux générateurs de scénarios économiques (GSE) en univers risque-neutre. Un générateur de scénarios économiques va permettre aux assureurs de projeter les facteurs de risque auxquels ils sont soumis. Or, le facteur de risque de taux constitue un élément central dans l'évaluation des engagements des assureurs et il est considéré comme le plus impactant pour ce dernier. Par conséquent, une attention particulière doit être attribuée à la modélisation de ce facteur de risque.

La littérature financière est assez riche sur le sujet de modélisation du taux d'intérêt. Classiquement, les modèles de taux peuvent se répartir en trois grandes catégories : la modélisation peut porter sur le taux court, sur les taux *forward* instantanés (cadre général de Heath-Jarrow-Morton), ou sur les taux LIBOR *forward*. Cette dernière catégorie de modèles, qui modélise des quantités observables sur le marché comme les taux LIBOR *forward*, ne cesse d'augmenter en popularité depuis son introduction en 1997 dans l'article [Jam97]. Aujourd'hui ces modèles sont largement utilisés dans les secteurs financiers et assurantiels, notamment pour la génération de scénarios économiques.

En conséquence, nous proposons d'étudier deux extensions du modèle LIBOR Market. Les modèles choisis, bien qu'appartenant à la même catégorie, ils présentent des caractéristiques différentes, permettant ainsi de faire des comparaisons concernant les capacités et les limites de chaque modèle. Les modèles étudiés dans le cadre de ce mémoire sont : le DDLMM avec shift paramétrique et le DDLMM avec paramètres incertains.

Motivation de notre choix des deux modèles

Le modèle DDLMM avec shift paramétrique est une extension naturelle du DDLMM (*Displaced Diffusion Libor Market Model*) dans le sens où, contrairement au modèle de base, le *shift* δ dépendra des dates de maturité. On peut déjà anticiper que ce modèle ne soit pas très performant sur des swaptions ITM/OTM avec un niveau de courbure assez prononcé, car la reproduction du *smile de volatilité* est généralement liée à la structure de la volatilité plutôt qu'à celle du *shift*. Néanmoins, ce modèle s'avère très performant sur les swaptions ATM et il permet de contrôler la négativité des taux avec plus de flexibilité il permet également de limiter le phénomène d'explosivité des taux.

De l'autre côté, le modèle DDLMM avec paramètres incertains est bien plus complexe, car il dispose d'une volatilité dont les paramètres sont incertains. Ce modèle présente une complexité accrue dans la procédure de calibrage, du fait qu'il est plus paramétré que le modèle précédent, avec plusieurs paramètres embarqués nécessitant leur objectivation avec un certain recul. Du fait de la complexité du calibrage du modèle, nos attentes concernant sa capacité à répliquer le *smile de volatilité* sont bien plus élevées.

La comparaison de ces deux modèles est donc nécessaire et pertinente pour justifier cette complexité additionnelle et juger de son efficacité.

Méthodologie d'étude des modèles

Pour assurer une traçabilité théorique de nos modèles et dans le cadre de notre travail de recherche, nous avons commencé par étudier les aspects théoriques des deux modèles ainsi que la détermination des formules de *pricing* d'une swaption pour les deux modèles. Nous avons également explicité les schémas de diffusion.

Pour le modèle DDLMM avec shift paramétrique

Dans un premier temps, le modèle DDLMM avec shift paramétrique a été calibré sur l'ensemble de la surface de volatilité ATM. Ensuite, nous avons procédé à l'analyse des paramètres calibrés pour vérifier s'il y avait une saturation au niveau de certains paramètres. La stabilité du calibrage a également été testée en utilisant deux algorithmes d'optimisation. Nous avons terminé notre première étude par une analyse des écarts entre les matrices de volatilité modèle et marché.

Dans le cadre d'une deuxième étude, nous avons proposé d'examiner la robustesse du modèle DDLMM avec shift paramétrique face à deux environnements économiques différents : celui du 4^{ème} trimestre de l'exercice 2022 et celui du 4^{ème} trimestre de l'exercice 2023. Notre objectif était de vérifier la capacité du modèle à s'adapter à des données de calibrage différentes.

Nous nous sommes également intéressés à l'objectivation des paramètres de la forme paramétrique du shift, afin d'obtenir des profils plus interprétables d'un point de vue assurantiel et qui pourraient faire l'objet d'analyses de sensibilité. Pour cette dernière

partie, nous avons utilisé la procédure du multi-start.

De plus, une étude supplémentaire sur l'impact du shift paramétrique a été réalisée, en sélectionnant trois sensibilités correspondant à des profils décroissants, à des niveaux de shift assez variés. Nous avons étudié à cet effet les statistiques descriptives des différentes trajectoires diffusées, notamment les scénarios extrêmes.

Enfin, dans le but de valider les scénarios diffusés, nous avons réalisé les tests de validation du modèle DDLMM avec shift paramétrique en effectuant les tests de martingalité et de *market-consistency*.

Pour le modèle DDLMM avec paramètres incertains

Pour le modèle DDLMMUP, dont la finalité est de répliquer le smile de volatilité, la même analyse a été réalisée, avec l'intégration des swaptions ITM/OTM dans le calibrage.

La procédure de calibrage du DDLMMUP a présenté un niveau de complexité supplémentaire. Une première étude visant à objectiver les paramètres a été réalisée, et les paramètres implicites ont été fixés à l'issue de cette étape. Ensuite, une analyse des paramètres calibrés a soulevé un problème de saturation de certains paramètres, que nous avons pu analyser, expliquer et pour lequel nous avons proposé une alternative pour le surmonter.

Enfin, nous avons procédé aux tests de validation pour le modèle DDLMMUP.

Résultats des études de calibrage et de diffusion

Le modèle DDLMM avec shift paramétrique

Pour le modèle DDLMM avec shift paramétrique une certaine complexité s'ajoute dans la procédure de calibrage et qui est liée à l'objectivation de la fonction du shift. Dans un premier temps, les résultats obtenus correspondent à un calibrage sur les données du 4^{ème} trimestre de l'exercice 2023 tout en favorisant la deuxième forme paramétrique parmi celles présentées lors de l'étude théorique du modèle. Les résultats obtenus sont très stables et très satisfaisants pour les deux algorithmes d'optimisation. Ces premiers résultats permettent de dire que le modèle répond aux besoins en termes de réplification des swaptions ATM (*skew de volatilité* voir la figure 5).

Dans un second temps, l'étude de la robustesse du calibrage a montré que les évolutions du contexte économique peuvent induire de fortes variations dans les niveaux de volatilité et du taux sans risque, le modèle montre une capacité à s'en ajuster d'une manière plutôt acceptable, et pourra en servir pour des sensibilités. Néanmoins, peut rencontrer des difficultés lorsque le niveau de courbature des volatilités est assez élevé.

Comme suite logique à notre étude nous avons proposé une méthodologie d'objectivation des paramètres de la fonction du shift, d'ailleurs la deuxième forme paramétrique a été sélectionnée pour sa stabilité relative. Les allures obtenues sont décroissantes avec des niveaux de départ et des niveaux à l'ultime assez différents et des vitesses de convergence

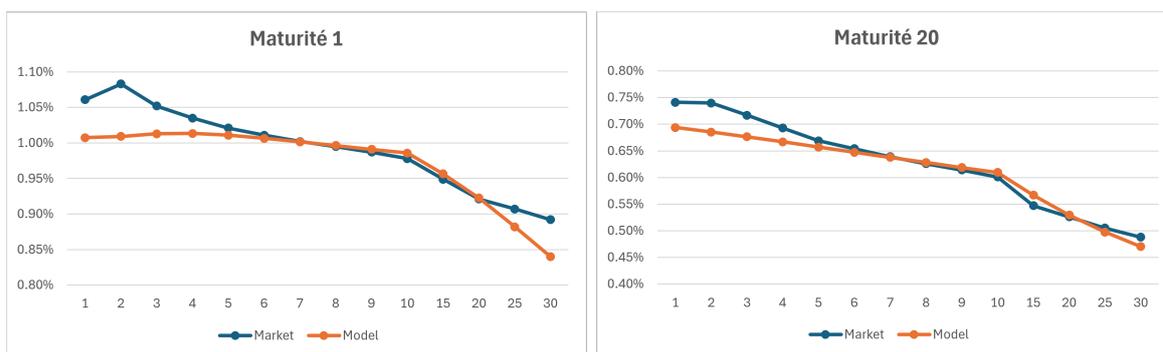


FIGURE 1 – Réplication du skew de volatilité pour les swaptions ATM

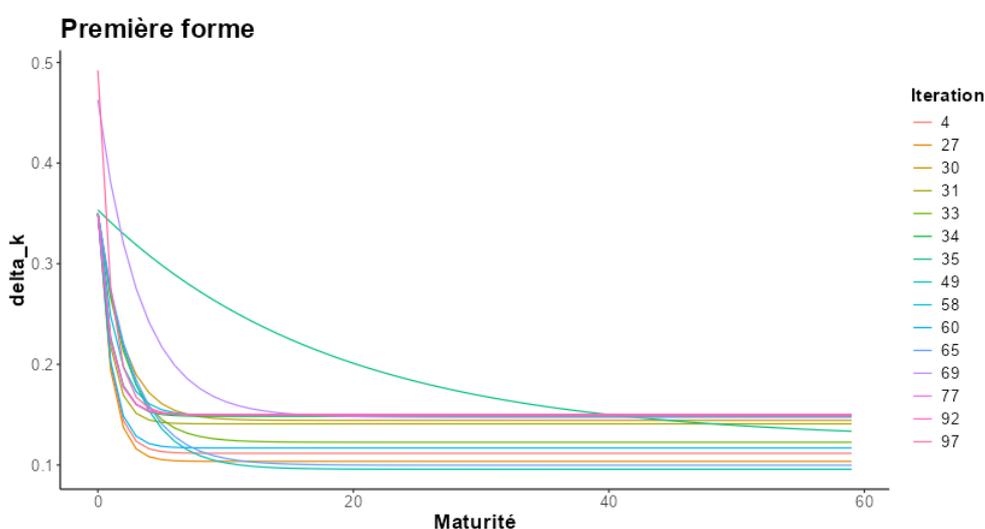


FIGURE 2 – Allures des fonctions du shift pour la deuxième forme paramétrique

vers le niveau à l'ultime rapide et d'autres moins rapides (voir la figure 6). Après nous nous sommes intéressés à l'étude de trois sensibilités et à étudier les trajectoires générées.

Les tests de validation pour le modèle avec shift paramétrique sont très satisfaisants avec les niveaux du shift sélectionnés. Les écarts absolus entre les prix du marché et ceux de *monte-carlo* y sont également très acceptables.

Étude de trois sensibilités sur les paramètres de la fonction du shift

Nous avons pu remarquer qu'un niveau de départ du shift assez élevé avec une vitesse de convergence vers un niveau à l'ultime assez faible, qui est élevé, permettra l'apparition de taux négatifs pour les courtes maturités qui seront de plus en plus négatives en fonction de l'horizon de projection, mais en revanche, la proportion des scénarios extrêmes négatifs

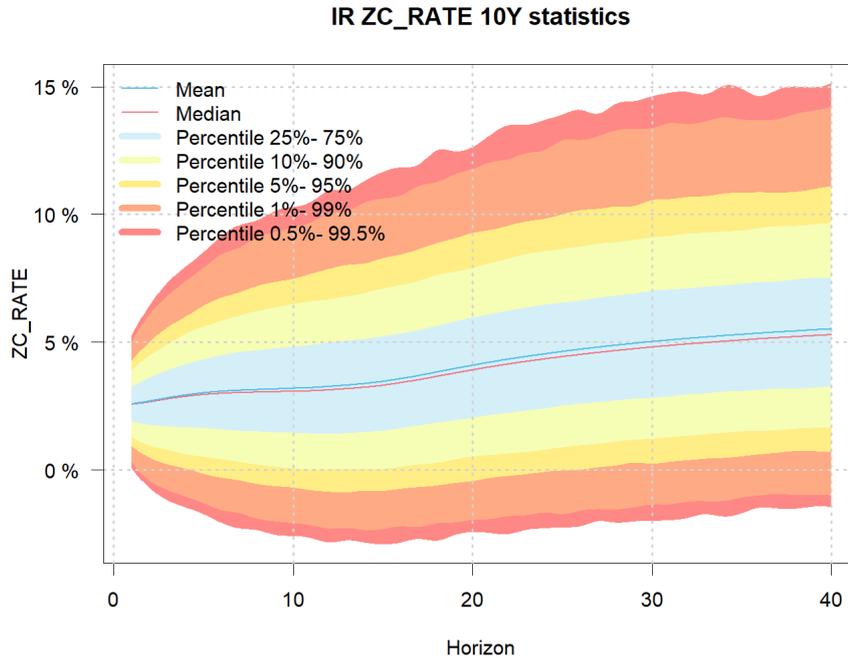


FIGURE 3 – Statistiques descriptives des trajectoires pour la troisième sensibilité

sera plus faible pour les grandes maturités. Néanmoins, l'obtention de scénarios extrêmes négatifs pour les moyennes et grandes maturités est possible en diminuant la vitesse de convergence ou en augmentant le niveau à l'ultime. Les scénarios extrêmes explosifs sont généralement limités à un niveau entre 15% et 17% (voir la figure 3), qui reste raisonnable et convenable pour passer les tests de validation notamment celui de *repricing* de Monte-Carlo sans problèmes particuliers.

Dans le cadre de cette étude, on peut dire que la paramétrisation au niveau du shift, notamment ces allures décroissantes était d'une grande utilité d'une pour la stabilisation des résultats de validation en particulier celui de Monte-Carlo. Mais également, en permettant un contrôle supplémentaire sur le niveau de négativité des taux, constituant ainsi un cadre idéal pour la réalisation de plusieurs sensibilités et chocs notamment pour en servir dans le cadre d'étude ALM plus approfondie.

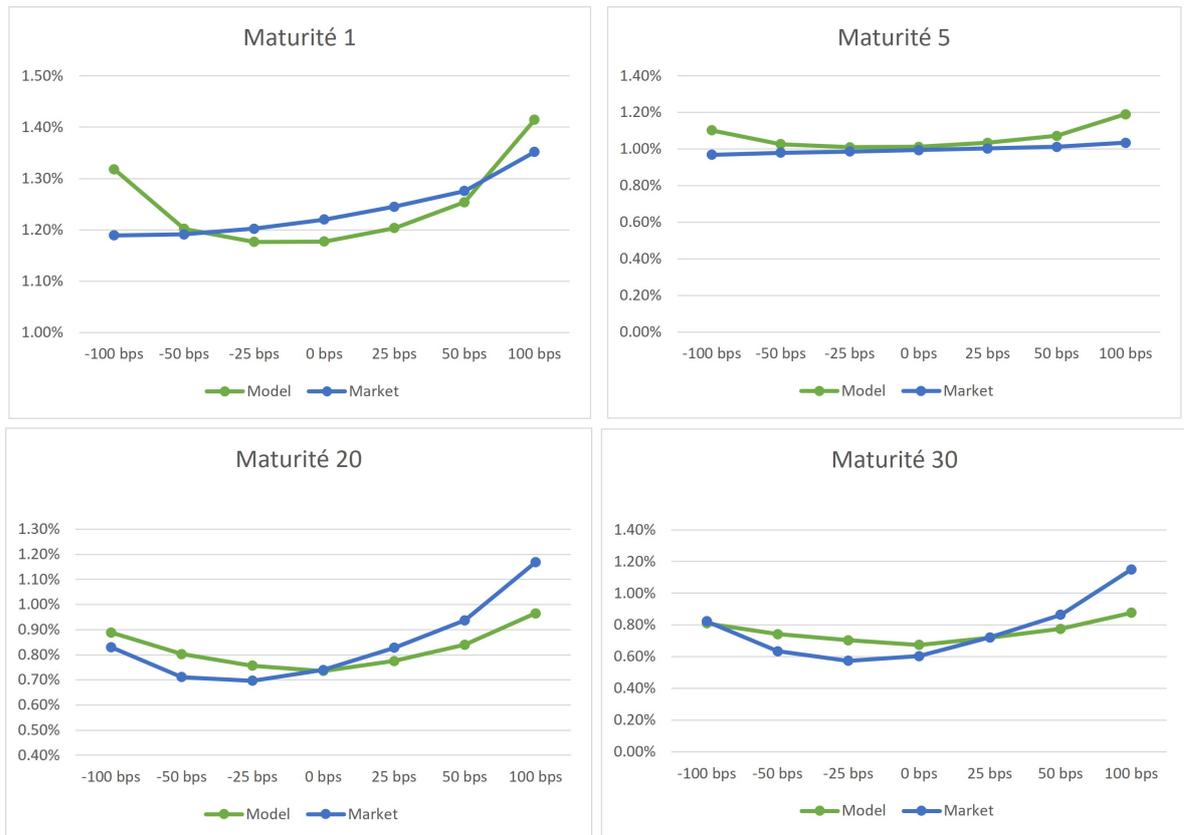


FIGURE 4 – Réplication du smile de volatilité des swaptions AFM par le modèle DDLMMUP

Le modèle DDLMM avec paramètres incertains

La procédure de calibrage du modèle a été chaotique et complexe, soulevant plusieurs difficultés que nous avons tenté de surmonter tout au long de l'étude. Cette complexité provient principalement du fait que le modèle est hyper-paramétré, avec un grand nombre de paramètres embarqués, ce qui a occupé une grande partie de notre étude en raison de la méthodologie adoptée pour leur objectivation.

Cependant, cette complexité a été compensée par les performances satisfaisantes du modèle sur la surface de volatilité AFM. Le modèle a montré des écarts relativement acceptables et une bonne reproduction de la courbure du smile de volatilité (voir figure 4), tout en obtenant de meilleurs résultats en termes de RMSE que les modèles utilisés comme benchmark.

Néanmoins, le modèle présente certaines limitations, notamment en ce qui concerne la saturation des paramètres et l'explosivité des taux générés, ce qui détériore les résultats

des tests de validation de martingalité et de *market-consistency*. Nous avons proposé une alternative consistant à réduire le nombre de paramètres dépendant de la variable aléatoire I . Cette solution a partiellement résolu le problème en améliorant les résultats des tests, mais a également soulevé des questions sur la stabilité des tests de validation pour le modèle DDLMMUP, qui restent encore à explorer.

Executive summary

Context of the Thesis and Problem Statement

The Solvency II regulatory framework requires insurance companies to evaluate the assets and liabilities on their balance sheets at market values. This evaluation approach, known as *market-consistent*, is adapted from finance and grounded in the foundational work of Black & Scholes work of *Black & Scholes*. In the insurance industry, this approach is justified by the optional structure of the insurer’s obligations. Accurately estimating the “*fair value*” of these options and guarantees is essential for calculating the *Best Estimate*.

The complex optional structure underlying insurers’ liabilities makes closed-form evaluation very challenging, which justifies the use of Economic Scenario Generators (ESG) in a risk-neutral framework. These generators allow insurers to project the risk factors they face. The interest rate risk factor is central in evaluating insurers’ liabilities and is considered the most impactful. Therefore, particular attention must be given to modeling this risk factor.

The financial literature is rich in interest rate modeling. Traditionally, interest rate models can be these models can be categorized into three primary groups : models focused on the short rate, instantaneous forward rates (general framework of Heath-Jarrow-Morton), or forward LIBOR rates. The latter, which models market-observable quantities such as forward LIBOR rates, has grown in popularity since its introduction in 1997. Today, these models are widely used in the financial and insurance sectors, particularly for generating economic scenarios.

In this thesis, we propose to study two extensions of the LIBOR Market Model. Although the chosen models belong to the same category, they have different characteristics, allowing us to compare their capabilities and limitations. The models studied are the DDLMM with parametric shift and the DDLMM with uncertain parameters.

Motivation for Choosing the Two Models

The DDLMM with parametric shift is a natural extension of the *Displaced Diffusion Libor Market Model* (DDLMM) as the shift parameter, δ , is maturity-dependent, unlike the base model. While this model may not excel in replicating ITM/OTM swaptions with a pronounced curvature, due to its focus on volatility structure rather than shift,

it performs well for ATM swaptions and offers greater flexibility in managing negative rates and limiting rate explosiveness.

On the other hand, The DDLMM with uncertain parameters is more intricate due to its uncertain volatility parameters. This model presents additional complexity in the calibration process due to its higher number of parameters, requiring more rigorous validation. Given the complexity of calibrating this model, we have higher expectations regarding its ability to replicate the *volatility smile*.

Comparing these two models is necessary and relevant to justify the additional complexity and assess its effectiveness.

Methodology for Model Study

To ensure theoretical traceability of our models within our research, we began by studying the theoretical aspects of both models and determining the pricing formulas for a swaption for each model. We also specified the diffusion schemes.

For the DDLMM with Parametric Shift

Initially, the DDLMM with parametric shift was calibrated on the entire ATM volatility surface. We then analyzed the calibrated parameters to check for saturation in some of them. Calibration stability was also tested using two optimization algorithms. We concluded our first study with an analysis of the discrepancies between the model and market volatility matrices.

In a second study, we examined the robustness of the DDLMM with parametric shift in two different economic environments : the fourth quarter of 2022 and the fourth quarter of 2023. Our goal was to verify the model's ability to adapt to different calibration data.

We also focused on defining the parameters of the parametric shift function to obtain profiles that are more interpretable from an insurance perspective and that could be used for sensitivity analyses. For this last part, we used the multi-start procedure.

Additionally, we conducted an extra study on the impact of the parametric shift by selecting three sensitivities corresponding to decreasing profiles with varying shift levels. We analyzed the descriptive statistics of the different diffusion trajectories, including extreme scenarios.

Finally, to validate the diffusion scenarios, we conducted validation tests for the DDLMM with parametric shift by performing martingale and *market-consistency* tests.

For the DDLMM with Uncertain Parameters

For the DDLMMUP, which aims to replicate the *volatility smile*, the same analysis was conducted, integrating ITM/OTM swaptions into the calibration.

The calibration process for the DDLMMUP was more complex and chaotic, presenting

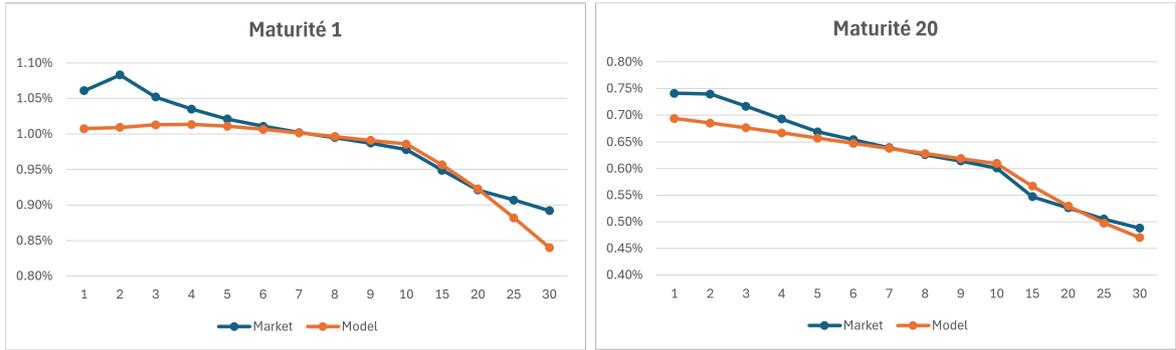


FIGURE 5 – Volatility skew replication for ATM swaptions

several challenges that we attempted to overcome throughout the study. This complexity mainly arises from the model’s high number of parameters, requiring a significant portion of our study to be devoted to their validation.

However, this complexity was offset by the model’s satisfactory performance on the ATM volatility surface. The model showed relatively acceptable discrepancies and good replication of the *volatility smile* curvature, achieving better results in terms of RMSE compared to benchmark models.

Nevertheless, the model has certain limitations, particularly regarding parameter saturation and the explosiveness of generated rates, which impair the results of martingale and *market-consistency* validation tests. We proposed an alternative to reduce the number of parameters dependent on the random variable I . This solution partially resolved the problem by improving the test results but also raised questions about the stability of validation tests for the DDLMMUP, which remain to be explored.

Calibration and Diffusion Study Results

DDLMM with Parametric Shift

The incorporation of parametric shift into the DDLMM introduces additional complexities during calibration, primarily stemming from the validation of the shift function. Initially, the results obtained from calibration on data from the fourth quarter of 2023 favored the second parametric form presented during the theoretical study of the model. Both optimization algorithms yielded stable and highly satisfactory results, suggesting that the model effectively replicates ATM swaptions. As evidenced by the volatility skew depicted in Figure 5, these initial findings demonstrate the model’s ability to meet the requisite requirements for replicating ATM swaptions (see the volatility skew in Figure 5).

Subsequently, the calibration robustness study showed that while changes in the economic

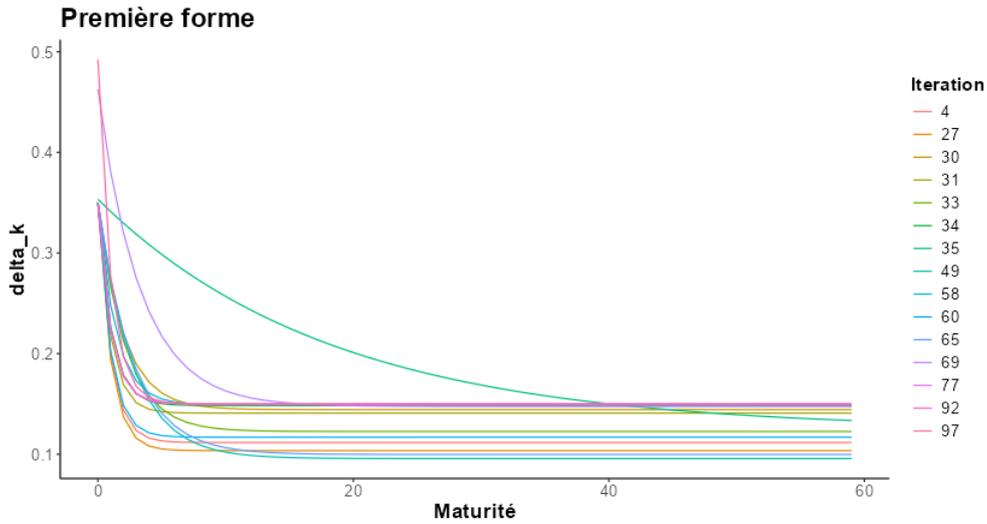


FIGURE 6 – The shift function’s profiles for the second parametric form

context could lead to significant variations in volatility levels and the risk-free rate, the model could adjust acceptably, making it suitable for sensitivity analyses. However, difficulties might arise when volatility curvature levels are very high.

As a logical continuation of our study, we proposed a method for validating the shift function parameters, and the second parametric form was selected for its relative stability. The profiles obtained were decreasing, with different starting levels and ultimate levels, and varying convergence speeds (see Figure 6). We then focused on studying three sensitivities and analyzing the generated trajectories.

The validation tests for the model with parametric shift were very satisfactory with the selected shift levels. The discrepancies between market prices and Monte Carlo simulations were also very acceptable.

Study of Three Sensitivities on Shift Function Parameters

We observed that a high initial shift level with a slow convergence speed towards a high ultimate level would result in negative rates for short maturities, which become increasingly negative depending on the projection horizon. However, the proportion of extreme negative scenarios is lower for long maturities. Nevertheless, obtaining extreme negative scenarios for medium and long maturities is possible by reducing the convergence speed or increasing the ultimate level. Extreme explosive scenarios are generally limited to a level between 15% and 17% (see Figure 7), which is reasonable and suitable for passing validation tests, particularly Monte Carlo repricing.

In this context, it can be said that the parameterization of the shift, especially these decreasing profiles, was very useful for stabilizing validation results, particularly Monte

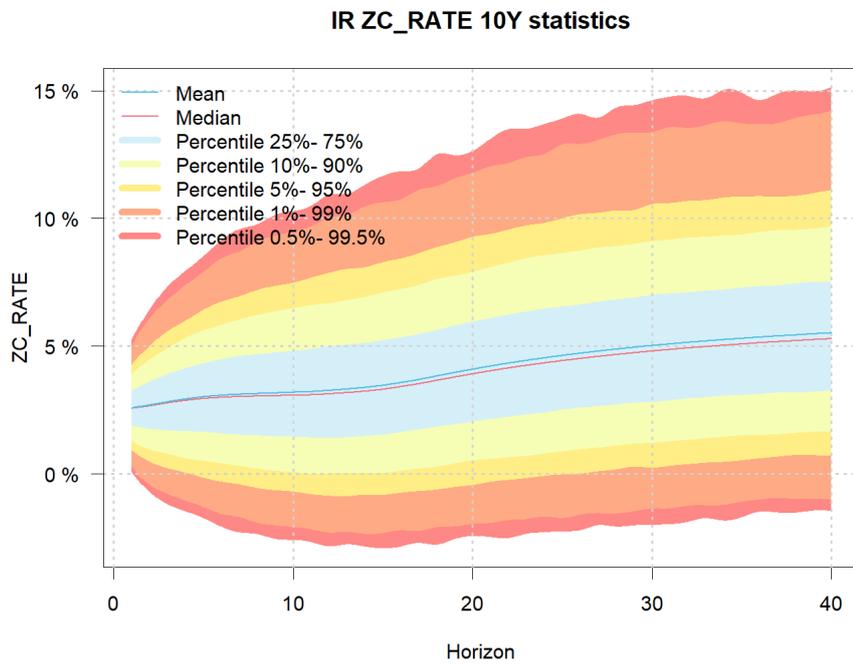


FIGURE 7 – Descriptive statistics

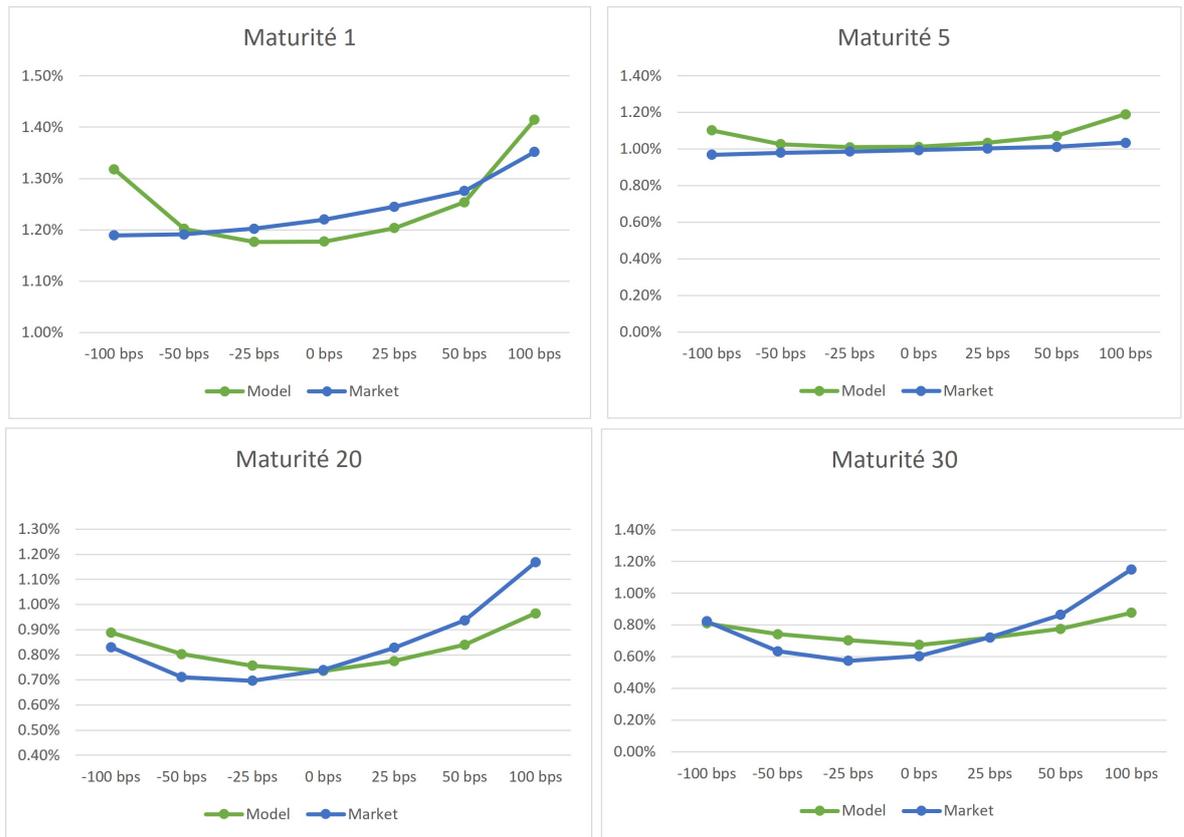


FIGURE 8 – Volatility smile replication on AFM swaptions for the DDLMMUP model

Carlo. Additionally, it allowed for additional control over the level of negative rates, creating an ideal framework for conducting various sensitivity analyses and shocks, particularly for more in-depth ALM studies.

DDLMM with Uncertain Parameters

The calibration process for this model proved to be intricate and challenging, raising several difficulties that we tried to overcome throughout the study. This complexity arises primarily from the model's high number of embedded parameters, which occupied a significant part of our study due to the methodology adopted for their validation.

However, this complexity was compensated by the model's satisfactory performance on the ATM volatility surface. The model showed relatively acceptable discrepancies and good reproduction of the *volatility smile* curvature (see Figure 8), achieving better RMSE results than the benchmark models used.

Nevertheless, the model has some limitations, particularly concerning parameter saturation

tion and the explosiveness of generated rates, which deteriorate the results of martingale and *market-consistency* validation tests. We proposed an alternative solution to reduce the number of parameters dependent on the random variable I . This solution partially addressed the issue by improving the test results, but it also raised questions about the stability of the validation tests for the DDLMMUP, which require further exploration.

Remerciements

Je tiens avant tout à exprimer ma profonde gratitude à Mohammed BENNOUNA, mon tuteur d’alternance pour son encadrement attentif, sa disponibilité constante et son soutien précieux tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie également tous les membres de l’équipe Recherche & Développement de Milliman, particulièrement Alexandre BOUMEZOUED et Sophian MEHALLA pour leur contribution le long de l’alternance, leur suivi et leurs conseils pour mémoire.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers l’ensemble de mes enseignants à l’Euro-Institut d’Actuariat. Je souhaite particulièrement remercier mon professeur Monsieur Rainer Buckdahn pour sa rigueur académique, la qualité de ses enseignements, et ses remarques pertinentes tout au long de mon alternance, qui m’ont grandement aidé dans la réalisation de ce travail. Je tiens également à remercier Monsieur Franck VERMET, enseignant-chercheur et directeur de l’EURIA, pour son soutien et accompagnement tout au long de mes deux années d’étude à l’EURIA .

Enfin, mes remerciements les plus sincères vont à ma famille – mon père, ma mère, et mes deux sœurs – pour leur soutien inébranlable et leurs encouragements constants tout au long de ces années d’études.

Table des matières

Résumé	1
Abstract	2
Note de synthèse	3
Executive summary	9
Remerciements	16
Introduction	21
I Contexte générale de l'étude	23
1 Contexte réglementaire : Solvabilité II	24
1.1 Considérations générales	24
1.2 Zoom sur les exigences quantitatives	25
1.2.1 Le Bilan économique sous Solvabilité II	26
1.2.2 Calcul du Capital de Solvabilité Requis (SCR)	29
1.2.3 La notion de <i>market-consistency</i>	33
2 Généralités sur les générateurs de scénarios économiques	35
2.1 Les structures possibles pour un GSE	35
2.2 Étapes de construction d'un GSE	36
2.3 Les différents univers de projections	36
3 Éléments de la théorie financière	39
3.1 Introduction	39
3.2 Généralités sur les taux	39
3.2.1 Rappels sur les taux spot	39
3.2.2 Taux comptant (spot)	41
3.2.3 Rappels sur les contrats Forward et Swap	42
3.3 Instruments financiers dérivés sur les taux d'intérêts	45

3.3.1	Caplet/floorlet	45
3.3.2	Swaptions	47
3.3.3	Choix des instruments et analogie avec le passif de l'assureur	49
4	Modélisation du taux d'intérêt	52
4.1	Introduction	52
4.2	Panorama des modèles de taux	52
4.2.1	Modèles d'équilibre général	52
4.2.2	Les modèles d'AOA (Absence d'opportunité d'arbitrage)	53
4.2.3	Le cadre général de modélisation de Heath, Jarrow et Morton (HJM)	54
4.2.4	Les modèles à Multi-Factoriels	55
4.2.5	Les modèles de marché : <i>Market Models</i>	57
4.3	Focus sur le <i>Libor Market Model</i>	58
4.3.1	Dynamique sous différents numéraires	58
4.3.2	Les extensions du modèle LMM	59
4.3.3	Spécification de la structure de volatilité	63
5	Modélisation des autres facteurs de risque	66
5.1	Le facteur de risque action	66
5.2	Le facteur de risque Immobilier	67
5.3	Indice inflation	67
II Extensions du Libor Market Model pour incorporer le smile de volatilité		68
6	Le modèle DDLMM avec shift paramétrique	69
6.1	Introduction	69
6.2	Éléments théorique du modèle	69
6.3	Spécification et motivation derrière le modèle	70
6.4	Le pricing des swaptions dans le modèle DDLMM avec shift paramétrique	71
6.4.1	L'approximation de Rebonato	72
6.4.2	Prix théorique des Swaptions	74
6.5	Méthodologie du calibrage	74
6.5.1	Caractéristiques des instruments de calibrage	74
6.5.2	Données en entrée	75
6.5.3	Spécification de la fonction du shift	75
6.5.4	Problème d'optimisation	76
6.6	Résultats de calibrage	77
6.6.1	Convergence de l'algorithme d'optimisation et paramètres calibrés	77
6.6.2	Surface de volatilité ATM résultant du calibrage	78
6.7	Étude de la stabilité du calibrage	80
6.7.1	Évolution de l'environnement économique entre 2022 et 2023	81
6.7.2	Objectivation de la fonction du shift	87

6.8	Validation du modèle	94
6.8.1	Diffusion du modèle	94
6.8.2	Tests de martingalité	96
6.8.3	Tests de repricing Monte-Carlo	99
6.8.4	Études des trajectoires générées suite à la diffusion	100
6.9	Conclusion sur le modèle DDLMM avec shift paramétrique	105
7	Le modèle DDLMM avec paramètres incertains	107
7.1	Introduction	107
7.2	Éléments théorique du modèle	107
7.3	Motivation et spécification derrière le modèle DDLMMUP	108
7.3.1	Dynamique des taux forwards sous la mesure LIBOR Spot	109
7.4	Le pricing de swaptions dans le modèle DDLMM avec paramètres incertains	110
7.4.1	L'approximation de <i>Hull-White</i>	111
7.5	Méthodologie de calibrage du DDLMMUP	115
7.5.1	Objectivation des paramètres embarqués du modèle DDLMMUP	115
7.5.2	Données d'entrée et paramètres à calibrer	116
7.5.3	Formulation du problème d'optimisation	117
7.6	Résultats du calibrage	118
7.6.1	Objectivation du choix des hyper-paramètres N et $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$	119
7.6.2	Choix des pondérations des instruments de calibrage	119
7.6.3	Résultats de calibrage sur les Swaptions ATM	120
7.6.4	Résultats du calibrage sur les swaptions AFM	122
7.7	Comparaison avec le modèle DDLMM et DDSVLMM	125
7.8	Validation du modèle	126
7.8.1	Diffusion du modèle	126
7.8.2	Tests de validation	129
7.9	Conclusion pour le modèle DDLMMUP	133
III	Annexes	142
A	Formules de pricing du DDSVLMM	143
A.1	Dynamique du taux swap	143
A.2	Pricing des swaptions dans le modèle DDSVLMM	144
A.3	Paramètres calibrés pour le DDSVLMM et le DDLMM	145
B	Changement de Numéraire	146
C	Corrélation inter-forward	147
C.1	Méthode de Calibrage des Corrélations Inter-forward	147

Introduction

Le cadre réglementaire Solvabilité II impose que l'actif et le passif du bilan de l'assureur soient évalués en valeur de marché, ce qu'on appelle la *market-consistency*. Cette méthode d'évaluation, dite en «*juste valeur*», trouve sa légitimité dans l'existence d'options et de garanties cachées dans les engagements pris par l'assureur. L'évaluation de la «*juste valeur*» de ces options et garanties sous-jacents au passif de l'assureur est assez complexe, rendant essentiel l'utilisation d'un Générateur de Scénarios Économiques risque-neutre pour calculer le *Best Estimate*.

Le risque de taux d'intérêt est un élément essentiel dans l'évaluation du *Best Estimate* des compagnies d'assurance. Tout en permettant d'estimer, entre autres, la valeur temps des engagements futurs de l'assureur sa projection devrait constituer un enjeu majeur pour ce dernier. De ce fait, il est nécessaire d'avoir une compréhension approfondie des modèles de taux.

La finalité de notre mémoire s'inscrit dans ce cadre. À cet effet, nous étudions deux modèles de taux de la famille LIBOR Market, qui présentent des caractéristiques et des attentes assez différentes : le modèle DDLMM avec shift paramétrique et le DDLMM avec paramètres incertains. Notre étude cherche à combler les limites du modèle LMM classique, notamment en ce qui concerne la réplication de phénomènes tels le *smile* et le *skew* de volatilité. Ainsi notre mémoire s'articule autour de trois axes principaux.

Dans le premier axe, nous avons défini le cadre général de l'étude et les outils financiers qui seront utilisés dans la suite du mémoire. Nous nous sommes également intéressés aux liens et analogies existants entre les mondes de la finance et de l'assurance, notamment en ce qui concerne la question du passif *optionnel* de l'assureur tout en établissant le lien avec certains produits optionnels en finance. Les Générateurs de Scénarios Économiques, ont été présentés succinctement tout en insistant sur quelques spécificités liées à des considérations réglementaires. Finalement, nous avons fait un panorama des grandes catégories des modèles de taux stochastiques.

Dans le deuxième axe, nous avons commencé une étude théorique des modèles proposés. Ensuite, nous avons abordé l'étape que nous avons jugé la plus complexe de tout le travail, celle du calibrage. De ce fait, une attention particulière a été accordée à cette étape-ci. Nous avons pris soin de bien présenter les méthodologies qui ont été appliquées

et les études réalisées dans le but de comprendre le comportement de nos modèles dans différents cadres de modélisation. Nous avons également analysé leurs capacités et limites vis-à-vis des phénomènes qui nous ont particulièrement intéressés, notamment le *skew* et le *smile* de volatilité.

Dans le dernier axe, nous avons testé nos modèles sur plusieurs sensibilités. Les résultats obtenus nous ont permis de faire des anticipations sur l'impact de ces modèles sur les résultats de l'assureur. Les tests de validation de *martingalité* et de *market-consistency* ont également été réalisés, tout en les analysant en détail afin de surmonter les difficultés pouvant apparaître dans des cas particuliers de calibrage.

Première partie

Contexte générale de l'étude

Chapitre 1

Contexte réglementaire : Solvabilité II

1.1 Considérations générales

La directive solvabilité II (SII), entrée en vigueur au 1er janvier 2016, vise à examiner d'une manière plus approfondie les risques auxquels les assureurs sont exposés afin d'adapter les exigences de capital et les pratiques de contrôle au profil de risque de ces derniers (risk-based approach). Cette norme représente un nouveau cadre de mesure de la stabilité financière des compagnies d'assurance dans l'Union européenne.

Contrairement à solvabilité I, où les postes du bilan sont évalués à leurs valeurs comptables, Solvabilité II propose une approche économique pour la valorisation du bilan : le bilan est valorisé à sa juste valeur économique (fair value), cette dernière devant être cohérente avec les performances du marché (*market-consistency*).

Les mesures contenues dans cette norme sont en générale classées en trois piliers relatifs (voir la figure 1.1) à des :

1. **Exigences quantitatives** : ce pilier établit les règles de calcul du capital économique réglementaire (le *SCR* et le *MCR*), et de l'établissement du bilan économique ;
2. **Exigences qualitatives** : ce pilier concerne la mise en place de dispositifs internes de gestion du risque adaptés au profil de risque de chaque compagnie. Il prévoit des dispositions sur :
 - La gouvernance ;
 - La surveillance des risques ;
 - Le contrôle interne ;
 - L'audit interne.
3. **Exigences de communication** : ayant pour objectif la transparence, ce pilier établit des mesures permettant d'organiser la circulation de l'information financière et des rapports. Les organismes d'assurance sont contraints par ce pilier de

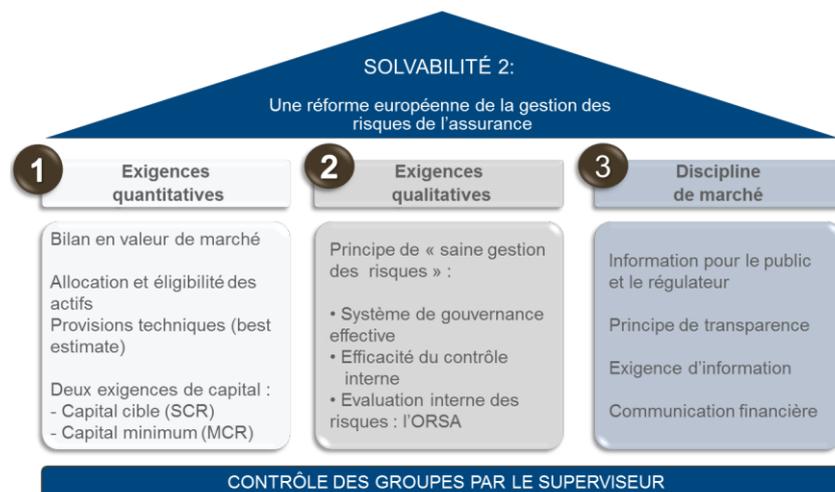


FIGURE 1.1 – Les trois piliers de solvabilité II

fournir des informations envers le public et envers l'autorité du contrôle (ACPR).

Les études réalisées dans le cadre de ce mémoire s'inscrivent principalement dans le pilier des exigences quantitatives (pilier I).

1.2 Zoom sur les exigences quantitatives

Ce pilier a pour objectif principal de s'assurer que les fonds propres de l'assureur sont suffisants pour couvrir les engagements pris envers les assurés, en d'autres termes il permet de s'assurer que le niveau des fonds propres est capable de faire face à une ruine économique à l'horizon de 1 an avec une probabilité de 99,5%. On peut le décomposer comme suit :

- Évaluation économique de l'actif et du passif selon une approche *market-consistent* (hors marge pour risque) puis prise en compte des impôts différés.
- Calcul du capital réglementaire requis qui se décompose en :
 - *Capital de Solvabilité Requis (SCR)* : définit le capital permettant d'absorber le choc provoqué par un risque majeur (choc sur les facteurs de risque). Ce capital peut se calculer en formule standard, ou en modèle interne.
 - *Minimum Capital Requirement (MCR)* : Niveau minimum des fonds propres en dessous duquel la compagnie d'assurance ne peut plus exercer son activité.
- Calcul de la marge pour risque, pour les passifs non-réplicables.
- Calcul du ratio de solvabilité.

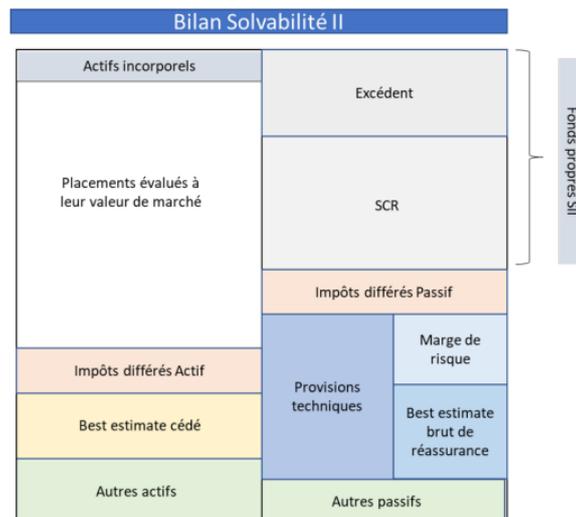


FIGURE 1.2 – Structure du bilan économique Solvabilité II

1.2.1 Le Bilan économique sous Solvabilité II

Sous solvabilité II les postes du bilan (figure 1.2) doivent être évalués en valeur économique, selon une approche *market-consistent*. Cette notion sera discutée, dans la lumière des travaux de [Arm22] et [Ved17], dans 1.2.3. La valorisation économique du bilan sous Solvabilité II revient donc à déterminer la valeur de marché des actifs, et à estimer les provisions techniques. Ces derniers sont composés du *Best Estimate* et de la marge pour risque. Ces éléments sont détaillés dans la suite de cette partie.

1.2.1.1 Évaluation de l'actif

De manière générale, l'évaluation des actifs d'une compagnie d'assurance ne présente pas de difficultés majeures, car la juste valeur des actifs de l'assureur est fournie par les marchés financiers. Néanmoins la liquidité des actifs sur le marché financier peut varier en fonction des caractéristiques de l'instrument en question (par exemple les swaptions pour la définition d'une Swaption de tenors 6 ans, 8 ans et 9 ans).

Pour cela, nous distinguons deux types de placements financiers :

- *mark-to-market* : dans ce cas les placements sont faits dans des instruments financiers négociés dans des marchés assez liquides ; la valorisation de ces actifs se fait selon une approche *mark-to-market*, c'est à dire leur valeur est égale à leur cours de marché ;
- *mark-to-model* : dans ce cas les instruments financiers utilisés ne sont pas assez liquide sur le marché, on utilise des modèles de valorisation pour déterminer leur valeurs.

1.2.1.2 Évaluation du passif : provisions techniques

Les provisions techniques (PTs) représentent la valeur économique des engagements de l'assureur envers les assurés, selon une approche *market-consistent*. La juste valeur de ces engagements est difficile à estimer, en raison de la grande variété des risques encourus par l'assureur, ainsi que leurs nature (couverable ou non-couverable). Pour cela il convient d'effectuer la séparation suivante des éléments du passif :

1. **Passifs répliquables** : passifs dont les *cash-flows* peuvent être parfaitement répliqués par des instruments financiers négociés sur un marché liquide et transparent, dans ce cas la valeur des engagements est la valeur de marché du portefeuille répliquant. Ils s'agissent généralement de risques financiers, on peut en citer par exemple les options et garanties financières sous jacentes aux contrats d'épargne vie (garanties de taux minimum garantie (TMG) et de Participation aux bénéfices (PB)).
2. **Passifs non-répliquables** : si le passif n'est pas entièrement répliquable sur le marché, les provisions sont égales à la somme de *Best Estimate* et une marge pour risque (*Risk Margin*).

$$\text{Provisions Techniques} = \text{Best Estimate} + \text{Marge pour risque}$$

Les risques non couvrables correspondent généralement à des risques non-financiers (par exemple les risques de rachat, mortalité, longévité, ...).

Remarque 1. *Cette pratique de valorisation trouve toute sa légitimité dans le monde financier grâce à l'article fondateur de Black-Scholes [BS73]. Néanmoins son application en assurance soulève quelques questions que nous aborderons par la suite.*

Le Best Estimate (BE)

Il est défini dans la directive [15] par « *moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents. Le calcul de la meilleure estimation est fondé sur des informations actualisées et crédibles et des hypothèses réalistes et il fait appel à des méthodes actuarielles et statistiques adéquates, applicables et pertinentes.* »

Comme précisé dans 1.2.1.2, les *cash-flows* du passif peuvent provenir de risques financiers ou de risques non-financiers non-couvrables. Le *Best Estimate* est exprimé par la formule :

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \otimes \mathbb{Q} \left[\sum_{n=1}^N D(0, n) CF_n \right] \quad (1.1)$$

Où :

- $(D(0, n))_{n \geq 1}$ sont les déflateurs associés à la structure du taux sans risques (voir section 3.2.1).
- \mathbb{Q} la mesure de probabilité risque neutre pour les risques financiers, et \mathbb{P} la mesure de probabilité historique associé aux risques non financiers. En effet, l'espérance est évaluée sous la mesure risque neutre pour les risques couvrables, et sous la mesure de probabilité historique pour les risques non-couvrables.
- CF_n est le flux correspondant à la n -ième période avec $CF_n = CF_n^- - CF_n^+$, soit la différence des flux sortants est entrants.
- N l'horizon de projection qui doit être suffisamment long pour couvrir la durée de vie totale du portefeuille d'assurance et de réassurance.

Etant donné la structure complexe du passif de l'assureur, il est très difficile de trouver, quitte à émettre des hypothèses fortes sur cette structure (voir la section 3.3.3 pour en avoir une intuition), une formule fermée pour évaluer l'espérance 1.1. En pratique, l'espérance 1.1 est estimée selon une approche Monte-Carlo. Un nombre assez grand M de simulations des facteurs de risques est réalisé, sous les mesures de probabilités adéquates. Pour chaque trajectoire m simulée nous disposons de $(D(0, n)^{(m)})_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ et $(CF_n^{(m)})_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$:

$$BE \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N D^{(m)}(0, n) CF_n^{(m)} \quad (1.2)$$

La simulation des trajectoires est effectuée à l'aide de modèles soigneusement sélectionnés pour les différents facteurs de risque et calibrés de manière appropriée en fonction de la nature de ces risques. Le regroupement de tous ces modèles dans une structure sensible aux interactions entre les différents facteurs de risque aboutit à ce qu'on appellera par la suite un **Générateur de Scénarios Économiques** (GSE) (Se référer au chapitre 2). Ces trajectoires constituent des éléments d'inputs pour le modèle ALM.

La marge pour risque

En pratique, les passifs de l'assurance ne sont pas répliquable par des instruments financiers, les options biométrique par exemple (option de rachat, mortalité, ...). La marge pour risque s'ajoute comme marge de prudence pour prendre en compte cette partie non répliquable du passif de l'assureur; selon la directive [15] elle est «calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance». Elle est calculée en déterminant le coût que représente la mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal au capital de solvabilité requis nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci.

Ce qui correspond à :

$$MR = r_{CoC} \sum_{t \geq 1} P(0, t) SCR_t$$

Où :

- Le taux r_{CoC} correspond au coût du blocage du capital requis, en d'autres termes c'est le coût supporté par l'assuré s'il décide de bloquer ces capitaux requis sur toutes les périodes jusqu'à l'horizon, au lieu de les investir sur le marché. Ce taux est déterminé par l'EIOPA. Il est actuellement fixé à 4,75%.
- Le SCR_t correspond au Capital de Solvabilité requis à la date t , qu'on détaillera dans la partie qui suit.
- Les $(P(0, t))_{t \geq 1}$ correspondent aux prix des obligations Zéro-Coupon, calculés sur la base de la courbe des taux sans risque.

1.2.2 Calcul du Capital de Solvabilité Requis (SCR)

Les fonds propres dans le bilan SII

Les fonds propres d'une compagnie d'assurance à une date donnée t sont composés de la *Net Asset Value* (NAV_t) et de l'*Actif Net Réactualisé* (ANR_t).

- L' ANR correspond à l'accumulation des richesses passées jusqu'à la date t . Il est calculé d'une manière déterministe et ne nécessite pas des simulations.
- La NAV correspond à la différence entre la valeur de marché des actifs et les Provisions Techniques :

$$NAV = \text{Valeur de Marché des Actifs} - (BE + RM) \quad (1.3)$$

La valorisation de la partie hors marge pour risque se fait en calculant l'espérance sous la mesure risque neutre (*market-consistency*) de la valeur actuelle des marges futures (VAN).

Si on considère les résultats futurs $(R_n)_{n \geq 1}$, alors on peut évaluer les Fonds Propres à la date initiale par la formule :

$$FP_0 = ANR_0 + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{n \geq 1} D(0, n) R_n \right]$$

Où :

- \mathbb{Q} est la mesure de probabilité risque neutre.
- $(D(0, n))_{n \geq 1}$ les déflateurs (voir section 3.2.1)

Le Capital de Solvabilité Requis

Le capital de Solvabilité Requis correspond au montant de fonds propres dont doit disposer la compagnie d'assurance pour faire face à une **ruine économique** à horizon **1**

an au niveau **99,5 %**. Nous mettons le point ici sur trois éléments essentiels :

- Une Ruine économique correspond à la situation où la valeur de marché de l'actif ne permet pas de couvrir les engagements pris par l'assuré (les Provisions Techniques)
- L'horizon d'une année veut qu'on dispose de la distribution des fonds propres dans un an,
- Le seuil de 99,5 % désigne le niveau de solvabilité requis. En d'autres termes la ruine de l'assureur est un événement extrême avec probabilité de réalisation inférieur à 0,5%.

Si on note S le montant qu'on met de côté à la date $t = 0$ et FP_1 les fonds propres disponibles à l'instant $t = 1$, la ruine de l'assureur est représentée par l'évènement $\left\{FP_1 + \frac{S}{D(0,1)} < 0\right\}$. Pour garantir le niveau de solvabilité souhaité on doit avoir :

$$\mathbb{P}\left\{FP_1 + \frac{S}{D(0,1)} < 0\right\} = 0,5\% \Rightarrow S = -q_{0,5\%}(D(0,1)FP_1)$$

Le surplus du capital à ajouter en 0 est donc égale à $-q_{0,5\%}(D(0,1)FP_1)$. Et le capital économique est donnée par :

$$SCR = FP_0 - q_{0,5\%}(D(0,1)FP_1) \quad (1.4)$$

Deux approches pour calculer le SCR : Les compagnies d'assurance ont le choix entre deux approches pour calculer le capital de solvabilité requis, une approche en formule standard et une approche en modèle interne.

La première approche est de type modulaire (figure 1.3), elle est basée sur l'application sur des chocs marginaux sur des facteurs de risques élémentaires (actions, taux, mortalité. Voir figure 1.3 pour une cartographie complète des facteurs de risques). Après la détermination des besoins en capital associé à chaque risque élémentaire, le besoin en capital global est obtenu en les agrégeant par le biais d'une matrice de corrélation. Cette méthode est généralement moins coûteuse en terme de calcul.

L'approche en module interne est basée sur l'obtention de la **distribution des Fonds Propres économiques** dans un an, pour estimer le quantile à 0,5% dans 1.4. L'assureur est libre de choisir sa méthode, néanmoins cette dernière doit être approuver par le régulateur. De manière générale, les méthodes en formule interne sont plus coûteuses en temps de calcul.

Formule standard Le calcul du SCR en formule standard se déroule en trois étapes :

1. On calcule des *sous-SCR* par «risque élémentaire» (actions, taux, mortalité, ...) :

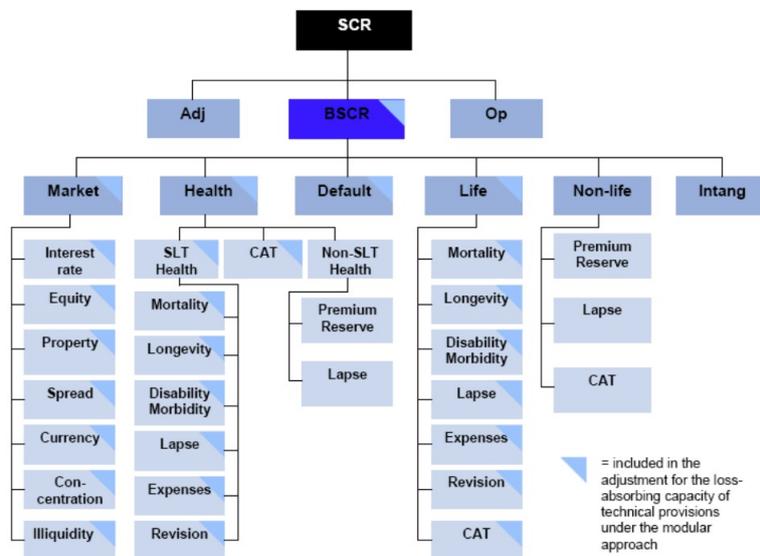


FIGURE 1.3 – Modules et sous modules de risque définis par la formule standard (source : [Ben])

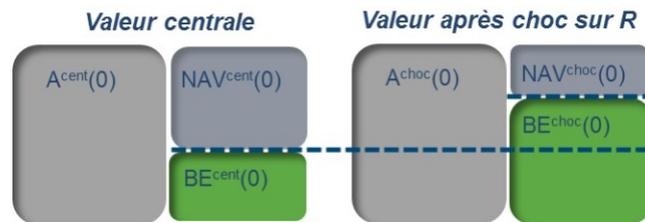


FIGURE 1.4 – Calcul du SCR par risques élémentaires (source : [Ben])

Le besoin en capital associé à un risque élémentaire correspond à la différence entre une NAV (donnée par l’expression 1.3) centrale et une NAV calculée après le choc du facteur de risque élémentaire (voir figure 1) :

$$C_R = NAV^{centrale}(0) - NAV^{choc}(0) \tag{1.5}$$

Remarque 2. Les chocs appliqués correspondent à des déviations extrêmes (au seuil 0,5% ou 99,5% selon le sens du risque) (Voir [Ben] pour plus de détails)

- **Le risque de taux d’intérêt :** Dans le cadre de ce mémoire on s’intéresse plus au risque élémentaire **taux**. Dans ce cas le besoin en capital est celui associé au mouvement à la hausse ou à la baisse de la structure par terme des taux d’intérêt. En effet un choc sur la courbe des taux impacte directement l’actif de l’assureur à travers la valeur marché des obligations, et le passif à travers l’actualisation des flux futurs. Mais également par le biais des interactions

actif-passif provoquées par les options et les garanties incluses dans les contrats d'épargne.

2. **On agrège les besoins en capital à l'intérieur de chaque module de risque (marché, vie, non-vie, ...)**

$$SCR_m = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_m^2} \rho_{i,j}^{R_m} \cdot C_i \cdot C_j} \quad (1.6)$$

Où :

- R_m est l'ensemble des risques élémentaires associés au module m . Par exemple $R_{\text{marché}} = \{\text{taux}, \text{actions}, \dots\}$
- C_i capital associé au risque élémentaire i
- $(\rho_{i,j}^{R_m})_{(i,j) \in R_m^2}$ matrice de corrélation entre les risques élémentaire, fournies par le régulateur.

3. **On agrège les capitaux associés aux différents modules**

$$BSCR = \sqrt{\sum_{(i,j) \in M^2} \rho_{i,j}^M \cdot SCR_i \cdot SCR_j} \quad (1.7)$$

Où :

- M est l'ensemble des modules de risques $M = \{\text{marché}, \text{vie}, \text{non-vie}, \dots\}$;
- SCR_i besoin en capital du module i ;
- $(\rho_{i,j}^M)$ matrice de corrélation entre les modules de risques.

Modèle interne L'approche en modèle interne repose sur la détermination de la distribution des fonds propres à 1 an pour en estimer le quantile à 0,5%. Il se déroule en deux périodes :

- Premièrement on fait évoluer les facteurs de risque sous la probabilité historique à horizon 1 an. Cela revient à générer n scénarios primaires.
- Deuxièmement pour chacun de ces scénarios primaires on calcul les Fonds Propres 1 an associés. Cela revient à générer m scénarios secondaires sous probabilité risque neutre.

Cette approche est très coûteuse en termes de complexité temporelle (réalisation de $n \times m$ simulation, voir la figure 1.5). Il existe plusieurs méthodes pour accélérer le calcul du capital économique (Replicating Portfolio, Curve Fitting, ...), le lecteur intéressé peut se référer à [Ben].

Le ratio de solvabilité

Le ratio de solvabilité mesure la capacité de l'assureur à couvrir ses engagements, un ratio de solvabilité supérieur à 100% signifie que l'assureur a suffisamment de fonds propres pour honorer ses engagements et vice-versa.

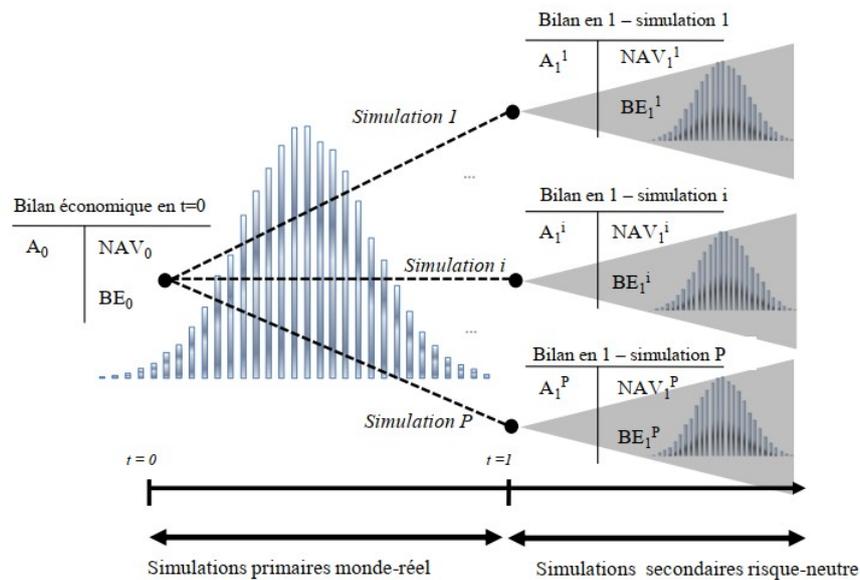


FIGURE 1.5 – Illustration de l’approche simulation dans les simulations (source : [Ben])

$$\text{ratio de solvabilité} = \frac{\text{Fonds Propres}}{SCR} \quad (1.8)$$

1.2.3 La notion de *market-consistency*

Dans cette partie on discutera la notion de la *market-consistency*, et la motivation derrière son application en assurance. Notre discussion inclura une analyse critique quant aux limites de son application.

Definition 1.2.1 (Market Consistency). *A market-consistent value of an asset or liability is its market value, if it is readily traded on a market at the point in time that the valuation is struck, and, for any other asset or liability, a reasoned best estimate of what its market value would have been had it been readily traded at the relevant valuation point.*

Le principe d’évaluation en *fair value* a connu son apparition dans le monde financier à travers l’article fondateur de [BS73]. Mais qu’en n’est t’il de son application dans le domaine de l’assurance ?

En effet, si la juste valeur de l’actif de l’assureur est fourni par les marchés financiers, la juste valeur du passif est plus difficile à estimer. Cela provient principalement du fait qu’il n’existe pas un marché liquide pour les risques spécifiques des contrats d’assurance (rachats, mortalité, ...).

La pratique courante consiste à faire des analogies entre les garanties et les options du passif et des produits financiers échangés sur des marchés financiers liquides. Néanmoins

il faut justifier la relation de correspondance entre ces produits et les engagements du passif.

Une réflexion couplée d'une analyse critique autour de cette optionnalité sous-jacente aux contrats d'assurance, sera menée d'une manière détaillée dans la suite du mémoire.

Chapitre 2

Généralités sur les générateurs de scénarios économiques

Un générateur de scénarios économiques peut se définir comme un outil intégrant des modèles mathématiques permettant de simuler à un horizon donné un ensemble de facteurs de risques financiers (on cite par exemple les taux d'intérêt, les taux d'inflation, les rendements action, les rendements immobilier, ...), moyennant une structure de dépendance prenant en compte les interactions entre ces derniers. De ce fait il s'agit d'un outil très utile pour déterminer les valeurs économique d'actif, du Best Estimate et de fonds propres, mais aussi pour évaluer avec précision les risques de la compagnie.

2.1 Les structures possibles pour un GSE

Un GSE décrit l'évolution simultanée de plusieurs facteurs de risque, cette inter-dépendance entre les facteurs de risque nous impose de définir une structure pour notre GSE. Généralement on distingue entre deux architectures possibles pour le GSE.

Modèle composite

Dans un modèle composite les classes d'actifs sont décrites en amont de l'agrégation. Chaque classe est diffusée par sa propre dynamique indépendamment des autres. Ensuite l'agrégation des classes est faite en introduisant des corrélations entre elles. Cette structure est plus facile à mettre en place mais sa cohérence n'est pas garantie.

Modèle intégré

Dans un modèle intégré les classes d'actifs sont décrites de manière structurée à partir d'une variable explicative de référence. Généralement ils proposent une description de l'inflation dont dérive les autres indices. Ils ont l'avantage d'être simples et de mise en oeuvre et d'assurer une cohérence globale.

2.2 Étapes de construction d'un GSE

La construction d'un GSE passe par plusieurs étapes :

1. **Sélection des facteurs de risque à modéliser** : Il faut bien sélectionner les facteurs de risque à modéliser, en voici une liste non exhaustive des facteurs de risque possibles :
 - Les taux nominaux et réels ;
 - Les indices « actions » (avec et hors dividende) ;
 - Le taux de dividende « actions » ;
 - L'indice de l'inflation.
2. **Choisir l'univers de projection** : En fonction du besoin de notre GSE (besoins de valorisation, gestion de risque, ...), il faut choisir l'univers de projection : risque neutre ou historique.
3. **Choix des modèles** : Plusieurs modèles sont possibles pour chaque facteur de risque, le choix du modèle doit dépendre de plusieurs critères qui permettent d'évaluer sa capacité à avoir des propriétés souhaitées. Par exemple pour les modèles de taux on peut lister les propriétés suivantes : temps de calcul, taux négatifs, expolivité, **capacité à reproduire le smile de volatilité**.
4. **Choix de la méthode et des données de calibrage** : Dans un GSE risque neutre les modèles sont calibrés sur des données de marché (Call, Caps, Swaptions, ...). Le choix des données de calibrage doit être cohérent avec les caractéristiques (duration, moneyness, smile, ...) de l'actif et du passif de la compagnie. Le choix de l'algorithme d'optimisation peut dépendre de sa précision et sa rapidité d'exécution.
5. **Simulation et validation du modèle** : La simulation des facteurs de risque nécessite le choix d'un RNG (Random Number Generator), plusieurs RNG sont possibles (Mersenne Twister, ...). La validation des scénarios produits diffèrent selon l'univers de projection, pour un GSE risque neutre on vérifie généralement les propriétés suivantes des trajectoires :
 - **La martingalité** : On vérifie la martingalité des déflateurs et des prix Zéro-Coupon : on doit retrouver les données initiales de calibrage.
 - **La market-consistency** : On vérifie si on retrouve les prix des instruments financiers utilisé lors du calibrage, en utilisant une approche *monte-carlo*.
 - **Réplication du smile** de la surface de volatilité utilisée pour le calibrage.

2.3 Les différents univers de projections

Selon leurs besoins d'utilisation, on distingue deux types de conceptions pour un GSE :

- **GSE risque neutre** : Les dynamiques des différentes classes d'actifs sont étudiées sous une mesure risque neutre. Sous cette mesure tous les actifs rapporte un même rendement au taux sans risque. Il permet alors de vérifier la notion de *market-consistency* imposée par le régulateur et il est utilisé pour déterminer la valeur économique du bilan. Les modèles sont calibré sur les données du marché.
- **GSE monde réel** : Il est utilisé dans une perspective de gestion de risque, car il permet de faire des projections des actifs à court terme ainsi que les études ALM en respectant les propriétés réelles des classes d'actifs, observées en se basant sur un historique. Sous la probabilité monde réel le rendement des actifs est majoré d'un prime de risque par rapport au rendement sans risque ce qui permet de décrire réellement les dynamiques de ses classes d'actifs. Les modèles sont calibrés sur un historique de données.

Remarque 3. *Le taux nominal est un élément crucial dans un GSE risque neutre, car il permet d'avoir les facteurs d'actualisation pour les flux futurs; ce qui est indispensable pour estimer la PVFP pour l'assureur. Dans le cadre de ce mémoire nous nous intéressons particulièrement à la modélisation du taux nominal, en vue de respecter la market-consistency.*

Nous détaillons dans ce qui suit les deux univers de projection : univers risque neutre et historique.

L'univers de projection risque neutre

Cet univers dépend directement de la notion de probabilité risque neutre, notion fondamentale de la théorie de valorisation des produits dérivés en finance. Sous Solvabilité II les assureurs doivent évaluer leurs bilans en valeur économique, d'une part la valeur marché des actifs et d'autre part les coûts des options et garanties futures sous-jacentes aux contrats d'assurance, ces derniers doivent valoriser sous la mesure risque neutre conformément aux pratiques des marchés financiers. Les valeurs économiques calculées doivent être cohérentes avec les produits optionnels disponibles sur le marché. L'actualisation des flux de ces produits se fait au taux sans risque, ce qui nécessite la modélisation du taux nominal pour déterminer les déflateurs.

Par exemple :

- La valorisation du *Best Estimate* et de la *NAV* nécessite la génération de scénarios économiques risque-neutres.
- Ces scénarios économiques risque-neutres sont nécessaires à la détermination de la Market-Consistent Embedded Value (MCEV), qui reflète la valeur de la compagnie d'assurance, et qui nécessite entre autre l'estimation de la valeur temps des options et garanties financières (TVOG).

L'univers de projection historique

Cet univers consiste à projeter les facteurs de risque de manière à refléter la réalité économique, pour cela les modèles sont calibrés sur les données historiques. Un GSE monde-réel permet d'estimer la distribution réel des facteurs de risque, cela permet d'analyser les flux projetés et d'évaluer les probabilités réels de réalisant d'évènements extrême. Ce qui justifie son utilisation pour des finalités de gestion de risques et de pilotage stratégique des compagnies d'assurance.

Par exemple, le calcul du SCR en modèle interne nécessite d'avoir la distribution réelle des fonds propres à l'horizon 1 an. Cette distribution est obtenue en faisant évoluer les différents facteurs de risque sous la probabilité historique.

Chapitre 3

Éléments de la théorie financière

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les éléments fondamentaux de la théorie financière que nous allons utiliser dans la suite de ce mémoire. Nous établirons également le lien entre ces notions et les calculs des assureurs sous solvabilité II.

3.2 Généralités sur les taux

Le taux d'intérêt nominal est un élément crucial dans les GSE car il permet de déterminer les facteurs d'actualisation des flux futurs du passif de l'assureur. Sa modélisation est dès lors très importante entre autres pour la valorisation économique du bilan de l'assureur (notre mémoire traitant les GSE risque-neutre). Dans ce qui suit nous introduisant quelques définitions et notations sur les taux d'intérêts ainsi que les produits sur ces taux. Nous reprenons les définitions de [BM01].

3.2.1 Rappels sur les taux spot

Notion du taux sans risque

Le taux sans risque est défini à travers le compte du marché monétaire :

Definition 3.2.1 (Compte du marché monétaire). *Un compte de marché monétaire est un investissement sans risque où les gains sont cumulés de manière continue au taux sans risque du marché. On note sa valeur $B(t)$ avec $B(0) = 1$ et on admet qu'elle suit l'équation différentielle suivante :*

$$dB(t) = r_t B(t) dt$$

La résolution de cette équation différentielle donne :

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \tag{3.1}$$

où r_s est le taux spot instantané auquel le compte bancaire croît continûment de façon déterministe (d'où l'appellation sans risque), appelé aussi taux court.

Le déflateur

Le déflateur est un élément clé dans la théorie de modélisation financière car il permet de comparer des flux reçus à des dates différentes. En assurance il est utilisé pour actualiser les flux futurs du passifs, en le cadre d'une valorisation économique du bilan, il est défini par :

Definition 3.2.2 (Facteur d'actualisation stochastique). *Un déflateur ou facteur d'actualisation stochastique entre t et T , est le montant en date t qui est équivalent à une unité monétaire payable à la date T . On le note $D(t, T)$ avec :*

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right). \quad (3.2)$$

Obligation zéro-coupon (ZC)

Definition 3.2.3 (Obligation zéro-coupon (ZC)). *Une obligation zéro-coupon de maturité T est un actif qui garantit à son détenteur le paiement d'une unité monétaire à l'instant T sans aucun paiement intermédiaire. On note $P(t, T)$ sa valeur à l'instant $t < T$ avec $P(T, T) = 1$.*

Une obligation zéro-coupon permet de faire le lien entre une quantité de monnaie payée à un instant présent, et celle payée à un instant ultérieur. En d'autres termes le prix $P(t, T)$ d'une obligation à l'instant t est la valeur d'un 1\$ à l'instant T . Donc son prix est lié de manière ou d'une autre aux déflateur. En effet, si le taux sans risque est déterministe, l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage garantie que :

$$P(t, T) = D(t, T) \quad (3.3)$$

Dans le cas où le taux sans risque est stochastique, le déflateur l'est également. Dans ce cas le théorème fondamentale de pricing dans univers d'absence d'opportunité d'arbitrage et de complétude de marché garantie que le prix de l'obligation zéro-coupon est égale à sa juste valeur soit :

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(t, T) | \mathcal{F}_t] \quad (3.4)$$

Remarque 4. *Dans un GSE risque neutre, la projection des taux nominaux revient à générer des tables de scénarios économiques pour les prix Zéro-Coupon et les déflateurs.*

3.2.2 Taux comptant (spot)

Taux d'intérêt en composition continue

Definition 3.2.4 (Taux d'intérêt en composition continue). *Le taux instantané composé continûment est le taux constant auquel un investissement de $P(t, T)$ à l'instant t croît **continûment** pour donner une unité de monnaie à T , on le note $R(t, T)$. La définition décrit formellement l'équation suivante :*

$$P(t, T)e^{R(t, T)(T-t)} = 1$$

Le taux d'intérêt en composition continue est définie par :

$$R(t, T) := -\frac{\ln P(t, T)}{(T-t)} \quad (3.5)$$

Où :

T_t : Est le temps restant jusqu'à maturité entre t et $T > t$, exprimée en année selon la convention choisie. Classiquement, nous avons $T - t = \frac{\text{nombre de jours}}{365}$.

Remarque 5. Dans le cas particulier où le taux court est déterministe et constant, le taux d'intérêt en composition continue est égale au taux sans risque.

Taux d'intérêt en composition simple

Definition 3.2.5 (Taux d'intérêt comptant en composition simple). *Le taux d'intérêt simplement composé est le taux auquel un investissement de $P(t, T)$ à l'instant t croît **proportionnellement** au temps pour rapporter une unité de monnaie à T . On le note $L(t, T)$ et le définit par la formule suivante :*

$$L(t, T) := \frac{1 - P(t, T)}{(T-t)P(t, T)} \iff P(t, T) = \frac{1}{1 + (T-t)L(t, T)} \quad (3.6)$$

La notation $L(t, T)$ vient du marché LIBOR où les taux d'intérêts en composition simple sont cotés. Les taux LIBOR forward seront traités dans les parties suivantes.

Taux d'intérêt en comptant en composition annuelle

Definition 3.2.6 (Taux d'intérêt comptant en composition annuelle). *Le taux d'intérêt annuellement composé est le taux auquel un investissement de $P(t, T)$ à l'instant t croît en étant réinvesti une fois par an pour rapporter une unité de monnaie à T . On le note $Y(t, T)$ et est défini par la formule suivante :*

$$Y(t, T) := \frac{1}{P(t, T)^{1/\tau(t, T)}} - 1 \iff P(t, T) = \frac{1}{(1 + Y(t, T))^{(T-t)}} \quad (3.7)$$

Équivalence entre les différents taux en temps infinitésimal

Si on suppose que $T - t = o(1)$, c'est à dire quand $T \rightarrow t^+$, nous obtenons :

$$\lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) = \lim_{T \rightarrow t^+} -\frac{\ln P(t, T)}{(T - t)} = -\frac{1}{P(t, T)} \lim_{T \rightarrow t^+} \frac{P(t, T) - 1}{(T - t)} = \lim_{T \rightarrow t^+} L(t, T)$$

En supposant que $r_{t+\epsilon}$, $\epsilon \rightarrow 0$ est \mathcal{F}_t -mesurable nous avons :

$$\lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) = \lim_{T \rightarrow t^+} -\frac{\ln P(t, T)}{(T - t)} = \lim_{T \rightarrow t^+} \frac{-\int_t^T r_s ds}{(T - t)} = r_t$$

Donc nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.2.1 (Équivalence entre les taux spot). $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$\lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) = \lim_{T \rightarrow t^+} L(t, T) = \lim_{T \rightarrow t^+} Y(t, T) = r_t \quad (3.8)$$

3.2.3 Rappels sur les contrats Forward et Swap

Contrats à terme (*forward*)

Un contrat forward est caractérisé par 3 dates t , T , S avec $0 \leq t \leq T \leq S$.

- t : la date d'évaluation.
- T : la date de départ.
- S : la date de fin.

Il est défini par :

Definition 3.2.7 (Contrat FRA). *Un contrat forward évalué à t , d'expiration T et de maturité S est un contrat qui garantit à son acheteur un taux d'intérêt fixe K à S contre le paiement à la même date du taux Libor $L(T, S)$ fixé en T . On le note $FRA(t, T, S, K)$ et son payoff est donné par :*

$$N(S - T) (K - L(T, S))$$

Où :

- N est le nominal.

Le payoff d'un Contrat FRA peut s'écrire :

$$(S - T)N(K - L(T, S)) = N \left((S - T)K - \frac{1}{P(T, S)} + 1 \right)$$

On peut déterminer la valeur de ce contrat en t par absence d'opportunité d'arbitrage. En effet, avoir une unité monétaire à la date S est équivalent à détenir une quantité $P(T, S)$ du nominal à la date T , donc la valeur de $(S - T)K + 1$ à la date t est simplement $P(t, S) ((S - T)K + 1)$. Et avoir 1 unité monétaire à la date T est équivalent à détenir

une quantité $\frac{1}{P(t,S)}$ à la date S , de plus avoir 1\$ en T est équivalent à détenir $P(t,T)$ en t . Donc la quantité $\frac{1}{P(t,S)}$ en S est équivalente à $P(t,T)$ en t .

La valeur du contrat pour l'acheteur en t s'écrit :

$$FRA(t, T, S, K) = N [(S - T)P(t, S)K - P(t, T) + P(t, S)] \quad (3.9)$$

Le contrat étant juste à la date t , son prix en t doit être nul, ainsi :

$$\exists! K_{eq} : FRA(t, T, S, K_{eq}) = 0$$

Par absence d'opportunité d'arbitrage, le taux d'équilibre K_{eq} du FRA est donnée par :

$$K_{eq} = F(t, T, S) = \frac{P(t, T) - P(t, S)}{P(t, S)(S - T)}$$

D'où la définition du taux forward :

Definition 3.2.8 (Taux forward en composition simple). *Le taux forward évalué en t , de maturité S et d'expiration T , noté $F(t, T, S)$, est donné par :*

$$F(t, T, S) := \frac{P(t, T) - P(t, S)}{P(t, S)(S - T)} \quad (3.10)$$

On peut également définir un taux forward instantané :

Definition 3.2.9 (Taux forward instantané). *On note $f(t, T)$ le taux forward instantané évalué en t de maturité T , et on le définit par :*

$$f(t, T) := \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S) = -\frac{\partial P(t, T)}{\partial T}$$

Nous avons directement ainsi :

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u)du\right) \quad (3.11)$$

Contrat Swap

Un contrat Swap IRS (Interest Rate Swap) est la généralisation naturel d'un contrat Forward simple. Ce contrat permet à deux partie A et B de s'échanger un taux fixe contre un taux variable sur plusieurs date de paiement. Les parties fixe et variable de contrat sont respectivement appelées jambe fixe et jambe variable.

Pour la suite, nous supposons un calendrier de dates T_k et deux entier n et N tels que $T_k \in \mathcal{T} := \{T_n, \dots, T_{N-1}\}$. On note $\Delta T_k := T_{k+1} - T_k$ pour $k \in [n, N - 1]$.

Definition 3.2.10 (Contrat swap forward). *Le contrat swap receveur, de maturité T_n et de tenor $T_N - T_n$, est un contrat payant à son détenteur un taux fixe $N(T_{k+1} - T_k)K$, contre le taux Libor $N(T_{k+1} - T_k)L(T_k, T_{k+1})$, à chaque date de paiement $T_{k+1}, i \in \{n, \dots, N-1\}$. Nous notons la valeur de ce contrat en $t < T_n$, $IRS(t, T_n, T_N, \mathcal{T}, K, N)$ est donnée par la quantité :*

$$IRS(t, T_n, T_N, \mathcal{T}, K, N) = N \left(\sum_{k=n}^{N-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) (K - F(t, T_k, T_{k+1})) \right) \quad (3.12)$$

$$= \sum_{k=n}^{N-1} FRA(t, T_k, T_{k+1}, N, K) \quad (3.13)$$

En utilisant l'équation (3.9), on a :

$$IRS(t, T_n, T_N, \mathcal{T}, K, N) = N \left(\sum_{k=n}^{N-1} (\Delta T_{k+1} P(t, T_{k+1}) K - P(t, T_k) + P(t, T_{k+1})) \right) \quad (3.14)$$

$$= N \left(P(t, T_N) + P(t, T_n) + K \sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_{k+1} P(t, T_{k+1}) \right) \quad (3.15)$$

Où N est le nominal du contrat.

Par absence d'opportunité d'arbitrage la valeur de ce contrat en t est nulle, ainsi il existe une unique valeur K_{eq} qui rend le contrat équitable en t . Cette valeur est appelée *taux swap forward*.

Remarque 6. *Par convention, un investisseur entre dans un swap payeur lorsqu'il paie le taux fixe en échange du taux variable. Dans le cas contraire, on parle de swap receveur.*

Definition 3.2.11 (Taux swap forward). *Le taux swap forward évalué en t , pour les dates T_n, T_N , noté $S_{n,N}(t)$, est le taux qui annule le contrat $IRS(t, T_n, T_N, \mathcal{T}, K, N)$. Formellement :*

$$S_{n,N}(t) = \frac{P(t, T_n) - P(t, T_N)}{\sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(t, T_{k+1})} \quad (3.16)$$

Definition 3.2.12 (Taux swap). *Le taux swap évalué en t noté : $S_n(t)$, est le taux forward évalué en $T_n = t$:*

$$S_n(t) = \frac{1 - P(t, T_n)}{\sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(t, T_{k+1})} \quad (3.17)$$

Relation entre taux swap et taux forward

Nous pouvons exprimer le taux Swap en fonction des taux Forward de la manière suivante :

$$S_{n,N}(t) = \sum_{k=n}^{N-1} \alpha_k(t) F(t, T_k, T_{k+1}) \quad (3.18)$$

$$\text{Où : } \alpha_k(t) = \frac{\Delta T_k P(t, T_{k+1})}{\sum_{k=n}^{N-1} P(t, T_{k+1})}$$

Remarque 7. .

- Cette relation sera utile par la suite pour dériver la dynamique du taux Swap à partir de celle des taux forwards,
- On note également que les coefficients α_k dépendent aussi des taux forward.

Pour des soucis de simplification on supposera dans toute la suite que $N = 1$

3.3 Instruments financiers dérivés sur les taux d'intérêts

On présente dans cette section les différents produits dérivés sur les taux d'intérêt, ainsi que leur valorisation sous les hypothèses d'absence d'opportunité d'arbitrage et de complétude de marchés. On s'intéressera également à la relation de correspondance entre les caractéristiques de ses produits dérivés et le passif des assureurs.

3.3.1 Caplet/floorlet

Un *caplet* est une option call de strike K sur un contrat forward FRA. Le payoff à maturité d'un *caplet* associé à un contrat forward d'expiration T_k et de maturité T_{k+1} est donnée par :

$$\text{caplet}_{T_k}(T_k, T_{k+1}) = \Delta T_k (F(T_k, T_k, T_{k+1}) - K)_+ \quad (3.19)$$

En d'autres termes un *Caplet* est un contrat qui donne à son acheteur, à la date de maturité T_{k+1} , le droit (mais non l'obligation) d'échanger un taux fixe K (le *strike*) contre le taux LIBOR sur la période $[T_k, T_{k+1}]$ (ce taux est révélé à la date d'expiration T_k du contrat FRA). Un *Caplet* permet de se couvrir contre un scénario de hausse des taux d'intérêts.

Typiquement, les *caplets* ne sont pas négociés en tant que tel dans les marchés financiers, ils sont vendus sous forme de séquences qu'on appelle *caps*. Un *cap* est simplement une séquence de *caplets* sur un calendrier $\mathcal{T} = \{T_n, \dots, T_N\}$, son payoff vu de T_n est simplement la somme des payoffs des *caplets* actualisés :

$$\text{cap}_{T_n}(T_n, T_N) = \sum_{k=n}^{N-1} D(T_n, T_k) \text{caplet}_{T_k}(T_k, T_{k+1}) \quad (3.20)$$

Un *cap* peut être vu comme un contrat swap payeur *IRS*, où les paiements successive sont effectués seulement si leurs valeurs sont positives.

De même, un *floorlet* permet de se couvrir contre un scénario de baisse des taux. son payoff à maturité s'écrit :

$$\text{floorlet}_{T_k}(T_k, T_{k+1}) = \Delta T_k (F(T_k, T_k, T_{k+1}) - K)_- \quad (3.21)$$

Un *floor* est une séquence de *floorlets*, son payoff vu de T_n est :

$$\text{floor}_{T_n}(T_n, T_N) = \sum_{k=n}^{N-1} D(T_n, T_k) \text{floorlet}_{T_k}(T_k, T_{k+1}) \quad (3.22)$$

Remarque 8. *Seules les volatilités des caps sont des informations de marché. On peut néanmoins en extraire les volatilités des caplets en ayant recours aux méthodes de strip-ping.*

Valorisation des caplets/floorlets

Sous l'absence d'opportunité d'arbitrage (les principes fondamentaux de pricing sont rappelés à l'annexe), le prix du *caplet* sur la période $[T_k, T_{k+1}]$ à l'instant t est donné l'espérance sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} conditionnée par rapport à la tribu d'information disponible \mathcal{F}_t :

$$\text{Caplet}(t, T_k, T_{k+1}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[D(t, T_{k+1}) \Delta T_k (F(T_k, T_k, T_{k+1}) - K)_+ | \mathcal{F}_t \right] \quad (3.23)$$

On effectue un changement de probabilité à la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{T_{k+1}}$ -forward neutre associé au numéraire $N_t = P(t, T_{k+1})$. La densité de Radon-Nikodym correspondante est donnée par :

$$\frac{d\mathbb{Q}^{T_{k+1}}}{d\mathbb{Q}} = \frac{N_{T_{k+1}}}{N_t} \times D(t, T_{k+1}) = \frac{D(t, T_{k+1})}{P(t, T_{k+1})} \quad (3.24)$$

Nous avons alors :

$$\text{Caplet}(t, T_k, T_{k+1}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_{k+1}}} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^{T_{k+1}}} D(t, T_{k+1}) \Delta T_k (F(T_k, T_k, T_{k+1}) - K)_+ | \mathcal{F}_t \right] \quad (3.25)$$

$$= \Delta T_k P(t, T_{k+1}) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_{k+1}}} \left[(F(T_k, T_k, T_{k+1}) - K)_+ | \mathcal{F}_t \right] \quad (3.26)$$

On peut remarquer que le processus décrivant le taux forward $(F(t, T_k, T_{k+1}))_{t \in [0, T_k]}$ est martingale sous mesure $\mathbb{Q}^{T_{k+1}}$ -forward. On peut faire des hypothèses sur la dynamique des taux forward pour exprimer l'espérance conditionnelle dans 3.26.

Convention de Bachelier : Si on suppose que les taux forward suivent une dynamique de Bachelier :

$$dF(t, T_k, T_{k+1}) = \sigma_k dW_t^{k+1}$$

L'espérance dans 3.26 peut s'exprimer à l'aide de la formule de Bachelier :

$$Caplet(t, T_k, T_{k+1}) = \Delta T_k P(t, T_{k+1}) \sqrt{T_k} \left(\tilde{d}_1 \mathcal{N}(\tilde{d}_1) + f(\tilde{d}_1) \right) \quad (3.27)$$

Convention de Black : Si on suppose que les taux forward suivent une dynamique de Black, nous avons donc :

$$dF(t, T_k, T_{k+1}) = F(t, T_k, T_{k+1}) \sigma_k dW_t^{k+1}$$

L'espérance dans 3.26 peut s'exprimer à l'aide de la formule de Black-Scholes, on obtient donc :

$$Caplet(t, T_k, T_{k+1}) = \Delta T_k P(t, T_{k+1}) (F(t, T_k, T_{k+1}) \mathcal{N}(d_+) - K \mathcal{N}(d_-)) \quad (3.28)$$

Où :

- $\tilde{d}_1 = \frac{F(t, T_k, T_{k+1}) - K}{\sigma_k \sqrt{T_k}}$ et $d_{+/-} = \frac{\ln\left(\frac{F(t, T_k, T_{k+1})}{K}\right) + / - \frac{1}{2} \sigma_k^2 T_k}{\sigma_k \sqrt{T_k}}$
- $z \rightarrow \mathcal{N}(z)$ et $z \rightarrow f(z)$ sont respectivement la fonction de répartition et la fonction de densité d'un loi normale centrée réduite.

3.3.2 Swaptions

Un autre produit dérivé auquel nous accorderons une attention particulière par la suite, sont les options sur les contrats swap *IRS* : les *swaptions*. Une *swaption* donne à son détenteur le droit d'entrer dans un swap IRS (receveur ou payeur de taux fixe K) à une date future T_n , appelée maturité de la swaption. L'ensemble des dates de paiement du swap $\mathcal{T} = \{T_n, \dots, T_N\}$ est appelé la structure de ténor de la swaption, et $T_N - T_n$ la ténor de la swaption. Le payoff d'une swaption à sa date de maturité est donné par :

$$\left(\sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(T_n, T_{k+1}) \xi (F(T_n, T_k, T_{k+1}) - K) \right)_+ \quad (3.29)$$

Où : $\xi = 1$ si le contrat swap est payeur et $\xi = -1$ s'il est receveur.

En d'autres termes, le détenteur d'une swaption l'exerce lorsque la valeur à la date de maturité T_n du contrat swap est positive.

Le payoff 3.29 peut se mettre sous la forme :

$$\sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(T_n, T_{k+1}) (S_{n,N}(T_n) - K)_+ = A_{n,N}(T_n) (S_{n,N}(T_n) - K)_+ \quad (3.30)$$

Où :

- $S_{n,N}$ est le taux swap forward défini dans (3.2.11) ;
- $A_{n,N} = \sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(T_n, T_{k+1})$, appelée annuité.

Moneyiness des swaptions

Une swaption est dite At-The-Money (ATM) si $K = S_{n,N}(0)$, In-The-Money (ITM) si $K < S_{n,N}(0)$ et Out-Of-Money si $K > S_{n,N}(0)$. Généralement, on réfère aux swaptions OTM et ITM par des swaptions Away-From-the-Money (AFM).

Remarque 9. Les swaptions AFM sont cotées en terme de strike relative défini par : $k_{m,n} := K - S_{n,N}(0)$.

Valorisation des swaptions

En absence d'opportunité d'arbitrage le prix d'une swaption à la date t ayant les même caractéristiques citées précédemment est donné par :

$$Swaption(t, T_n, T_N) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[D(t, T_n) A_{n,N}(T_n) (S_{n,N}(T_n) - K)_+ | \mathcal{F}_t \right] \quad (3.31)$$

On effectue un changement de probabilité associé au numéraire $N_t = A_{n,N}(t)$. La densité de Randon-Nikodym est :

$$\frac{d\mathbb{Q}^{n,N}}{d\mathbb{Q}} = \frac{N_{T_n}}{N_t} \times D(t, T_n) = \frac{A_{n,N}(T_n)}{A_{n,N}(0)} \times D(t, T_n) \quad (3.32)$$

On alors :

$$Swaption(t, T_n, T_N) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,N}} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^{n,N}} D(t, T_n) A_{n,N}(T_n) (S_{n,N}(T_n) - K)_+ | \mathcal{F}_t \right] \quad (3.33)$$

$$= A_{n,N}(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,N}} \left[(S_{n,N}(T_n) - K)_+ | \mathcal{F}_t \right] \quad (3.34)$$

Hypothèse de Bachelier : En supposant que le taux swap forward suit une dynamique de Bachelier $dS_{n,N}(t) = \sigma_{n,N}dW_t^{n,N}$, le prix de la swaption s'exprime par :

$$Swaption(t, T_n, T_N) = A_{n,N}(t)\sqrt{T_n} \left(\tilde{d}_1 \mathcal{N}(\tilde{d}_1) + f(\tilde{d}_1) \right) \quad (3.35)$$

Hypothèse de Black : En supposant que le taux swap forward suit une dynamique de Black $dS_{n,N}(t) = S_{n,N}(t)\sigma_{n,N}dW_t^{n,N}$, le prix de la swaption s'exprime dans ce cas par :

$$Swaption(t, T_n, T_N) = A_{n,N}(t) (S(t, T_n, T_N)\mathcal{N}(d_+) - K\mathcal{N}(d_-)) \quad (3.36)$$

Avec :

$$— \tilde{d}_1 = \frac{S(t, T_n, T_N) - K}{\sigma_{n,N}\sqrt{T_n}} \quad \text{et} \quad d_{+/-} = \frac{\ln\left(\frac{S(t, T_n, T_N)}{K}\right) + / - \frac{1}{2}\sigma_{n,N}^2 T_n}{\sigma_{n,N}\sqrt{T_n}}$$

Remarque 10. *En pratique, les formules de Black et de Bachelier peuvent être utilisées pour convertir les prix de marché en volatilités et vice-versa. Usuellement les swaptions et caps sont cotés en volatilité Black.*

3.3.3 Choix des instruments et analogie avec le passif de l'assureur

Dans cette partie on s'intéresse à établir une analogie entre les options et garanties contenues dans le passif des compagnies d'assurance vie, et celles disponibles sur le marché financier. En général, il est difficile de trouver une correspondance parfaite car le passif de l'assureur peut admettre une structure complexe vue le grand nombre de facteurs de risques (réplicables ou non) qu'ils le régissent. La littérature contient des tentatives pour approximer les caractéristiques de cette optionnalité (maturités/tenors, strikes, moneyness, ...) à des options existantes sur les marchés financiers. En effet, Armel & Planchet dans [AP18] ont proposé de répliquer le *Best Estimate* par des *Options Cliquets*.

Dans un premier temps on se limitera à un exemple inspiré de [BON16] pour constituer une première intuition autour de cette relation de correspondance entre le passif et les produits optionnels présents sur le marché financiers.

On considère un produit d'épargne en euros avec taux minimum garanti (TMG) et clause de participation aux bénéfices (PB). On suppose qu'à chaque date, le taux servi à l'assuré correspond au maximum entre le TMG et une quote-part du taux de rendement de la compagnie diminué des chargements sur encours. Nous introduisons les notions suivantes :

- $PM(0)$: provision mathématique de l'assuré à la date initiale ;
- r_g le taux minimum garanti en composition continue $r_g = \ln(1 + TMG)$;
- $r_{rdt}(t)$ le taux de rendement continu de l'actif en période t ;
- r_{pb} le taux de participation aux bénéfices (PB) ;
- r_{ch} le taux de chargement ;
- $r_{servi}(t)$ le taux servi en période t

Le taux servi est le maximum entre le taux garanti et le rendement net de l'actif :

$$e^{r_{servi}(t)} - 1 = \max \left(e^{r_g} - 1; r_{pb} \left(e^{r_{rdt}(t)} - 1 \right) - (e^{r_{ch} - 1}) \right) \quad (3.37)$$

Qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$e^{r_{servi}(t)} = e^{r_g} + r_{pb} \max \left(e^{r_{rdt}(t)} - \frac{r_{pb} + e^{r_{ch}} + e^{r_g} - 2}{r_{pb}}; 0 \right) \quad (3.38)$$

La provision mathématique constitué à l'instant t est donnée par :

$$PM(t) = PM(0) \prod_{i:t_i \leq t} e^{r_{servi}(t_i)}$$

Donc la valeur marché des engagements de l'assureur relatifs à la période t correspondent à :

$$L_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[D(0, t) PM(t) \right] \quad (3.39)$$

Les taux de rendements étant indépendants on se retrouve avec l'expression suivante pour L_t

$$L_t = PM(0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[D(0, t) \prod_{i:t_i \leq t} \left\{ e^{r_g} + r_{pb} D(0, t) \max \left(e^{r_{rdt}(t_i)} - \frac{r_{pb} + e^{r_{ch}} + e^{r_g} - 2}{r_{pb}}; 0 \right) \right\} \right] \quad (3.40)$$

$$= PM(0) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\prod_{i:t_i \leq t} D(t_{i-1}, t_i) \prod_{i:t_i \leq t} \left\{ e^{r_g} + r_{pb} D(0, t) \max \left(e^{r_{rdt}(t_i)} - \frac{r_{pb} + e^{r_{ch}} + e^{r_g} - 2}{r_{pb}}; 0 \right) \right\} \right] \quad (3.41)$$

$$= PM(0) \prod_{i:t_i \leq t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[D(t_{i-1}, t_i) e^{r_g} + r_{pb} D(t_{i-1}, t_i) \max \left(e^{r_{rdt}(t_i)} - \frac{r_{pb} + e^{r_{ch}} + e^{r_g} - 2}{r_{pb}}; 0 \right) \right] \quad (3.42)$$

$$= PM(0) \prod_{i:t_i \leq t} \left\{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[D(t_{i-1}, t_i) e^{r_g} \right] + r_{pb} Call \left(t_{i-1}, t_i, \frac{r_{pb} + e^{r_{ch}} + e^{r_g} - 2}{r_{pb}} \right) \right\} \quad (3.43)$$

On voit apparaître le payoff d'une option européenne à l'intérieur du produit de maturité t_i et de strike $k = \frac{r_{pb} + e^{r_{ch}} + e^{r_g} - 2}{r_{pb}}$. Dans ce cas simple l'assureur a besoin de répliquer des options call de maturités $(t_i)_i$ qui sont les dates de revalorisation de la provision mathématique.

Reflexion atour de cette optionnalité

Dans un premier temps nous reproduirons les éléments d'analyse de [BON16]. On poussera la réflexion plus profondément à fur et à mesure.

L'exemple précédent du calcul des provisions mathématiques, bien que simple permet de tirer des informations sur la *Moneyness* du portefeuille répliquant du passif de l'assureur. En effet, si le taux garanti est supérieur aux taux de marché on pourra penser à des *Swaptions* OTM pour le calibre, de même des *Swaptions* OTM pourront être utilisées pour calibrer les modèles de taux.

En générale la détermination de la moneyness du passif d'une compagnie d'assurance n'est pas toujours simple. En fait, les options et les garanties n'ont pas toutes les mêmes caractéristiques. Plusieurs approches sont possibles pour traiter ce problème, l'une d'elles consiste à attribuer un poids aux *Swaptions* utilisées lors du calibrage.

Le smile de volatilité dans un cadre réglementaire

Solvabilité II impose à l'assureur d'être Market-Consistent, c'ad le calibrage des modèles doit être fait sur la prix de marché des produits dérivés, comme expliqué ci-dessus ces produits peuvent contenir des *Swaptions* AFM. Le smile de volatilité peut se définir par la dépendance de la volatilité implicite de la maturité et du strike.

Pour être *market-consistent*, les modèles de taux utilisés doivent être capable de reproduire les effets de marché (surface de volatilité par exemple).

Chapitre 4

Modélisation du taux d'intérêt

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on présentera de façon schématique les principaux modèles pour modéliser le taux d'intérêts (s'agissant du facteur du risque qui nous intéresse le plus dans le cadre de ce mémoire), tout en mettant le point sur leurs propriétés intéressantes ainsi que leurs avantages et limites. Classiquement on distingue trois grandes familles de modèles de taux. La modélisation peut porter autant sur le taux court que sur les taux forwards instantané ou les taux LIBOR forward.

4.2 Panorama des modèles de taux

4.2.1 Modèles d'équilibre général

Les modèles d'équilibre général sont généralement calibrés sur des données de marchés dans le but de répliquer certaines propriétés de la courbe des taux comme celle du retour à la moyenne. Deux modèles sont classiquement utilisés : le modèle de Vasicek (1977) et le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR).

4.2.1.1 Le modèle de Vasicek (1977)

Dans un modèle de Vasicek le taux court est modélisé par un processus d'**Ornstein-Uhlenbeck** :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Avec :

- b : moyenne long-terme du taux court
- a : vitesse de retour à la moyenne
- W_t : un mouvement brownien

L'application directe du lemme d'Itô à la fonction $f(t, r_t) = r_t e^{at}$, puis en intégrant on obtient :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u$$

Nous remarquons dans le modèle de Vasicek que les taux courts sont normalement distribués, dans ce modèle permet de générer des taux négatifs (peut être utilisé dans un contexte de taux très bas). Il permet également d'avoir des formules fermées pour les prix des obligations Zéro-coupon. Néanmoins il ne permet pas de reproduire la courbe des taux initiale.

4.2.1.2 Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (1985)

Dans le modèle de Vasicek les taux courts peuvent être négatifs. Cette propriété n'est pas toujours souhaitable dans certains contextes économiques. Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross impose aux taux d'être positifs dès que $r_0 > 0$. L'équation différentielle stochastique vérifiée par le taux court r_t dans le modèle CIR est donnée par :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

Où :

- b la valeur d'équilibre
- a la vitesse de retour à la moyenne
- σ la volatilité de r_t
- W_t est Mouvement Brownien

Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$ on a une unique solution adaptée est continue r_t telle que $r_t \geq 0$, $t \geq 0$. Si de plus la condition de Feller est satisfaite, alors on a $r_t > 0$, $t \geq 0$. La dynamique du modèle n'admet pas une solution directe, néanmoins les prix Zéro-Coupon peuvent être obtenus en formule fermées comme solution d'une équation différentielle de *Ricatti*. De même le modèle ne permet pas de reproduire la courbe des taux initiale.

4.2.2 Les modèles d'AOA (Absence d'opportunité d'arbitrage)

4.2.2.1 Le modèle de Hull-White

Le modèle de Hull-White a été introduit comme une extension des modèles de Vasicek et CIR. Sa dynamique stochastique s'écrit :

$$dr_t = \kappa(t) (\theta(t) - r_t) dt + \sigma(t)r_t^\alpha dW_t, \quad (4.1)$$

Avec :

- κ, θ, σ sont des fonctions déterministes du temps et $\alpha \geq 0$
- $(W_t)_{t \geq 0}$ est un Mouvement brownien standard.

On peut supposer pour simplifier que $\kappa(t) = \kappa$, $\sigma(t) = \sigma$ et $\alpha = 0$. Une application directe du lemme d'Itô sur $e^{\kappa t} r_t$ permet d'obtenir une solution directe de l'équation :

$$r_t = e^{-\kappa t} r_0 + \kappa \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} \theta(s) ds + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dW_s \quad (4.2)$$

Le processus du taux court $(r_t)_{t \geq 0}$ est gaussien ; le modèle permet de générer des taux négatifs. Les prix Zéro-Coupon peuvent être déterminés en formule fermée, et un bon choix de la fonction θ permet de reproduire la courbe des taux initiale.

Remarque 11. Pour tout $t \leq T$,

$$\theta(t) = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 \ln P^{Mkt}(0, t)}{\partial T^2} - \frac{\partial \ln P^{Mkt}(0, t)}{\partial T} + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-2\kappa t})$$

permet de reproduire parfaitement les Zéro-Coupon initiaux : $P(0, t) = P^{Mkt}(0, t)$, $t \leq T$.

4.2.3 Le cadre général de modélisation de Heath, Jarrow et Morton (HJM)

Le cadre de *Heath, Jarrow et Morton (HJM)* est basé sur la modélisation stochastique des processus de taux *forward* instantanés. L'idée derrière ce cadre de modélisation est l'existence d'une relation explicite entre les drifts et les volatilités des taux *forward* dans un contexte d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). En effet, supposant que le taux *forward* instantané suit la dynamique suivante :

$$df(t, s) = \alpha(t, s)dt + \sigma(t, s)dW(t) \quad (4.3)$$

Tel que :

- $(\alpha(t, u))_{0 \leq t \leq u}$ et $(\sigma(t, u))_{0 \leq t \leq u}$ sont des processus adaptés à la filtration engendrée par le mouvement brownien W .

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, *Heath - Jarrow - Morton* qu'il existe une relation particulière entre le drift $\alpha(t, \cdot)$, et la volatilité $\sigma(t, \cdot)$:

$$\alpha(t, s) = \sigma(t, s) \int_t^s \sigma(t, u) du \quad (4.4)$$

Idée de la preuve. En posant $Y_t = -\int_t^s f(t, u) du$, puis en remarquant que $P(t, s) = \exp\{Y_t\}$. La dynamique de Y_t , vérifie :

$$dY_t = f(t, t) dt - \int_t^s df(t, u) du \implies dY_t = r_t dt - \alpha^*(t, s) dt - \sigma^*(t, s) dW_t \quad (4.5)$$

Où $\alpha^*(t, s) = \int_t^s \alpha(t, u) du$ et $\sigma^*(t, s) = \int_t^s \sigma(t, u) du$.

Le résultat découle directement de l'application de la formule d'Itô sur $P(t, \cdot)$, tout en remarquant que sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage le drift de $P(t, \cdot)$ doit être égale à $r_t P(t)$. \square

Remarque 12. .

- Le cadre HJM propose un cadre général pour la modélisation de la courbe des taux. En effet, si on prend par exemple $\sigma(t, s) = \sigma e^{-a(s-t)}$, on retrouve le modèle de Hull & White.
- Le cadre HJM permet de reproduire la courbe des taux initiale. Néanmoins il modélise des quantités qui ne sont pas observable dans la réalité, sa calibration peut soulever certaines difficultés et il génère généralement des processus de taux courts qui ne sont pas markoviens.

4.2.4 Les modèles à Multi-Factoriels

Jusqu'à présent, l'aléa provient d'un mouvement Brownien unidimensionnel. Par conséquence, la corrélation entre les taux de différentes maturité est parfaite car l'aléa dans les prix ZC des différentes maturités provient uniquement du processus de taux court. Ce qui n'est pas observé réellement sur le marché. Les modèles multifactoriels sont introduit pour répondre à ces limitations.

4.2.4.1 Le modèle G2++

Il s'agit d'un modèle bi-factoriel définissant le taux court comme la somme de deux processus gaussiens indépendants ajustés par une fonction déterministe qui permet de reproduire la courbe initiale du marché. La dynamique du taux court est donnée par :

$$r_t = x_t + y_t + \phi(t), \quad r_0 = r^0$$

Où les processus stochastiques $(x_t)_{t \geq 0}$ et $(y_t)_{t \geq 0}$ sont déterminés par les diffusions suivantes :

$$dx_t = -ax_t dt + \sigma dW_1(t) \quad \text{et} \quad dy_t = -by_t dt + \eta dW_2(t)$$

Avec

- $\phi(t)$ est une fonction d'ajustement permettant de reproduire la courbe de taux initiale.
- a, b : coefficients de retour à la moyenne.
- σ, η : volatilités des processus.
- (W_1, W_2) Mouvement Brownien bi-dimensionnel avec corrélation ρ : $d\langle W_1, W_2 \rangle_t = \rho dt$

Par simple intégration des deux équations stochastiques de x_t et y_t , on obtient dès lors :

$$r_t = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(t) + \phi(t) \quad (4.6)$$

Alors sous la filtration \mathcal{F}_s avec $t \geq s$.

$$\mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_s] = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \phi(t)$$

$$\text{Var}[r_t | \mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2a} \left(1 - e^{-2a(t-s)}\right) + \frac{\eta^2}{2b} \left(1 - e^{-2b(t-s)}\right) + 2\rho \frac{\eta\sigma}{a+b} \left(1 - e^{-(a+b)(t-s)}\right)$$

Comme tous les coefficients dans (4.6) sont déterministes, et puisque (W_1, W_2) est un processus gaussien, alors r_t est un processus gaussien.

Le prix à l'instant t d'un zéro-coupon de maturité T est

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T \phi(u)du - M(t, T) + \frac{1}{2}V(t, T)\right)$$

Avec pour tout $t \leq T$

$$M(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}x_t + \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b}y_t$$

$$\begin{aligned} V(t, T) = & \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - t + \frac{2}{a}e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right) + \frac{\sigma^2}{b^2} \left(T - t + \frac{2}{b}e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b}e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2a}\right) \\ & + 2\rho \frac{\eta\sigma}{ab} \left(T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(b+a)(T-t)} - 1}{b+a}\right) \end{aligned}$$

Remarque 13. En prenant, pour tout $t \leq T$,

$$\phi(T) = f^M(0, T) \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-bT})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT})$$

On pourra reproduire la courbe est taux initiale.

4.2.4.2 Le modèle Hull & White à deux facteurs

Le modèle Hull & White à deux facteurs peut se voir comme une généralisation du modèle G2++. La dynamique du modèle est :

$$dr(t) = (a(t) + c(t) - b(t)r(t))dt + \sigma_1(t)dW_1(t) \quad (4.7)$$

Avec $r_0 = 0$ et $(c(t))_{t>0}$ est un processus stochastique de retour à la moyenne suivant la dynamique suivante :

$$dc(t) = -dc(t)dt + \sigma_2(t)dW_2(t) \quad (4.8)$$

Avec :

- $b(t)$ la vitesse de retour à la moyenne
- d une constante positive
- $a(t)$ fonction déterministe qui dépend du temps t
- $\sigma_1(t)$ la volatilité de $r(t)$ dépendante du temps t
- $\sigma_2(t)$ la volatilité de $c(t)$ dépendante du temps t
- (W_1, W_2) Mouvement Brownien bi-dimensionnel avec corrélation $\rho : d\langle W_1, W_2 \rangle_t = \rho dt$

4.2.5 Les modèles de marché : *Market Models*

Dans les parties précédentes nous avons introduit des modèles stochastiques pour modéliser les taux courts; le taux sans risque, taux forward instantané ..., hors ses quantités ne sont pas observables sur le marché, et le pricing de certains produits dérivés dans le cadre de ses modèles peut être confronté à des difficultés théoriques (absence de formules fermées...).

Les modèles de marché, introduit dans [BGM97] et [Jam97] sont devenus très populaires parmi les praticiens d'une part car il permettent de modéliser des quantités directement observables sur les marchés (taux forwards : LFM, taux : LSM), et d'autre part, ils permettent de valoriser les caplet/floorlet et les swaptions, modulo des approximations, en utilisant la formule de Black-Scholes (Voir section 3.26).

On énoncera l'hypothèse fondamentale du *Libor Market Model* (LMM) dans un premier temps, on le reverra avec plus de détails dans les sections suivantes. On supposera en toute généralité sous le modèle LMM, le taux forward $F(t, T_k, T_{k+1})$ suit un mouvement Brownien Géométrique sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{T_{k+1}}$ associé au changement de numéraire $N_t = P(t, T_{k+1})$:

$$\frac{dF(t, T_k, T_{k+1})}{F(t, T_k, T_{k+1})} = \sigma_k(t) dZ_t^{k+1} \quad (4.9)$$

Où :

- $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_N\}$ la structure de tenor,
- Z^k est un Mouvement Brownien M -dimensionnel corrélé avec :

$$d\langle Z_i^k(t), Z_j^k(t) \rangle = \rho_{ij}(t) dt$$

- ρ est la matrice de corrélation entre les Mouvements Browniens.

Remarque 14. On rappelle qu'on peut définir la corrélation à un instant t entre deux processus par le biais de leurs variations quadratiques. Dans notre cas 4.23, nous avons :

$$\text{Corr}_t(F_i, F_j) = \frac{\langle dF_i, dF_j \rangle_t}{\langle dF_i \rangle_t \langle dF_j \rangle_t} = d\langle Z^{i+1}, Z^{j+1} \rangle_t \quad (4.10)$$

4.3 Focus sur le *Libor Market Model*

4.3.1 Dynamique sous différents numéraires

L'équation de diffusion 4.23 permet de simuler les taux forwards sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{T_{k+1}}$ sous laquelle le taux forward associé est une martingale, hors la simulation jointe des trajectoires de taux forward associés à différentes dates de maturité n'aura de sens que si elle est faite sous une même mesure. Cela nécessite la définition d'une mesure commune.

Le choix naturelle est la mesure risque-neutre associé au compte bancaire. Néanmoins, sous les spécifications du modèle LMM, à savoir la structure de tenor discrète, le compte bancaire qui par ailleurs est défini par la composition continue du taux sans risque $(r_t)_t$, n'est pas le choix convenable. En effet, dans le cadre du modèle LMM le taux sans risque n'est pas directement défini.

Dynamique sous la mesure LIBOR Spot

Pour contourner cette difficulté le modèle LMM est étudié sous une mesure alternative appelée la mesure LIBOR Spot. L'idée est de fournir une alternative discrète de la mesure risque neutre qui est conforme à la structure de ténor défini dans le cadre du modèle LMM. Considérons le numéraire :

$$B_d(t) = \frac{P(t, T_{\beta(t)})}{\prod_{k=1}^{\beta(t)-1} P(T_k, T_{k+1})} = P(t, T_{\beta(t)}) \prod_{k=1}^{\beta(t)-1} (1 + \Delta T_k F_k(T_k)). \quad (4.11)$$

Avec :

- $\beta(t) = \min \{k \geq 1 : T_k \geq t\}$, est l'indice du premier taux forward non expiré au temps t .

Le numéraire B_d correspond à l'investissement d'une unité de monnaie successivement dans des obligations Zéro-Coupon, avec des dates de revalorisation correspondantes aux maturités de la structure de ténor. B_d est usuellement appelée, la mesure LIBOR Spot et \mathbb{Q}^d est la mesure de probabilité y associée.

Sous la mesure LIBOR Spot la dynamique des taux forward est donnée par la diffusion suivante :

Proposition 4.3.1. *Sous la mesure LIBOR spot, la dynamique du k-ième taux forward s'écrit :*

$$dF_k(t) = F_k(t) \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\Delta T_j \rho_{jk} \sigma_j(t) \sigma_k(t) F_j(t)}{1 + \Delta T_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t) F_k(t) dZ_k^d(t) \quad (4.12)$$

Démonstration. Posons $D_t = \left(\frac{d\mathbb{Q}^d}{d\mathbb{Q}^{k+1}} \right) |_{\mathcal{F}_t}$ l'exponentiel de Dooléan (voir par exemple la référence [Cha]) définissant le changement de probabilité $\mathbb{Q}^{k+1} \rightarrow \mathbb{Q}^d$. On remarque également que $\beta(t) \leq T_k$. Nous avons :

$$D_t := \frac{B^d(t)}{B^d(0)} \times \frac{P(0, T_{k+1})}{P(t, T_{k+1})} = \frac{P(t, T_{\beta(t)})}{P(t, T_{k+1})} \times \prod_{k=1}^{\beta(t)-1} (1 + \Delta T_k F_k(T_k))$$

On peut remarquer que la dynamique des taux forwards sous la mesure \mathbb{Q}^d est simplement celle sous la mesure associée au numéraire $P(t, T_{\beta(t)})$. Nous commençons par définir le changement de numéraire de \mathbb{Q}^{i+1} à $\mathbb{Q}^{\beta(t)}$.

Soit $D_t^i = \left(\frac{d\mathbb{Q}^{\beta(t)}}{d\mathbb{Q}^{i+1}} \right) |_{\mathcal{F}_t} = \frac{P(t, T_{\beta(t)}) P(0, T_{i+1})}{P(t, T_{i+1}) P(0, T_{\beta(t)})} = \frac{P(0, T_{i+1})}{P(0, T_{\beta(t)})} \prod_{k=\beta(t)}^i (1 + \Delta T_k F(t, T_k, T_{k+1}))$. D'après le théorème de Girsanov généralisé (voir [Cha] par exemple), nous avons que $dZ^\beta = dZ^{i+1} - \langle dZ^{i+1}, d \ln(D_i) \rangle$ est un Mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}^{\beta(t)}$, or :

$$\langle dZ^{i+1}, d \ln(D_i) \rangle = \sum_{k=\beta(t)}^i \langle dZ^{i+1}, d \ln(1 + \Delta T_k F(t, T_k, T_{k+1})) \rangle \quad (4.13)$$

$$= \sum_{k=\beta(t)}^i \langle dZ^{i+1}, \frac{\Delta T_k \sigma_k(t) F_k(t)}{1 + \Delta T_k F_k(t)} dZ^{k+1} \rangle \quad (4.14)$$

$$= \sum_{k=\beta(t)}^i \frac{\Delta T_k \rho_{ki} \sigma_k(t) F_k(t)}{1 + \Delta T_k F_k(t)} dt \quad (4.15)$$

Ce qui conclut la preuve. □

4.3.2 Les extensions du modèle LMM

4.3.2.1 La réplication du smile de volatilité

Le modèle LMM permet de valoriser les Caplets et les Swaptions, en faisant les approximations nécessaires en utilisant la formule classique de Black&Scholes utilisée en Equity. Néanmoins, cette approche classique de valorisation impose d'avoir la même volatilité implicite pour tous les strikes et toutes les maturités des options considérées.

Pour pouvoir reproduire ces effets de marché, plusieurs modèles ont été introduits dans le cadre de modélisation de l'Equity. Le modèle le plus célèbre pour une réplication complète du smile est le modèle de Heston qui appartient à la famille des modèles à volatilité stochastique en ajoutant un facteur de volatilité stochastique d'une dynamique CIR.

Ces modèles ont été initialement introduits pour la modélisation de l'Equity, mais des développements similaires ont été introduit pour les modèles de marché. Nous présentons brièvement ces modèles dans trois catégories : Modèles à volatilité locale, Modèles à volatilité stochastique et Modèles à paramètres incertain.

4.3.2.2 Modèles à volatilité locale

Dans cette famille de modèles, la dépendance du strike est représentée en modélisant la volatilité à travers une fonction du temps et du sous-jacent à l'instant t .

La dynamique générale des taux forwards pour cette famille de modèles est donnée par :

$$dF_k(t) = C_k(t, \sigma_k(t), F_k(t)) dZ_t^{k+1} \quad (4.16)$$

Dans la suite, différents choix de la fonction C_k seront présentés.

La dynamique des taux forwards sous la mesure Libor Spot, dans le cadre de ces modèles est donnée par :

$$dF_k(t) = C_k(t) \left[\sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\Delta T_j \rho_{jk} C_j(t)}{1 + \Delta T_j F_j(t)} dt + dZ_k^d(t) \right] \quad (4.17)$$

4.3.2.2.1 Le DD-LMM Ce modèle prend en considération des taux forward non-positive en introduisant un facteur de déplacement $\delta \geq 0$ qu'on appellera *shift* par la suite. Le DD-LMM décrit l'évolution des taux forward déplacés $\tilde{F}_k := F_k + \delta$. Dans ce cas nous avons $C_k(t, \sigma_k(t), x) = \sigma_k(t)(x + \delta)$ et la dynamique des taux forwards est donnée par :

$$dF_k(t) = (F_k(t) + \delta) \sigma_k(t) dZ_t^{k+1} \quad (4.18)$$

Quand $\delta > 0$, le DD-LMM permet d'introduire une certaine dépendance du strike dans la volatilité implicite. En effet, le calcul du prix théorique des swaptions dans le cadre du DD-LMM et son inversion en utilisant la formule de *Black&Scholes* permet d'exhiber une certaine dépendance du strike.

Remarque 15. — *Sous cette formulation, on remarque que si on a $F_k(0) > -\delta$ alors $F_k(t) > -\delta$. Les taux forwards sont floorés par la valeur $-\delta$.*

— *On remarque également que si $\delta \gg F_k(t)$ nous aurons $dF_k(t) \approx \delta \sigma_k(t) dZ_t^{k+1}$, ce qui définit un modèle normal. Et que si $F_k(t) \gg \delta$ nous aurons $dF_k(t) \approx F_k(t) \sigma_k(t) dZ_t^{k+1}$, et on se retrouve avec le modèle LMM.*

4.3.2.2.2 Le DD-CEV-LMM Le modèle CEV-LMM a été initialement introduit dans [AA97]. Dans un cadre similaire que celui du DD-LMM, nous avons dans ce cas $C_k(t, \sigma_k(t), x) = (x)^\alpha \sigma_k(t)$. La dynamique des taux forwards sous la mesure $\mathbb{Q}^{T_{k+1}}$ est donnée par :

$$dF_k(t) = (F_k(t))^\alpha \sigma_k(t) dZ_t^{k+1} \quad (4.19)$$

On peut également ajouter un facteur de déplacement δ au taux forwards pour avoir la version *Displaced Diffusion* du CEV-LMM. la fonction C_k sera tout simplement donnée par $C_k(t) = (x + \delta)^\alpha \sigma_k(t)$

Remarque 16.

- Il existe une alternative au CEV (le lecteur intéressé peut se référer à l'article [AA97]), le LCEV (Limited Constant Elasticity of Variance). Ce modèle permet de palier au problème d'explosivité des taux forwards, en prenant une fonction C_k de la forme $x \min\left(\frac{1}{e^{1-\alpha}}; \frac{1}{x^{1-\alpha}}\right)$, $\epsilon > 0$.

4.3.2.2.3 Le DD-LMM avec shift paramétrique Ce modèle est une généralisation du DD-LMM dans le sens où le *shift* n'est plus unique pour toutes les dates de maturités de la structure de ténor. Dans ce cas, la fonction C_k est donnée par $C_k = (x + \delta(k))\sigma_k(t)$, la dynamique des taux forwards est alors donnée par :

$$dF_k(t) = (F_k(t) + \delta(k))\sigma_k(t)dZ_t^{k+1} \quad (4.20)$$

Plusieurs formes paramétriques sont envisageables pour la fonction du shift $\delta(k)$.

4.3.2.3 Modèles à volatilité stochastique

Dans la famille des modèles à volatilité stochastique, la volatilité instantanée est modélisée par un processus stochastique dans le but de reproduire cette dépendance du strike de la volatilité.

4.3.2.3.1 Le DD-SV-LMM Ce modèle initialement proposé dans [WZ06], propose d'introduire un facteur stochastique pour la volatilité qui évolue suivant une dynamique stochastique de Cox-Ingersoll-Ross. Dans un cadre similaire que le DD-LMM la dynamique des taux forwards sous la mesure \mathbb{Q}^{k+1} est donnée par :

$$dF_k(t) = F_k(t)\sqrt{V_t}\sigma_k(t)dZ_t^{k+1} \quad (4.21)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \epsilon\sqrt{V_t}dW_t \quad (4.22)$$

Où :

- κ, θ, ϵ sont des paramètres non négatifs, vérifiant la condition de Feller $2\kappa\theta \geq \epsilon^2$ pour assurer la positivité de la volatilité tant que $V_0 > 0$.
- $(W, Z^k, k \geq 1)$ un processus gaussien tel que W est un Mouvement Brownien avec $d\langle Z^{k+1}, W \rangle_t = \rho_k(t)dt$

Pour plus de détails le lecteur intéressé peut se référer à l'article [WZ06].

4.3.2.4 Modèles à paramètres incertains

Cette famille de modèles a été initialement proposé par Gatarek (2003) et Brigo, Mercurio et Rapisadra (2004) puis Errai, Mauri et Mercurio dans [EMM04]. Dans ces modèles à paramètres incertains l'idée de base d'un modèle LMM est d'introduire l'incertitude sur les paramètres de la structure de volatilité, l'incertitude provenant dans ce cas d'une variable aléatoire discrète.

4.3.2.4.1 Le DD-LMM-UP Le principe du DDLMMUP est de partir initialement d'un modèle DDLMM sur lequel on ajoutera une incertitude sur les paramètres, càd que les paramètres seront inconnus à l'instant $t = 0$. On suppose en toute généralité que les volatilités σ_k et le coefficient de déplacement α sont révélés immédiatement après l'instant 0, soit à $t = 0^+$.

L'incertitude sur les paramètres provient d'une variable aléatoire discrète I indépendante du processus $(Z^k, k \geq 0)$, prenant des valeurs dans $\{1, \dots, N\}$, avec $Q^d(I = i) = \lambda_i$, $\lambda_i > 0$. À la date $t = 0^+$ il existe N réalisations possibles pour les paramètres,

$$\{(\alpha_k^i, \sigma_k^i), i \in \{1, \dots, N\}\}$$

Où α^i est constant et σ_k^i est une fonction déterministe du temps.

En notons $\tilde{F}_k(t) := F_k(t) + \alpha^I$ le taux forward shifté, sa dynamique sous sa mesure canonique est :

$$d\tilde{F}_k(t) = \sigma_k^I(t) \tilde{F}_k(t) dZ_t^{k+1}(t)$$

4.3.2.5 Formulation équivalente du LMM

Dans la dynamique (4.23) nous avons considéré le mouvement brownien M -dimensionnel corrélé de matrice de corrélation ρ . On peut d'une manière équivalente écrire cette dynamique sous une forme multi-factoriels :

$$\frac{dF(t, T_k, T_{k+1})}{F(t, T_k, T_{k+1})} = \sum_{q=1}^{N_f} \xi_k^q(t) dZ^q(t) \quad (4.23)$$

Où :

- ξ_k^q est une fonction déterministe décrivant la q -ième composante de volatilité définie sur $[0, T_k]$.
- $N_f \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de composantes de la volatilité.
- $(Z^q)_{q \in [1, N_f]}$, est un mouvement brownien multidimensionnel.

Remarque 17. Une conséquence directe de la caractérisation de Lévy du mouvement Brownien, c'est qu'on peut revenir à la première formulation en prenant :

$$\sigma_k(t) = \sqrt{\sum_{q=1}^{N_f} (\xi_k^q(t))^2} \quad (4.24)$$

Et en utilisant la définition 4.10 de la corrélation nous avons :

$$\rho_{i,j}(t) = \sum_{q=1}^{N_f} \frac{\xi_i^q(t) \xi_j^q(t)}{\sigma_i(t) \sigma_j(t)} = \sum_{q=1}^{N_f} \beta_i^q(t) \beta_j^q(t) \quad (4.25)$$

Où :

- $\beta_i^q(t) = \frac{\xi_i^q(t)}{\sigma_i(t)}$ le q -ième facteur de corrélation.

Dans la suite nous adopterons cette formulation pour le modèle LMM.

4.3.3 Spécification de la structure de volatilité

Nous rappelons que sous la version multifactorielle du modèle DD-LMM. La volatilité de \tilde{F}_k prend la forme suivante :

$$\sigma_k(t) = \sqrt{\sum_{q=1}^{N_f} (\xi_k^q(t))^2}, \quad t \in [0, T_k], \quad N_f \geq 1 \quad (4.26)$$

Avec :

- ξ_k^q est une fonction déterministe définie sur $[0, T_k]$ représentant le q -ième facteur de la volatilité.
- N_f est le nombre de facteurs de la volatilité σ_k

Nous rappelons également que la structure de corrélation entre le $i^{\text{ième}}$ et le $j^{\text{ième}}$ (avec $i \leq j \in \mathbb{N}$ taux forward est notée par $\rho_{i,j}$ et elle est supposée égale, pour tout $t \in [0, T_i]$, à :

$$\rho_{i,j}(t) = \sum_{q=1}^{N_f} \beta_i^q(t) \beta_j^q(t) \quad (4.27)$$

Avec :

$$\beta_k^q(t) = \frac{\xi_k^q(t)}{\sigma_k(t)} \implies \xi_k^q(t) = \beta_k^q(t) \sigma_k(t)$$

D'où la structure suivante pour la corrélation

$$\rho_{i,j} = \sum_{q=1}^{N_f} \beta_i^q(t) \beta_j^q(t) \quad (4.28)$$

Paramétrisation de la volatilité

La structure de volatilité $\sigma_k(t)$ est décomposée en deux fonctions paramétriques. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in]T_k, T_{k+1}]$. La paramétrisation de la volatilité dépend de la maturité et du temps restant à la maturité :

$$\sigma_k(t) = \Phi(t) \times g(T_k - t)$$

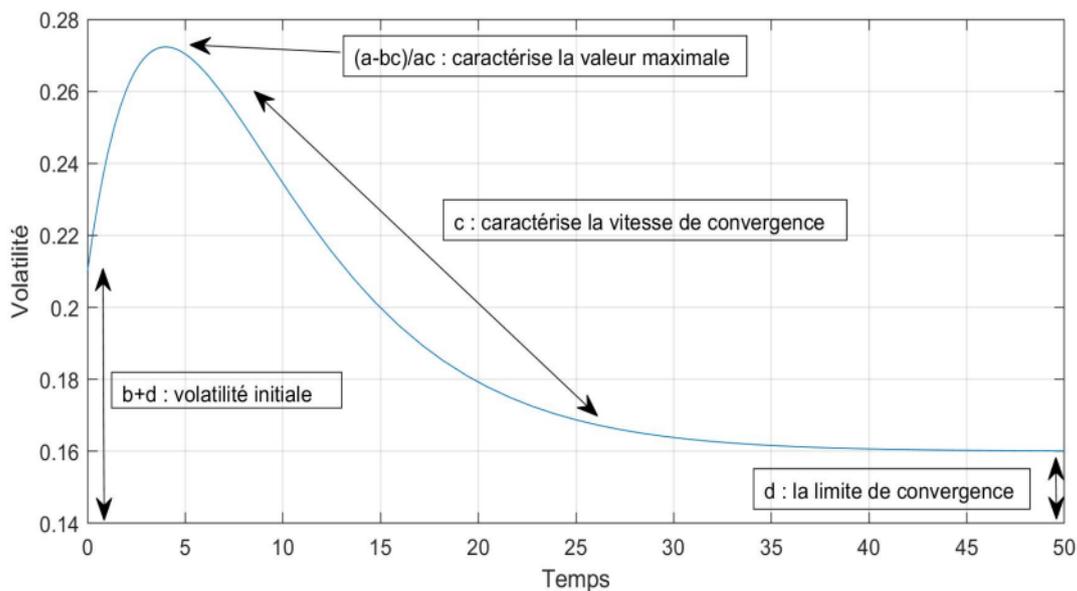


FIGURE 4.1 – Forme de la fonction de Rebonato (source : [Arm22])

Pour simplifier les calculs par la suite, la structure de volatilité est supposée constante par morceaux :

$$\sigma_k(t) = \sigma_k(T_i) \quad \forall t \in]T_i, T_{i+1}] \quad i \leq k \in \mathbb{N}^*$$

Avec Φ un facteur d'échelle dépendant de la maturité associée à chaque taux forward, défini par, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\Phi(t) = \theta + (1 - \theta) \times e^{-\kappa \times t}$$

Où $(\theta, \kappa) \in (\mathbb{R}^+)^2$, θ est le niveau d'échelle asymptotique et κ est la vitesse de convergence vers θ .

g dépend du temps-à-maturité. Cette forme intègre un terme linéaire avec une décroissance exponentielle permettant la formation d'une bosse (voir figure 4.1). Cela implique également que la volatilité converge asymptotiquement vers d quand la maturité T_i tend positivement vers l'infini.

$$g(u) = (bu + a) \times e^{-cu} + d$$

avec $(a, b, c, d) \in (\mathbb{R}^+)^4$.

4.3.3.1 Spécification des corrélations

Dans le but de réduire le nombre des degrés de libertés, les β_k^q seront supposées constantes par morceaux, dépendant du temps restant à la maturité. Pour tout $i \leq k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $q \in \llbracket 1, N_f \rrbracket$ et pour tout $t \in]T_k, T_{k+1}]$

$$\beta_i^q(t) = b_{i-(k)}^q$$

L'expression de la corrélation dans 4.29, entre le i -ième et j -ième forwards se réduit à :

$$\rho_{i,j}(t) = \sum_{q=1}^{N_f} \beta_{i-k}^q(t) \beta_{j-k}^q(t) \quad \forall t \in]T_k, T_{k+1}] \quad (4.29)$$

Remarque 18. *Ces paramètres n'entrent pas dans la procédure d'optimisation. Ils sont obtenus par d'autres études dédiées (la méthode d'estimation des corrélations inter-forward est présentée dans C.1).*

Chapitre 5

Modélisation des autres facteurs de risque

L'étude des impacts des modèles de taux sur la gestion actif-passif d'un assureur requiert la modélisation d'autres facteurs de risque dans le cadre d'un GSE risque-neutre, les facteurs de risques dont on aura besoin pour les études ALM. Cette partie ne fait pas l'objet de notre mémoire, nous reprenons rapidement les éléments présentés dans [\[Man21\]](#).

- action
- immobilier
- inflation

Dans la suite de ce chapitre, nous nous limiterons à une présentation générale des différents modèles utilisés : Leur dynamique de diffusion, leurs paramètres ainsi que les méthodes de calibrage.

5.1 Le facteur de risque action

Pour modéliser la dynamique de l'indice action, le modèle *Time Variant Deterministic Volatility* (TVDV) sera privilégié. Il appartient à la famille des modèles log-normaux avec une volatilité dépendante du temps déterministe. La dynamique du modèle est donnée sous la probabilité risque-neutre par :

$$dS_t = (r_t - q) S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

Avec :

- r_t le taux sans risque
- q le taux de dividende déterministe
- σ_t la volatilité locale
- W_t un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre

5.2 Le facteur de risque Immobilier

De même, pour l'indice immobilier, un modèle log-normal est privilégié. Sa dynamique sous la probabilité neutre au risque est décrite par le processus suivant :

$$dE_t = r_t E_t dt + \sigma^{immo} E_t dW_t$$

- r_t le taux sans risque
- σ_{immo} la volatilité de l'indice immobilier
- W_t un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre

Le modèle est calibré en utilisant les données historiques de l'indice sur une certaine période. Cette approche est justifiée par la liquidité très limitée du marché de l'immobilier et l'absence de volatilités implicites associées [Man21].

5.3 Indice inflation

On peut utiliser le modèle de Gadmer pour modéliser l'inflation. La dynamique de l'indice d'inflation sous ce modèle est donnée par :

$$i_t = \alpha + \beta \times r_t + \sigma \times \epsilon_t^i \quad (5.1)$$

Avec :

- r_t le taux sans risque
- α, β, σ les paramètres du modèle
- ϵ_t^i aléa de loi normale centrée réduite

Le calibrage du modèle de Gadmer se utilisant une régression linéaire sur un historique de longue durée et à un pas mesuel [Man21]. Il existe bien d'autres modèle d'inflation plus intéressant comme le modèle de Vasicek (voir [BM01] par exemple) mais cela sort du cadre de notre mémoire.

Deuxième partie

Extensions du Libor Market Model pour incorporer le smile de volatilité

Chapitre 6

Le modèle DDLMM avec shift paramétrique

6.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à l'étude du modèle DDLMM avec shift paramétrique. Dans la formulation classique du DDLMM le shift est unique pour toutes les dates de maturité. D'un point de vue purement financier le shift permet d'exhiber une certaine dépendance du strike et permet de ce fait de modéliser le smile de volatilité, d'une autre part et d'un point de vue assurantiel l'intégration du shift permet de générer des taux négatifs particulièrement dans un contexte de baisse de taux où la courbe des taux peut prendre des valeurs négatives. On constate également que les taux négatifs sont constatés pour les courtes maturités, d'où l'intérêt d'introduire des facteurs de déplacements qui en dépendent et dans ce cas qui décroissent en fonction de la maturité.

Parmi les inconvénients des modèles de marché, on trouve le phénomène d'explosivité. En effet par leurs nature log-normale, il s'avère que pour certains jeu de paramètres le modèle peut générer des taux Zéro-Coupon très grandes. Un autre point intéressant à étudier dans ce cas est l'effet du shift paramétrique sur l'explosivité des taux générés.

6.2 Éléments théorique du modèle

On introduit les notations suivantes pour toute la suite de l'étude. Soit $\mathcal{T} = \{T_0, \dots, T_N\}$ un ensemble de dates et $\{\Delta T_0, \dots, \Delta T_{N-1}\}$ tel que $\Delta T_k = T_{k+1} - T_k$. Avec $T_0 = 0$. On considère la famille des taux forward F_k de dates d'expiration T_k et de maturité T_{k+1} , pour $k \in [0, N - 1]$. On rappelle que :

$$F_k(t) := F(t; T_k, T_{k+1}) = \frac{P(t, T_k) - P(t, T_{k+1})}{\Delta T_k P(t, T_{k+1})}$$

Avec $P(t, T)$ le prix à l'instant t du zéro-coupon de maturité T .

On note par Q^k la mesure de probabilité T_k -forward, associée au changement du numéraire $P(\cdot, T_k)$ et par E^k l'espérance sous cette mesure. On rappelle aussi que les taux forward sont des martingales sous leurs mesures forward associées.

On note par Q^d la mesure Libor spot ; on rappelle que le numéraire B_d est défini par :

$$B_d(t) = \frac{P(t, T_{\beta(t)})}{\prod_{k=1}^{\beta(t)-1} P(T_k, T_{k+1})} \quad \beta(t) = \inf \{i \geq 1 : T_i \geq t\} \quad (6.1)$$

6.3 Spécification et motivation derrière le modèle

On rappelle que l'introduction du shift dans le modèle DD-LMM, permet d'une part la génération de taux forwards négatifs dans l'intervalle $[-\delta, +\infty[$, et d'autre part d'introduire une certaine dépendance du strike dans la formule de volatilité implicite (voir la partie 4.3.2). Nous avons également évoqué dans la partie 4.3.2 la possibilité d'avoir des taux explosifs dans les modèles de taux de la famille LMM.

Dans ce contexte on propose une généralisation du DDLMM : au lieu de travailler avec un **shift unique** pour tous les taux forwards on passe à un shift dépendant de la maturité des forwards, pour mieux contrôler la négativité et l'explosivité des taux en fonction de la maturité. Nous allons nous intéresser également à répliquer du smile de volatilité sous cette approche.

Le taux forward *shifté* sera écrit dans ce cas comme suit :

$$\tilde{F}_k(t) = F_k(t) + \delta(k) \quad (6.2)$$

Où :

- $k \rightarrow \delta(k)$ est la fonction de shift associée à la structure de ténor considérée.

La dynamique des taux forwards est donnée dans ce cadre par :

$$d\tilde{F}_k(t) = (F_k(t) + \delta(k)) \times \sum_{q=1}^{N_f} \xi_k^q(t) dZ_{k+1}^q(t) \quad (6.3)$$

Remarque 19. On considère les structures de volatilité et de corrélation présentée dans 4.3.3.

La dynamique sous la mesure Spot est donnée par :

$$d\tilde{F}_k(t) = \tilde{F}_k(t) \left[\sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\Delta T_j \rho_{j,k} \sigma_j(t) \sigma_k(t) \tilde{F}_j(t)}{1 + \Delta T_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t) dZ_k^d(t) \right] \quad (6.4)$$

6.4 Le pricing des swaptions dans le modèle DDLMM avec shift paramétrique

Les Swaptions sont les instruments de base utilisés pour le calibrage des modèles de taux en univers risque-neutre, de fait cette partie sera consacrée à la dérivation d'une formule fermée pour le prix des Swaptions sous le modèle DDLMM avec shift paramétrique.

On rappelle que l'hypothèse fondamentale des modèles *Libor Market* 4.23 est leur dynamique log-normale. Cette hypothèse permet de trouver une formule fermée pour le prix des caplets/floorlets.

On peut naturellement penser à utiliser la même hypothèse pour le taux swap forward, pour profiter de la même simplicité dans la dérivation du prix théorique des Swaptions. Néanmoins, comme détaillé dans [BM01], les modèles LFM et LSM sont incompatibles. Dans cette partie, on utilise deux approximations pour dériver une dynamique log-normale approximative pour le taux swap forward en partant de l'hypothèse 4.23.

On considère une Swaption payeuse de tenor $T_N - T_n$. Les paiements s'effectuent selon l'échéancier $\{T_n, T_{n+1}, \dots, T_N\}$.

Rappelons que le taux Swap forward est définie par :

$$S_{n,N}(t) = \frac{P(t, T_n) - P(t, T_N)}{\sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(t, T_{k+1})} \quad t \in [0, T_n]$$

Écrivant le taux Swap forward en fonction des taux forwards :

$$\begin{aligned} S_{n,N}(t) &= \frac{\sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(t, T_{k+1}) F_k(t)}{\sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(t, T_{k+1})} \\ &= \sum_{k=n}^{N-1} \alpha_k(t) F_k(t) \end{aligned}$$

Où pour tout $k \in [n, N - 1]$ et $t \in [0, T_n]$

$$\alpha_k(t) = \frac{\Delta T_k P(t, T_{k+1})}{\sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(t, T_{k+1})} \quad (6.5)$$

Comme mentionné précédemment, le processus $(S_{n,N}(t))_{t \in [0, T_n]}$ est une martingale sous la mesure de probabilité $Q^{n,N}$ associée au changement de numéraire

$$A_{n,N}(t) = \sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(t, T_{k+1})$$

donc sa dynamique sous cette mesure est sans drift. La formule d'Itô permet décrire :

$$\begin{aligned}
 dS_{n,N}(t) &= \sum_{k=n}^{N-1} \frac{\partial S_{n,N}(t)}{\partial F_k} dF_k(t) \\
 &= \sum_{k=n}^{N-1} \frac{\partial S_{n,N}(t)}{\partial F_k} (F_k(t) + \alpha(k)) \sum_{q=1}^{N_f} \xi_k^q(t) dZ_q^{n,N}(t) \\
 &= \sum_{q=1}^{N_f} \sum_{k=n}^{N-1} \gamma_k^q(t) dZ_q^{n,N}(t)
 \end{aligned}$$

Avec :

$$\gamma_k^q(t) := \frac{\partial S_{n,N}(t)}{\partial F_k(t)} \xi_k^q(t) (F_k(t) + \alpha(k))$$

$(Z_q^{n,N})_{q \in \llbracket 1, N_f \rrbracket}$ est un mouvement Brownien Standard de dimension N_f avec sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,N}$.

Pour dériver la dynamique de $S_{n,N}$ sous la mesure $\mathbb{Q}^{n,N}$ on va faire des approximations sur les γ_k^q . On va faire appel à des techniques dites de *drift freezing*, dans la littérature deux méthodes y sont généralement utilisées : la première dite de Rebonato (présentée dans la suite), et la deuxième est celle de Hull-White (cette méthode d'approximation sera présentée pour le modèle DDLMMUP).

6.4.1 L'approximation de Rebonato

On suppose que les α_k sont indépendants des F_k , cela facilite le calcul des dérivées partielles de $S_{n,N}$ par rapport aux F_k . On trouve :

$$\gamma_k^q(t) \approx \frac{\Delta T_k P(t, T_k) \xi_k^q(t) (F_k(t) + \alpha(k))}{\sum_{l=n}^{N-1} \Delta T_l P(t, T_{l+1})}$$

On cherche à faire apparaître $S_{n,N}$ dans l'expression de γ_k^q

$$\gamma_k^q(t) \approx \frac{\Delta T_k P(t, T_{k+1}) \xi_k^q(t) (F_k(t) + \alpha(k))}{\sum_{l=n}^{N-1} \Delta T_l P(t, T_{l+1}) (F_l(t) + \alpha(l))} \times \left[S_{n,N}(t) + \frac{\sum_{l=n}^{N-1} \Delta T_l P(t, T_{l+1}) \alpha(l)}{\sum_{l=n}^{N-1} \Delta T_l P(t, T_{l+1})} \right]$$

La deuxième hypothèse qu'on effectuera, c'est que les termes $\frac{\Delta T_k P(t, T_{k+1}) (F_k(t) + \alpha(k))}{\sum_{l=n}^{N-1} \Delta T_l P(t, T_{l+1}) (F_l(t) + \alpha(l))}$ et $\frac{\Delta T_k P(t, T_{k+1})}{\sum_{l=n}^{N-1} \Delta T_l P(t, T_{l+1})}$ sont de variabilité faible. Pour cela on gèle les taux forwards et les facteurs d'actualisation à leurs valeurs en $t = 0$. On obtient :

$$\gamma_k^q(t) \approx \frac{\Delta T_k P(0, T_k) \xi_k^q(t) (F_k(0) + \alpha(k))}{\sum_{l=n}^{N-1} \Delta T_l P(0, T_{l+1}) (F_l(0) + \alpha(l))} \times \left[S_{n,N}(t) + \frac{\sum_{l=n}^{N-1} \Delta T_l P(0, T_{l+1}) \alpha(l)}{\sum_{l=n}^{N-1} \Delta T_l P(0, T_{l+1})} \right]$$

En posant :

$$\gamma_k^q := \frac{\Delta T_k P(0, T_{k+1}) \xi_k^q(t) (F_k(0) + \alpha(k))}{\sum_{l=n}^{N-1} \Delta T_l P(0, T_{l+1}) (F_l(0) + \alpha(l))} \quad (6.6)$$

$$\eta_{n,N} := \frac{\sum_{l=n}^{N-1} \Delta T_l P(0, T_{l+1}) \alpha(l)}{\sum_{l=n}^{N-1} \Delta T_l P(0, T_{l+1})} \quad (6.7)$$

Sous la mesure $Q^{n,N}$ on peut approximer la dynamique de $S_{n,N}(t)$ par :

$$dS_{n,N}(t) \approx [S_{n,N}(t) + \eta_{n,N}] \sum_{q=1}^{N_f} \sum_{l=n}^{N-1} \gamma_l^q dZ_q^{n,N}(t)$$

Et en remarquant que :

$$\left\langle \sum_{q=1}^{N_f} \sum_{l=n}^{N-1} \gamma_l^q dZ_q^{n,N} \right\rangle_t = \left\langle \sum_{q=1}^{N_f} \sum_{l=n}^{N-1} \gamma_l^q dZ_q^{n,N}, \sum_{q=1}^{N_f} \sum_{l=n}^{N-1} \gamma_l^q dZ_q^{n,N} \right\rangle_t \quad (6.8)$$

$$= \sum_{q=1}^{N_f} \left(\sum_{l=n}^{N-1} \gamma_l^q \right)^2 d \langle Z_q^{n,N} \rangle_t \quad (6.9)$$

$$(6.10)$$

En posant :

$$\gamma_{n,N}(t) := \sqrt{\sum_{q=1}^{N_f} \left(\sum_{l=n}^{N-1} \gamma_l^q(t) \right)^2} \quad (6.11)$$

$$dW^{n,N}(t) := \frac{\sum_{q=1}^{N_f} \sum_{l=n}^{N-1} \gamma_l^q(t) dZ_q^{n,N}(t)}{\gamma_{n,N}(t)} \quad (6.12)$$

$W^{n,N}$ est un mouvement Brownien unidimensionnel sous la mesure $Q^{n,N}$, d'après la caractérisation de Lévy du mouvement Brownien (on peut voir par exemple [Cha]).

La dynamique approchée du taux Swap forward shifté est donnée dans ce cas par :

$$d\tilde{S}_{n,N}(t) = \gamma_{n,N}(t) \tilde{S}_{n,N}(t) dW^{n,N}(t)$$

Où

$$\tilde{S}_{n,N}(t) = S_{n,N}(t) + \eta_{n,N}$$

Remarque 20. Pour une justification des hypothèses de drift freezing on pourra se référer à [BM01].

6.4.2 Prix théorique des Swaptions

On voit bien que $S_{n,N}(t)$ est une variable log-normale pour tout $t \in [0, T_n]$.

Le prix théorique de la Swaption considérée est donné par :

$$\begin{aligned} PS_{n,N}^{Th}(K) &= A_{n,N}(0) \mathbb{E}^{n,N} [(S_{n,N}(T_n) - K)^+] \\ &= A_{n,N}(0) Bl(K + \eta_{n,N}, S_{n,N}(0) + \eta_{n,N}, \Gamma_{n,N}) \end{aligned}$$

En posant

$$\Gamma_{n,N} := \sqrt{\int_0^{T_n} [\gamma_{n,N}(t) dt]^2} = \sqrt{\sum_{q=1}^{N_f} \int_0^{T_n} \left(\sum_{l=n}^{N-1} \gamma_l^q(t) \right)^2 dt}$$

Avec

$$Bl(K + \eta_{n,N}, S_{n,N}(0) + \eta_{n,N}, \Gamma_{n,N}) = (S_{n,N}(0) + \eta_{n,N}) \phi(d_1) - (K + \eta_{n,N}) \phi(d_2)$$

Où ϕ est la fonction de répartition de la loi normale standard et

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \left(\frac{S_{n,N}(0) + \eta_{n,N}}{K + \eta_{n,N}} \right) + (\Gamma_{n,N})^2 \frac{T_n}{2}}{\Gamma_{n,N} \sqrt{T_n}} \\ d_2 &= d_1 - \Gamma_{n,N} \sqrt{T_n} \end{aligned}$$

6.5 Méthodologie du calibrage

L'objectif de cette partie est de détailler la procédure de calibrage suivie pour le modèle DDLMM avec shift paramétrique.

6.5.1 Caractéristiques des instruments de calibrage

Le modèle est calibré sur des Swaptions, on en présente les principales caractéristiques (moneyness, maturités, ...).

6.5.1.1 Optionnalité des Swaptions

La présentation des *moneyness* a été faite dans la partie (3.3.2). Le choix de *moneyness* des instruments utilisés lors du calibrage dépend de l'adéquation du modèle, par exemple un modèle LMM classique sera moins performant sur des Swaptions AFM en général car sa spécification ne permet pas de modéliser le smile de volatilité. Notre objectif dans ce mémoire étant entre autres d'étudier ce phénomène, une attention particulière sera donnée aux Swaptions AFM (ITM et OTM).

6.5.1.2 Dates de maturités et strikes

Les instruments utilisés lors du calibrage doivent répliquer au mieux l'optionnalité du Passif de l'assureur. Du fait, les dates de maturités sélectionnées doivent être en adéquation avec le Passif de ce dernier. Généralement, pour les Swaptions ATM on calibre sur la nappe de volatilité pour des maturités allant de 1 à 5 années, puis 7, 10, 15, 20, 25, 30 ans et des ténors de 1 à 10 ans, puis 15, 20, 25 et 30 ans. Pour les Swaptions AFM, on calibre sur la nappe de volatilité de ténor 10 ans pour les mêmes maturités que les Swaptions ATM et pour des strikes ITM/OTM : -/+100 bps, -/+50 bps, -/+25 bps.

6.5.2 Données en entrée

Le calibrage du modèle DDLMM avec shift paramétrique requiert les éléments d'inputs suivants :

- La **courbe des taux sans risque initiale** correspondant à la courbe fournie par l'EIOPA à titre mensuelle. Elle permet de calculer les quantités nécessaires pour initialiser le modèle à $t = 0$.
- Les **volatilités des Swaptions** pour l'ensemble de ténors, de maturités et de strikes. Dans notre cas ces volatilités suivent la convention Bachelier (On remplace la volatilité dans la formule de Bachelier pour retrouver les prix associés).

6.5.3 Spécification de la fonction du shift

Avant de poser le problème d'optimisation, comme pour la structure de volatilité nous devrions sous quelle approche nous envisageons de calibrer les shifts dépendant de la maturité. On présente deux approches différentes :

6.5.3.1 Approche non-paramétrique

On suppose qu'aucune forme spécifique n'est connue pour le shift en fonction de la maturité, dans ce cas la calibration porte sur l'ensemble des shifts $(\delta(k)_{k \in [n, N-1]})$. Cela nous mène à un problème d'optimisation avec $6 + N - n$ paramètres (en utilisant la spécification de la volatilité présentée dans la partie 4.3.3).

Pour les données de calibrage présentées dans 6.5.1 on sera amené à calibrer 65 paramètres avec 264 points de données. Bien que cela soit mathématiquement justifié ($65 < 264$),

un très grand nombre de paramètres n'est pas souhaitable d'un point de vue pratique et pourra mener à des problèmes au niveau de l'optimisation.

6.5.3.2 Approche paramétrique

Pour les raisons citées précédemment on privilégiera une approche paramétrique qui consiste à accorder une forme paramétrique connue pour la fonction du shift. Cette approche a été initialement inspirée du mémoire voir [Hen18], dans le quel l'auteur a proposé d'utiliser la forme suivante :

$$\delta_k = |a_{shift}| \times \left(b_{shift} + (1 - b_{shift}) \times e^{-c_{shift} \times k} \right)_+$$

Néanmoins son choix n'a pas été justifié en vue des caractéristiques souhaitées pour la forme paramétrique du shift qui, de sa part, doit être en concordance avec la forme de la courbe des taux observée, en l'occurrence le niveau bas (voire négatif) des taux pour les plus courtes maturités. Cela nous mène à penser à des **formes décroissante** pour la fonction du shift.

Plusieurs possibilités ont été étudiées à savoir :

1. $\delta_k = |a_{shift}| \times \left(b_{shift} + (1 - b_{shift}) \times e^{-c_{shift} \times k} \right)_+$
2. $\delta_k = \alpha_0 e^{-\beta \times k} + \alpha_\infty \times (1 - e^{-\beta \kappa})$
3. $\delta_k = \theta + (\alpha - \theta) \times e^{-\kappa k}$
4. $\delta_k = (b \times k + a) \times e^{-c \times \kappa} + d$

Dans la suite du mémoire nous nous intéressons en particulier aux deuxième et troisième forme.

6.5.4 Problème d'optimisation

L'objectif du calibrage est de déterminer les paramètres permettant de minimiser la distance entre les prix théoriques issus du modèle et les prix de marché calculés à partir des volatilités fournis en *input*.

Les paramètres à calibrer dans le cadre du modèle DDLMM avec shift paramétrique sont : $\Theta_2 = (a, b, c, d, \kappa, \theta, \alpha_0, \beta, \alpha_\infty)$ pour la première forme et $\Theta_3 = (a, b, c, d, \kappa, \theta, \alpha, \kappa_{shift}, \theta_{shift})$ pour la deuxième forme.

On minimise les écarts quadratiques relatifs. Ainsi, le problème d'optimisation peut être formulé comme suit :

$$\Theta_i = \underset{\Theta_i}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{n=1}^{N_1} \sum_{N=n+1}^{n+N_2} \omega_{n,N} \left(\frac{PS_{n,N}^{Mkt}(K_{n,N}, S_{n,N}(0), \sigma_{n,N}^{Mkt}) - PS_{n,N}^{Th}(K_{n,N}, \Theta_i)}{PS_{n,N}^{Mkt}(K_{n,N}, S_{n,N}(0), \sigma_{n,N}^{Mkt})} \right)^2 \right) \quad (6.13)$$

Où :

- N_1 et N_2 désignent respectivement l'indice de la maturité maximale et le ténor maximal des Swaptions considérées pour le calibrage.
- $PS_{n,N}^{Mkt}(K_{n,N}, S_{n,N}(0), \sigma_{n,N}^{Mkt})$ le prix de marché d'une Swaption d'indice de maturité n et de ténor N évalué à l'instant 0.
- $PS_{n,N}^{Th}(K_{n,N}, \Theta_i)$ le prix théorique d'une Swaption obtenu par le modèle évalué à l'instant 0.
- $K_{n,N}$ correspond au strike de Swaption de maturité d'indice n et de ténor N
- $\omega_{n,N}$ correspond à la pondération de l'écart relatif quadratique sur la Swaption d'indice de maturité n et de ténor N .

6.6 Résultats de calibrage

Le modèle DDLMM avec shift paramétrique ajoute une certaine complexité au niveau de la procédure du calibrage qui s'inscrit dans le cadre de l'objectivation des paramètres de la fonction du shift. Pour le modèle DDLMM avec shift paramétrique l'attente est une réplification même partielle du *smile de volatilité* mais également d'avoir des allures décroissantes pour la fonction du shift en fonction de la maturité k .

Les conditions de décroissance des deux formes sont respectivement :

$$\alpha > \theta \text{ et } \alpha_0 > \alpha_\infty \quad (6.14)$$

Remarque 21. *Le niveau de α_0 est fixé à 50 %.*

Notre étude aura pour objectif l'analyse des éléments suivants :

1. Convergence de l'algorithme d'optimisation.
2. Objectivation des paramètres de la fonction du shift et analyse de la saturation des paramètres.
3. Capacité du modèle à répliquer les données de marché (*market-consistency* du modèle).

6.6.1 Convergence de l'algorithme d'optimisation et paramètres calibrés

Dans un premier temps nous analyserons les paramètres obtenus à l'issu de l'optimisation. Pour garantir une perspective adéquate sur le calibrage du modèle paramétrique DDLMM-Shift, nous avons employé deux algorithmes d'optimisation, que nous présentons brièvement ci-dessous :

- **L'algorithme de Nelder-Mead** : Il s'agit d'une méthode heuristique de recherche d'extrémum d'une fonction à plusieurs variables. L'algorithme s'arrête au premier extrémum local trouvé et qui dépend de l'initialisation de l'algorithme.

Pour palier à ce problème, on opte généralement à plusieurs initialisations aléatoires des variables de la fonction objective. L'avantage principal de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas le calcul de gradient et peut dès lors être utilisée sur un plus large échantillon de problème. Un deuxième avantage de la méthode est sa rapidité et efficacité par rapport aux autres algorithmes de la même famille.

- **L'algorithme de Marquardt-Levenberg** : Cette méthode requiert le calcul du gradient afin de trouver l'extremum de la fonction objective cela lui permet de gagner en précision et stabilité par rapport à l'algorithme de Nelder-Mead. Néanmoins elle est plus lourde en termes de temps de calcul.

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les paramètres obtenus suite au calibrage du modèles en utilisant les deux méthodes :

Première forme

Algorithme	a	b	c	d	κ	θ	α_0	α_∞	β	Erreur absolue
Nelder-Mead	10.08%	0.57%	7.82%	0.87%	30.92%	53.06%	6.69%	13.50%	7.53%	9.28×10^{-4}
Marquardt Levenberg	9.98%	0.53%	7.93%	0.93%	30.97%	52.66%	6.53%	13.55%	7.49%	8.99×10^{-4}

TABLE 6.1 – Paramètres calibrés pour la première forme

Deuxième forme

Algorithme	a	b	c	d	κ	θ	θ_{shift}	κ_{shift}	α_{shift}	Erreur absolue
Nelder-Mead	1.68%	0.24%	8.43%	0.25%	36.27%	65.09%	49.20%	99.80%	50%	1.31×10^{-3}
Marquardt Levenberg	1.72%	0.28%	8.56%	0.22%	35.60%	64.73%	46.59%	98.04%	50%	9.02×10^{-4}

TABLE 6.2 – Paramètres calibrés pour la deuxième forme

Nous pouvons dans un premier temps dire un mot sur le calibrage concernant la convergence de l'algorithme d'optimisation et de la non-saturation des paramètres calibrés.

Les résultats de calibrage étaient très satisfaisants pour les deux fonctions du shift avec une légère différence en faveur de la deuxième forme paramétrique. Il semble que les deux algorithmes ont très bien convergé : d'une part la valeur d'erreur est faible. D'autre part les paramètres obtenus sont très proche pour les deux algorithmes, ce qui vient favoriser le fait que le minimum global est atteint. Nous remarquons également que les paramètres calibrés ne saturent pas pour les deux méthodes d'optimisation.

6.6.2 Surface de volatilité ATM résultant du calibrage

Les résultats obtenus à l'issu de calibrage sont très satisfaisants pour le modèle DDLMM avec shift paramétrique en utilisant les deux méthodes d'optimisation que ce soit pour

la première ou la deuxième forme paramétrique.

On s'intéresse actuellement à l'évaluation des écarts entre les volatilités obtenus par modèle et celles de marché pour étudier l'efficacité du modèle quant à la réplification de la surface de volatilité. On rappelle également que les paramètres obtenus par les deux méthodes d'optimisation sont très proches. Dans ce cas, les volatilités implicites induites par le modèle ne présentent pas de différences significatives. Par conséquent, nous nous contentons de présenter les résultats obtenus par la méthode de Nelder-Mead.

De même nous remarquons que la première forme permet d'avoir des écarts absolus meilleurs que la deuxième forme. Néanmoins, nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la première offre plusieurs degrés de liberté tandis que pour la deuxième nous avons fixé le paramètre α_{shift} . Il pourrait être intéressant de comparer les deux formes lorsqu'on impose des contrôles sur les paramètres de la première forme (les paramètres étant initialement laissés libres). Cependant, à ce stade, nous nous limiterons à la présentation des résultats correspondant à la première forme.

Ci-dessous les écarts absolus entre les deux surfaces de volatilités évoqués précédemment :

Maturity/Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0.05%	0.07%	0.04%	0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.00%	0.03%	0.05%
2	0.06%	0.04%	0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.02%	0.05%
3	0.03%	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.03%	0.05%
4	0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.02%	0.04%
5	0.00%	0.01%	0.02%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.01%	0.04%
7	0.00%	0.00%	0.01%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.01%	0.03%
10	0.01%	0.02%	0.00%	0.01%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.01%	0.02%	0.02%	0.02%	0.00%	0.03%
15	0.04%	0.05%	0.04%	0.03%	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.02%	0.03%
20	0.05%	0.05%	0.04%	0.03%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.02%	0.00%	0.01%	0.02%
25	0.04%	0.05%	0.04%	0.02%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%	0.02%	0.01%	0.00%	0.01%
30	0.04%	0.05%	0.04%	0.03%	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%	0.03%	0.02%	0.01%	0.00%

FIGURE 6.1 – Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités du modèle après calibrage pour les swaptions ATM

Nous pouvons déjà dire que les écarts absolus obtenus par le modèle DDLMM avec shift paramétrique sont acceptables sur une grande partie de la surface de volatilité. Néanmoins, les écarts sont plus élevés sur les plus grands ténors et les grandes maturités ; le ténor 30 ans et les maturités 1, 2 et 3 par exemple, mais également pour les ténors les plus faibles au niveau des grandes maturités, notamment pour les ténors 1, 2 sur les maturités 15, 20, 25 et 30 (figure 6.2 pour voir la réplification du skew de volatilité par le modèle).

En revanche ces écarts reste acceptable en moyenne.

Les premiers résultats montrent que le calibrage permet de répondre aux besoins du modèle en termes de convergence des algorithmes et de réplification du skew de volatilité ATM. Néanmoins nous rappelons que l'apport principal de ce modèle se voit au niveau de la paramétrisation du shift qui lui dotera d'une flexibilité qui lui permettra de s'adapter à

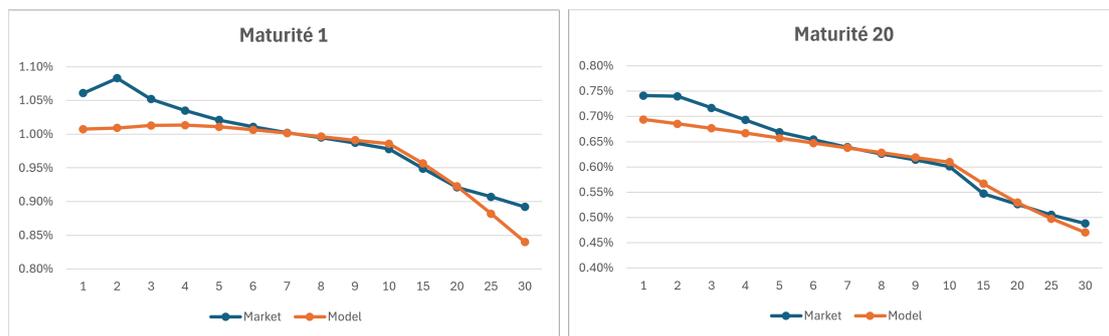


FIGURE 6.2 – Réplication du skew de volatilité ATM par le modèle pour les maturités 1 et 20 ans

différents contextes économiques ; notamment un contexte de taux bas en est un exemple intéressant.

Dans ce contexte, nous rappelons que les données de marché, notamment la courbe des taux sans risque et la surface de volatilité des swaptions, sont régulièrement modifiées (fréquence trimestrielle). Notre objectif dans la partie suivante est, d'une part fournir une approche d'objectivation des paramètres de la fonction du shift et d'autre part d'étudier l'impact des données de marchés (contexte économique) sur le calibrage, notamment la fonction du shift.

6.7 Étude de la stabilité du calibrage

Jusqu'à présent nous avons pu mettre en évidence l'efficacité du modèle DDLMM avec shift paramétrique sur les swaptions ATM, nous avons pu également s'assurer de la non saturation des paramètres et de la convergence des algorithmes d'optimisation. Cependant, notre étude est loin d'être complète et manque du recul nécessaire pour pouvoir tirer des conclusions sur l'applicabilité du modèle dans un cadre assurantiel.

Une étude de l'adaptabilité du modèle aux changements du contexte économique semble nécessaire. D'une part les données d'*input* changent annuellement (trimestriellement pour être plus précis), de fait notre modèle doit faire preuve de flexibilité et montrer une capacité à s'ajuster à des données nouvelles.

D'autre part, dans la première partie du calibrage nous n'avons pas imposé des contrôles sur les paramètres de la fonction du shift, de fait la fonction du shift peut prendre des allures assez subjectives. Notre objectif, dans un second temps, serait d'objectiver les paramètres de cette fonction en vue d'obtenir des allures pour la fonction du shift qui soient davantage en adéquation avec la courbe des taux sans risque observée.

Dans ce qui suit et en fonction des données mise à notre disposition nous étudions la robustesse de notre modèle sur les données du 4^{eme} trimestre des années 2022 et 2023.

6.7.1 Évolution de l'environnement économique entre 2022 et 2023

Avant de procéder au calibrage de notre modèle, il semble nécessaire de partager quelques éléments de comparaison sur les *inputs* utilisés dans le but de donner un sens à notre étude. Nous commençons par comparer les volatilités de marchés ATM pour en tirer les principales différences et nous enchaînons par la présentation des courbes de taux sans risque utilisées et qui permettent de refléter la conjoncture économique du moment.

La problématique de notre mémoire étant entre autres étudier le smile de volatilité, nous présentons également des volatilités AFM des deux années d'exercices pour certaines dates de maturité tout en mettant l'accent sur l'inadaptabilité du modèle DDLMM avec shift paramétrique à répliquer complètement ce phénomène.

6.7.1.1 Comparaison des surfaces de volatilités de marché entre 2022 et 2023

Volatilités ATM pour différentes maturités suivant les années Nous commençons par présenter les volatilités de marché des swaptions ATM en fonction du ténor pour les deux années d'exercices pour les trois maturités : 1 an, 5 ans et 20 ans.

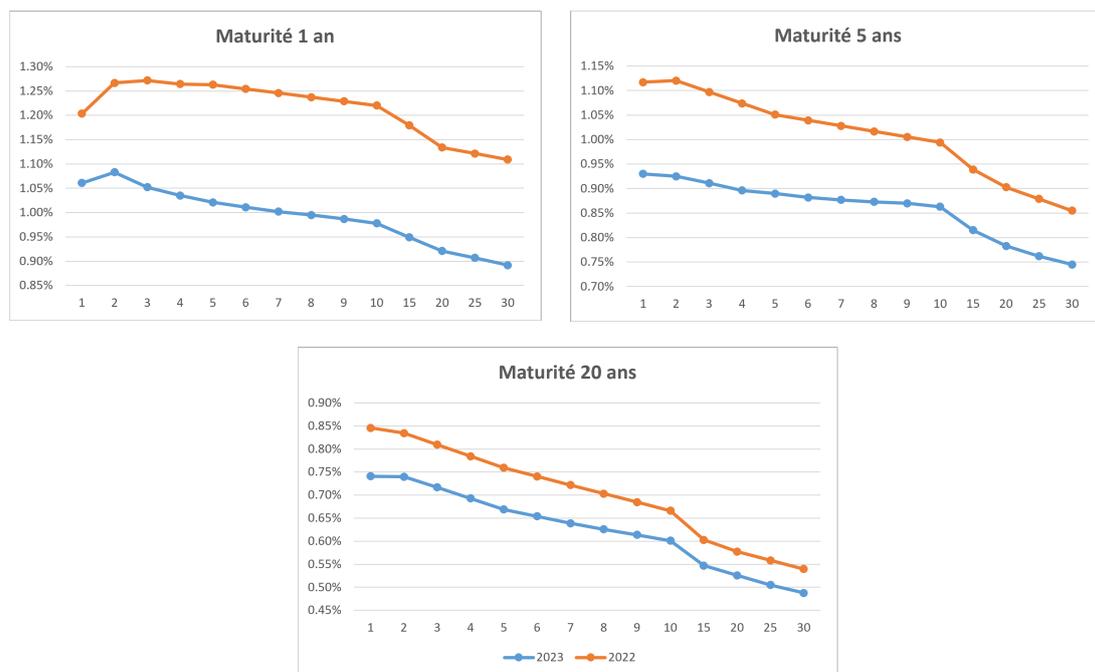


FIGURE 6.3 – Comparaison des volatilités de marchés en fonction des ténors suivant les années d'exercice

Nous pouvons déjà faire la remarque que suivant les années d'exercice, une forte variation dans le niveau de volatilité peut se produire (à la hausse ou à la baisse) surtout pour les faibles maturités. En effet, pour la maturité 1 an par exemple il y a eu une forte baisse

dans le niveau des volatilités ATM, tandis qu'il y a un rapprochement entre les deux *skew* de volatilités pour la maturité 20 ans.

Nous notons également qu'il peut y avoir un niveau de courbure des volatilités assez différents suivant les années. On peut regarder en particulier la maturité 1 an où la courbure des volatilités est assez prononcée pour l'année d'exercice 2022 tandis que pour l'année d'exercice 2023 la courbe est assez linéaire pour les ténors entre 1 an et 10 ans.

Volatilités ATM pour différents ténors suivant les années Nous présentons dans un second temps les volatilités de marché des swaptions ATM de marché pour les deux années en fixant les ténors respectivement à 1 an, 5 ans et 20 ans.

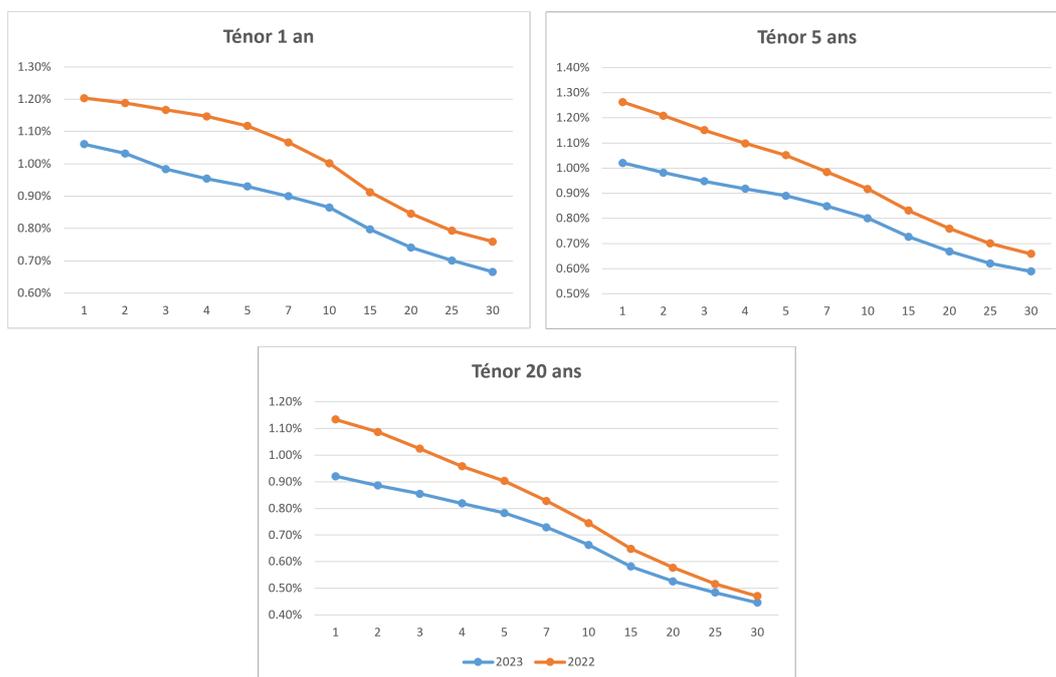


FIGURE 6.4 – Comparaison des volatilités de marchés en fonction des maturités suivant les années d'exercice

Comme dans le premier cas, les niveaux de volatilité varient selon les années d'exercice. Cependant, contrairement à ce que nous avons observé précédemment, le niveau de variation des volatilités reste assez stable en fonction des ténors. Néanmoins, pour un ténor donné, la variation des niveaux de volatilité est assez marquée pour les faibles maturités et s'atténue pour les maturités plus grandes.

Il est également intéressant de voir qu'en terme de niveau de courbure, ce dernier peut varier assez fortement suivant les années d'exercice. On peut voir en particulier le ténor 1 an où les données de l'année 2022 présentent une courbure assez prononcée tandis que

pour l'année 2023 cette courbure est quasi inexistante.

À partir des observations que nous venons de faire, le niveau de volatilité du marché et le niveau de courbure peuvent connaître une variation plus ou moins forte en fonction des maturités et ténors et suivant les années d'exercice. De ce fait, il paraît assez judicieux d'établir des comparaisons en termes de calibrage sur cette base pour en tirer des conclusions sur la flexibilité du modèle et sa capacité à s'adapter dans différents contextes économiques.

6.7.1.2 Un mot sur le smile de volatilité et le modèle DDLMM avec shift paramétrique

Avant de poursuivre notre étude, nous tenons à faire quelques remarques sur la répliation du smile de volatilité en utilisant le modèle DDLMM avec shift paramétrique. Avant cela, il semble naturel de se demander si le smile est déjà présent et visible sur les volatilités de marché. De même, on peut s'interroger sur l'intensité de ce phénomène et son évolution au fil des années d'exercice.

Dans le but de mettre en lumière l'évolution du smile au fil des années d'exercice, nous présentons le graphe des volatilités normales en fonction des strikes, pour des maturités de 1 an, 5 ans, 20 ans, et 30 ans.

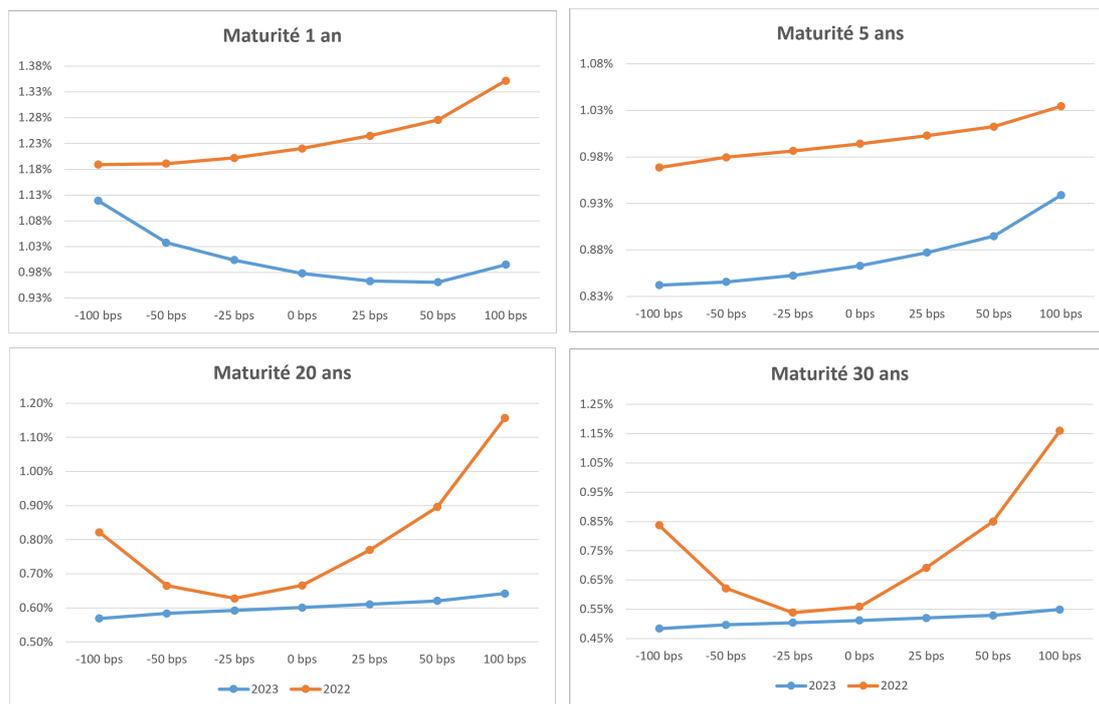


FIGURE 6.5 – Comparaison des *smile* de volatilité en fonction des années d'exercice

On peut directement observer que le niveau de courbure des volatilités AFM varie assez fortement suivant les années d'exercice. Pour l'année 2023, les faibles maturités (1 an, 5 ans) montrent un niveau de courbure assez élevé en les comparant aux grandes maturités où les courbes sont presque linéaires. Tandis que pour l'année 2022, nous observons le cas inverse. Le niveau de courbure est très élevé pour les grandes maturités.

Mais généralement les données de l'exercice 2022 présentent des niveaux de courbure très élevés par rapport à ceux de l'exercice 2023. L'exercice 2022 est alors plus adapté pour l'étude du phénomène du smile.

Sur les données de 2023, nous évaluons la capacité du modèle DDLMM avec shift paramétrique à répliquer le smile de volatilité. Nous présentons ci-dessous la matrice des écarts sur les swaptions AFM.

Maturity / Strike	-100 bps	-50 bps	-25 bps	0 bps	25 bps	50 bps	100 bps
1	0.18%	0.07%	0.03%	0.01%	0.03%	0.05%	0.03%
2	0.06%	0.03%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.03%
3	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%	0.03%
4	0.02%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.03%
5	0.00%	0.02%	0.02%	0.02%	0.01%	0.00%	0.03%
7	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.01%	0.01%
10	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%
15	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%
20	0.02%	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%
25	0.03%	0.02%	0.02%	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%
30	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.02%	0.01%	0.00%

FIGURE 6.6 – Ecarts Market-Model sur les swaptions AFM pour le modèle DDLMM avec shift paramétrique

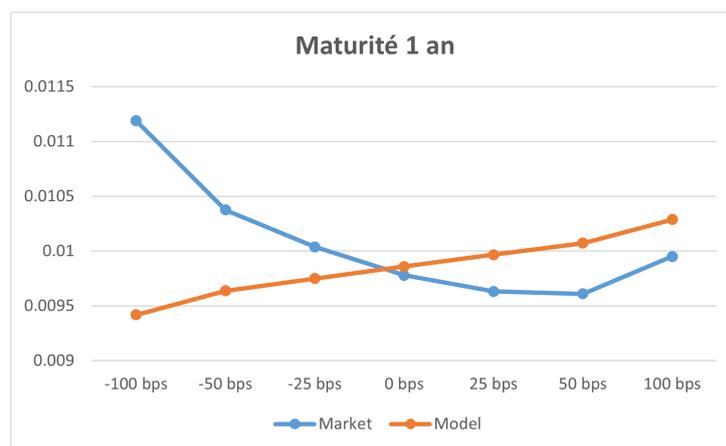


FIGURE 6.7 – Réplication du smile de volatilité par le modèle DDLMM avec shift paramétrique

Les écarts sont assez acceptables pour les grandes maturités, cela n'est pas concluons car la courbure n'est assez prononcé. Nous avons à cet effet présenté les volatilités marché et modèle (Voir figure 6.7) en fonction du strike pour la maturité. La courbe de volatilité en fonction du strike générée par le modèle est quasi linéaire et ne suit pas la courbure constatée sur les volatilités marché.

Le smile de volatilité sera étudié avec plus de détails dans le chapitre 7 du mémoire.

6.7.1.3 Comparaison des courbes de taux sans risque réglementaires

Pour faire suite à notre analyse des données de marchés, le second *input* pour notre modèle est la courbe des taux sans risque fournie par l'EIOPA. L'analyse de l'impact des différents niveaux de taux sur le calibrage pourrait nous permettre de tirer des conclusions sur la robustesse du modèle. De plus, l'allure de la courbe des taux sans risque nous fourniront des indications sur la stratégie à adopter pour l'objectivation de la fonction de shift dans la suite de notre analyse.

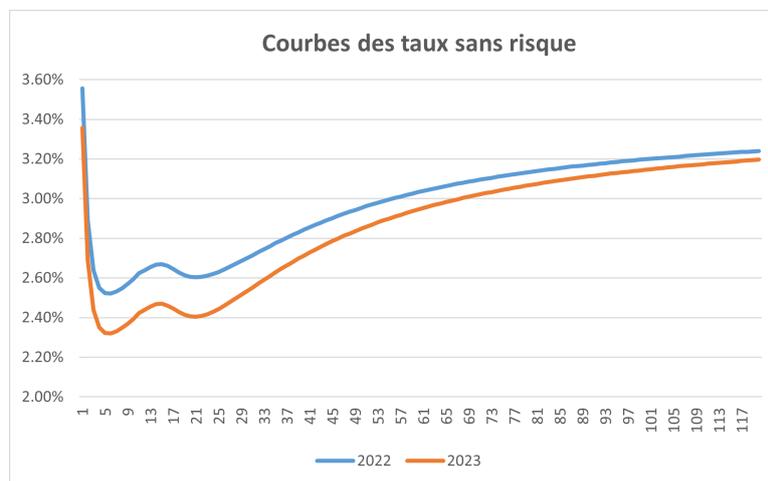


FIGURE 6.8 – Comparaisons du niveau des taux sans risque suivant les années d'exercices

Nous observons une chute dans le niveau des taux sans risque entre les années 2022 et 2023.

6.7.1.4 Résultats des calibrages selon les années d'exercice

En adoptant la même procédure qu'auparavant, nous avons calibré le modèle DDLMM avec shift paramétrique sur les données des exercices 2022 et 2023 en utilisant les deux algorithmes d'optimisation de Nelder-Mead et de Marquardt-Levenberg, mais nous nous limiterons encore une fois à la présentation des paramètres obtenus via la méthode de Nelder-Mead vu que les paramètres étaient très proches pour les deux algorithmes.

Nous analyserons dans un premier temps la convergence de la méthode d'optimisation.

Nous présentons dans le tableau suivant les résultats obtenus à l'issu du calibrage :

Première forme										
Année	a	b	c	d	κ	θ	α_0	α_∞	β	Erreur absolue
2022	16.41%	0.15%	5.95%	0.03%	55.78%	45.64%	3.07%	16.16%	9.01%	8.79×10^{-3}
2023	10.08%	0.57%	7.82%	0.87%	30.92%	53.06%	6.69%	13.50%	7.53%	9.28×10^{-4}
Deuxième forme										
Année	a	b	c	d	κ	θ	θ_{shift}	κ_{shift}	α_{shift}	Erreur absolue
2022	1.9%	0.4%	10.1%	0.3%	78.0%	63.6%	50%	99.5%	50.0%	9.65×10^{-3}
2023	1.68%	0.24%	8.43%	0.25%	36.27%	65.09%	49.20%	99.80%	50%	1.31×10^{-3}

TABLE 6.3 – Paramètres calibrés suivant les années d'exercice pour les deux formes paramétrique

Les résultats obtenus à l'issu du calibrage sont assez satisfaisants notamment pour les données de l'exercice 2022. Néanmoins, on remarque une légère détérioration de la valeur d'erreur absolue par rapport aux résultats obtenus précédemment pour les données de l'exercice 2023 pour les deux fonctions du shift. Cette observation est tout à fait cohérente avec l'évolution du niveau de courbure pour les swaptions ATM entre les années 2022 et 2023.

Nous remarquons également quelques saturations au niveau des paramètres de la deuxième forme étudiée pour la fonction de shift. En effet, les paramètres $\theta_{shift}, \kappa_{shift}$ se rapprochent des bornes de calibrage fixé au départ.

Pour compléter notre analyse, nous procédons à une étude des écarts entre les volatilités marchés et modèle pour l'exercice 2022. Nous choisissons la première forme paramétrique comme base d'analyse pour ces résultats satisfaisants notamment en termes de non saturation des paramètres et d'erreur absolue. De fait, nous présentons la matrice des écarts entre les volatilités de marché et celle produite par le modèle (Voir figure 6.9).

Maturity/Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0.07%	0.02%	0.03%	0.04%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.00%	0.05%
2	0.00%	0.02%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%	0.01%	0.04%	0.09%
3	0.02%	0.03%	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%	0.00%	0.04%	0.08%
4	0.04%	0.04%	0.02%	0.00%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.03%	0.03%	0.04%	0.02%	0.02%	0.06%
5	0.04%	0.03%	0.01%	0.01%	0.03%	0.03%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.05%	0.03%	0.01%	0.04%
7	0.03%	0.03%	0.01%	0.02%	0.04%	0.04%	0.05%	0.05%	0.05%	0.06%	0.06%	0.03%	0.00%	0.03%
10	0.02%	0.03%	0.00%	0.02%	0.03%	0.04%	0.05%	0.05%	0.06%	0.06%	0.06%	0.03%	0.00%	0.03%
15	0.03%	0.03%	0.02%	0.00%	0.01%	0.02%	0.02%	0.03%	0.04%	0.04%	0.05%	0.02%	0.01%	0.03%
20	0.04%	0.04%	0.02%	0.01%	0.01%	0.02%	0.03%	0.03%	0.04%	0.05%	0.06%	0.03%	0.01%	0.01%
25	0.04%	0.03%	0.02%	0.00%	0.01%	0.02%	0.03%	0.04%	0.05%	0.06%	0.07%	0.05%	0.03%	0.01%
30	0.06%	0.05%	0.03%	0.01%	0.01%	0.02%	0.03%	0.04%	0.05%	0.06%	0.07%	0.06%	0.04%	0.02%

FIGURE 6.9 – Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités du modèle après calibrage pour les swaptions ATM

Les écarts absolus sont acceptables sur une grande partie de la surface de volatilité ATM. Néanmoins, on peut remarquer que le modèle peut rencontrer d'éventuelles difficultés

dans les parties de la surface où le niveau de courbure est plus prononcé que dans d'autres zones de la surface. En particulier pour les faibles maturités (Voir la figure 6.3 pour observer le niveau de courbure en fonction de la maturité).

Pour voir plus clairement cet effet nous avons présenté les skews de volatilités pour les maturités 1 an et 20 ans (Voir la figure 6.10). Nous observons clairement que pour la première maturité le modèle essaie de suivre le niveau de courbure des volatilités sans pouvoir le répliquer parfaitement, mais la différence entre les courbes reste assez acceptable.

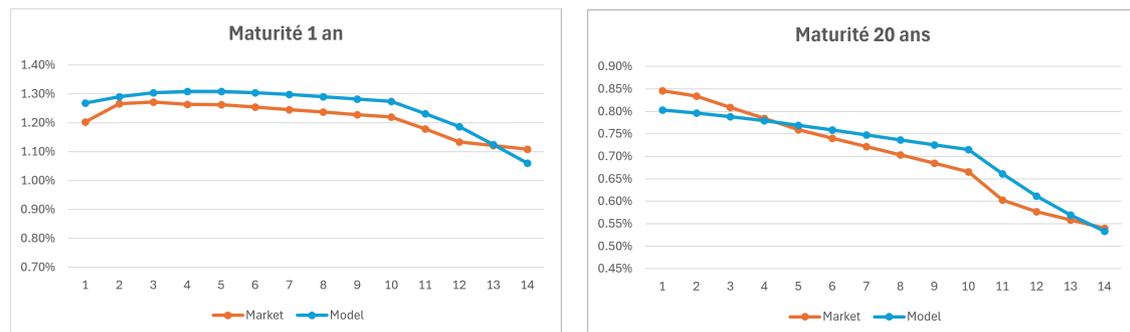


FIGURE 6.10 – Réplication du skew de volatilité ATM par le modèle pour les maturités 1 et 20 ans

Bien que l'évolution du contexte économique induit de fortes variations dans les niveaux de volatilités et du taux sans risque, notre modèle s'y adapte généralement d'une manière plutôt acceptable et peut être utilisé pour réaliser des études ALM.

Toutes les études que nous avons mené jusqu'à présent avaient pour objectif principal de s'assurer de la convergence des algorithmes d'optimisation et de la capacité du modèle à répliquer la surface des volatilités ATM, mais également de vérifier sa robustesse face à des données provenant de différentes conjonctures économiques. On pourrait dire que notre modèle a produit des résultats généralement acceptables, mais notre étude est loin d'être complète sur les possibilités de ce modèle. En effet, il reste plusieurs zones d'ombre sur les formes paramétriques de la fonction du *shift*; s'agissant de la caractéristique principale de ce modèle.

De fait, la partie suivante aurait pour objectif l'objectivation des paramètres de la fonction du *shift* dans le sens où on cherchera des allures pour ces fonctions qui soient plus interprétables dans un cadre assurantiel.

6.7.2 Objectivation de la fonction du *shift*

Avant de nous lancer dans notre étude des paramètres de la fonction du *shift*, il convient de rappeler que notre choix des deux formes paramétriques a été motivé par leur relative simplicité, car elles permettent d'obtenir des allures monotones et en particulier

décroissantes (conditions 6.14) de la fonction du shift en fonction de la maturité avec un nombre minimal de paramètres.

D'autre part l'étude de deux formes paramétriques avait pour but d'établir des comparaisons entre des paramétrisations présentant un nombre différent de degrés de libertés (bien entendu nous avons fixé le paramètre α_{shift} à 50%). Bien que la deuxième forme a donné des résultats moins stables lors des dernières études, on en présentera rapidement les résultats après l'objectivation avec un focus sur la première forme qui nous intéressera par la suite (pour des études ALM éventuellement).

La méthodologie d'objectivation que nous avons adopté pour la fonction du shift est centrée sur la procédure de Multi-Start que nous présentons ci-après.

La procédure du **Multi-Start** consiste à initialiser aléatoirement les paramètres à calibrer selon une loi uniforme dans l'intervalle $\left[\frac{Param_init}{Scaling}, Param_init * Scaling\right]$. Ensuite pour chacun de ses tirages, les paramètres optimaux sont déterminés. Cette méthode s'avère très utile pour plusieurs raisons. D'une part, il permet d'éviter de tomber dans des minimums locaux. D'autre part il permet d'analyser la distribution des paramètres calibrés pour en proposer des contrôles en cohérence avec l'objectif souhaité. C'est cette dernière utilité du Multi-Start qui nous intéresse le plus pour l'objectivation de la fonction du shift.

La procédure du multi-start requièrent :

- Le choix du nombre d'itérations à effectuer.
- Le choix du facteur de *scaling* qui permet de contrôler la largeur de l'intervalle pour le tirage aléatoire des paramètres initiaux.

Afin d'étudier la distribution des paramètres du shift et en tenant compte du temps d'exécution du calibrage nous avons effectué 1000 itérations du Multi-Start. Le Multi-Start a été réalisé en utilisant les données de marché du 4^{ime} trimestre de l'année 2023, nous avons également opté pour l'algorithme d'optimisation de Nelder-Mead.

6.7.2.1 Premiers résultats du Multi-Start

Nous présenterons si dessous les premiers résultats du Multi-Start qui sont acceptables d'une part en terme d'erreur absolue et d'autre part en termes de non-saturation des paramètres calibrés.

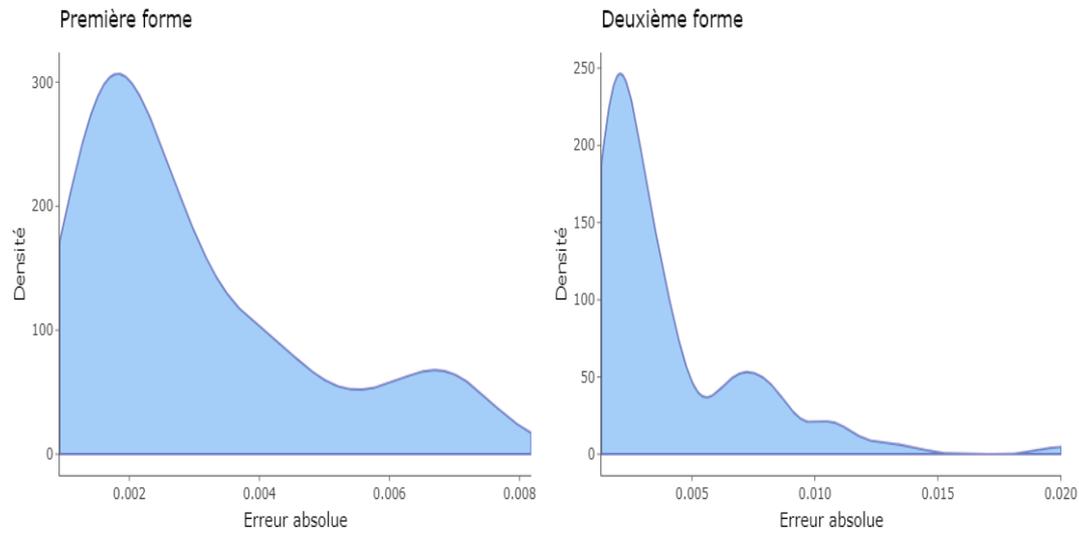


FIGURE 6.11 – Distribution de l'erreur absolue pour les deux formes paramétriques

Première forme										
Itération	a	b	c	d	κ	θ	α_0	α_∞	β	Erreur absolue
84	10.08%	0.57%	7.82%	0.87%	30.92%	53.06%	6.69%	13.50%	7.53%	0.09%
45	8.47%	0.63%	13.11%	2.12%	27.13%	44.22%	6.24%	23.80%	6.11%	0.11%
20	2.42%	0.19%	8.49%	0.57%	33.80%	58.20%	30.57%	44.63%	12.67%	0.11%
62	3.34%	0.43%	10.62%	1.35%	39.17%	59.54%	17.20%	25.26%	16.91%	0.12%
90	8.47%	0.55%	12.37%	2.08%	38.43%	47.37%	5.47%	21.54%	8.99%	0.12%
Deuxième forme										
Itération	a	b	c	d	κ	θ	θ_{shift}	κ_{shift}	α_{shift}	Erreur absolue
72	1.68%	0.24%	8.43%	0.25%	36.27%	65.09%	49.20%	99.80%	50%	0.13%
18	1.72%	0.28%	8.56%	0.22%	35.60%	64.73%	46.59%	69.04%	50%	0.13%
9	1.84%	0.31%	8.92%	0.37%	32.64%	65.02%	40.73%	99.97%	50%	0.13%
20	1.32%	0.31%	10.55%	0.61%	33.70%	65.15%	45.79%	98.59%	50%	0.14%
49	1.43%	0.25%	9.29%	0.54%	28.77%	62.84%	46.58%	71.35%	50%	0.14%
48	1.22%	0.29%	10.67%	0.58%	34.32%	65.42%	49.60%	93.33%	50%	0.14%

TABLE 6.4 – Meilleurs itérations de la multi-start pour la première et la deuxième forme paramétrique

Suite à la réalisation des 1000 initialisations aléatoires des paramètres, nous remarquons que, visiblement, la plupart des calibrages fournissent des résultats acceptables en termes d'erreurs absolues. Pour s'en assurer nous avons tracé les graphes des densités empiriques (voir la figure 6.11) des valeurs d'erreurs absolues pour les deux fonctions. L'étude de la distribution des valeurs absolues montre que pour les deux fonctions l'erreur absolue la plus fréquente (valeur modale) est assez faible.

Pour la suite de l'étude nous nous restreignons aux itérations autour de cette valeur modale. Un autre point intéressant à analyser serait les allures des fonctions du shift pour les itérations correspondantes du Multi-Start. De fait Nous présentons dans les figures

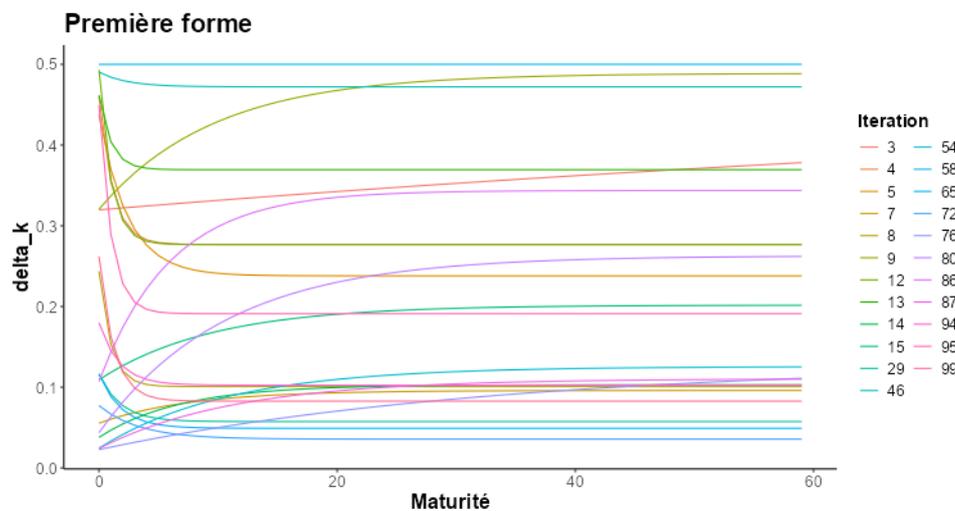


FIGURE 6.12 – Aperçu de quelques allures de première fonction du shift

6.12 et 6.13 les graphes des formes paramétriques du shift pour certaines itérations parmi celles sélectionnées précédemment.

Comme prévu dans les sections précédentes, le comportement des fonctions de shift apparaît assez aléatoire : nous obtenons divers types de formes, mais pas nécessairement celles qui nous intéressent. Cette situation est due au fait que nous n'avons imposé aucun contrôle spécifique sur les paramètres de ces fonctions. Par conséquent, la suite logique de notre analyse consistera à étudier la distribution des paramètres afin de sélectionner les contrôles à appliquer pour obtenir les formes souhaitées, tout en maintenant un niveau d'erreur absolue acceptable.

6.7.2.2 Étude de la distribution des paramètres du Multi-Start

L'étude de la distribution des paramètres du shift a pour objectif de repérer les zones de valeurs permettant d'obtenir des niveaux d'erreurs acceptables. On s'en servira pour restreindre le domaine de variation de ces variables pour calibrer le modèle, on pourra également faire cette restriction de sorte à contrôler la monotonie du shift en fonction de la date de maturité tout en gardant des niveaux d'erreurs tolérables. Nous en présentons ci-dessous les principaux résultats.

La figure 6.14 présente la distribution des paramètres de la première forme. Nous procédons à une analyse de ces distribution :

- Tout en ayant des valeurs d'erreurs acceptables, le paramètre α_0 s'accumule autour des points $\alpha_0 \approx 5\%$ et $\alpha \approx 47\%$.
- Le paramètre α_∞ décrivant le niveau du shift à l'ultime s'accumule autour d'un point caractéristique autour de 8%.

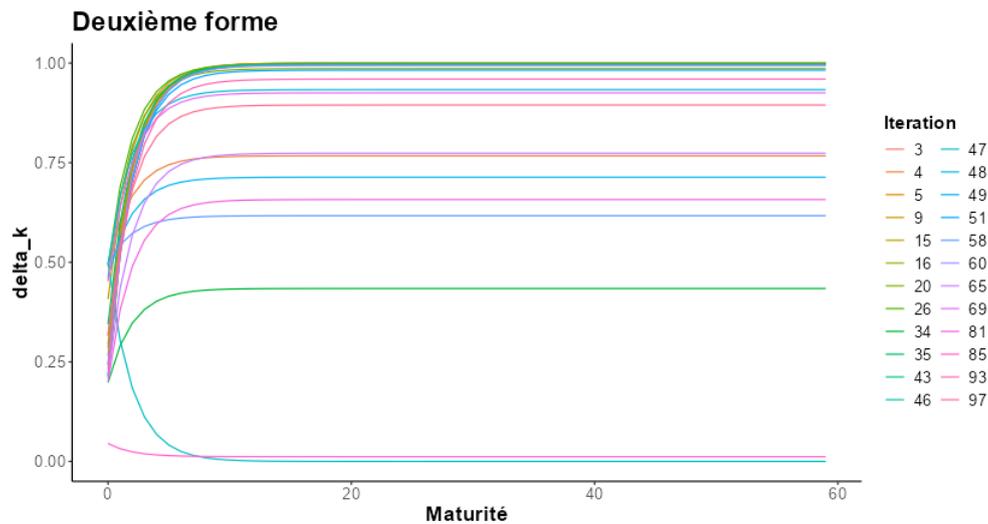


FIGURE 6.13 – Aperçu de quelques allures de la deuxième fonction du shift

- Concernant la vitesse de convergence de la fonction décrite par le paramètre β sa peut être autant élevé (saturation) ou de valeur assez faible autour de 10%.

La même étude menée sur la distribution des paramètres (Voir la figure 6.15) de la deuxième forme à savoir : θ et κ (sachant que α était fixé à 50%) mènent à des conclusions pareilles. En effet, avec un grand nombre de valeurs autour de 20% on peut avoir un tas de situation où le shift est décroissant en fonction de la date de maturité, avec une vitesse qui y est variable, bien que cette dernière admet un mode de distribution proche de 100%. Néanmoins, cette forme sera omise pour la suite de l'étude pour les problèmes de saturation cités précédemment.

Nous pouvons conclure que les formes étudiées peuvent prendre de nombreuses formes, notamment des allures décroissantes de la date de maturité, tout en ayant des valeurs de la fonction objective acceptables.

6.7.2.3 Résultats après contrôle des paramètres

Nous nous intéressons désormais à la deuxième forme paramétrique et nous proposons dans cette partie d'effectuer des contrôles sur les domaines de variations des paramètres tout en bornant leurs valeurs autour des points caractéristiques que nous avons décrit précédemment nous obtenons les allures présentée dans 6.16

Les allures obtenues pour la première forme sont décroissantes avec des niveaux de départ et des niveaux à l'ultime assez différent, ce qui permet de couvrir des plages de valeurs plus ou moins larges pour le shift. Des vitesses de convergence vers le niveau à l'ultime rapide et d'autres moins rapide permettent également d'avoir tout un tas de situations

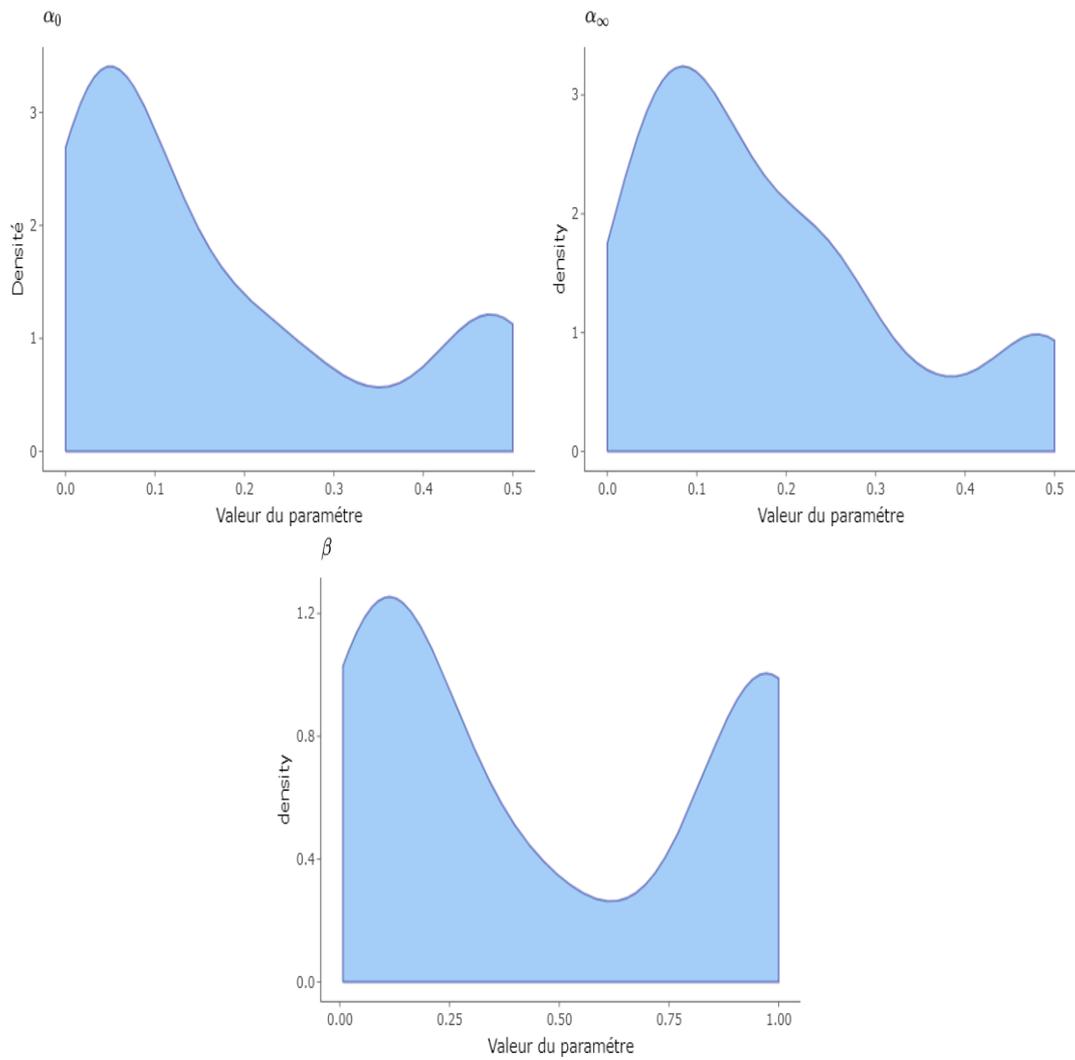


FIGURE 6.14 – Distribution des paramètres de la première forme

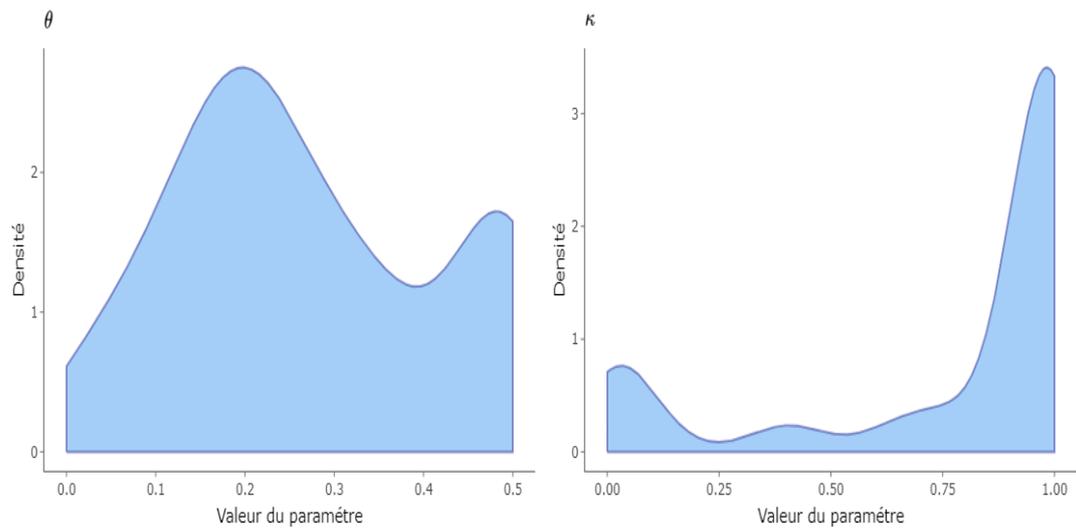


FIGURE 6.15 – Distribution des paramètres de la deuxième forme

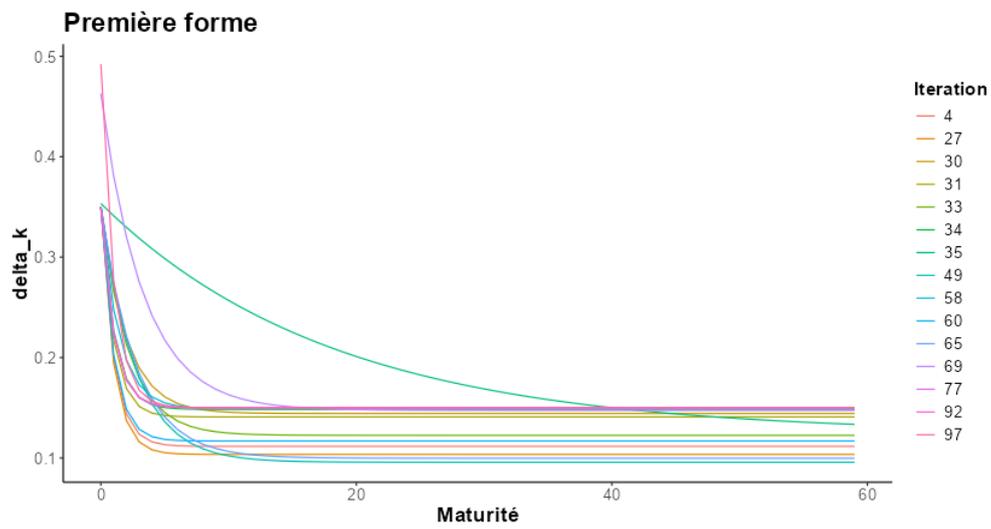


FIGURE 6.16 – Distribution des valeurs d'erreurs pour les deux formes paramétriques

Paramètre	a	b	c	d	κ	θ	α_0	α_∞	β
Valeur du paramètre	2.65%	0.40%	6.03%	0.01%	59.82%	80.60%	35 %	15%	6%

TABLE 6.5 – Paramètres de la version contrôlée du DDLMM avec shift paramétrique

qui peuvent être adaptées à des contextes économiques assez diversifiés. Pour approfondir notre étude, il serait intéressant de réaliser des analyses de sensibilité sur les niveaux des paramètres de la deuxième forme afin d'en examiner l'impact.

6.8 Validation du modèle

L'intégration de notre modèle de taux dans un cadre de GSE en risque neutre nécessite que le modèle satisfasse certains tests requis par les normes réglementaires avant d'être utilisé pour la génération de scénarios économiques à des fins d'applications actuarielles. Pour un GSE risque neutre et relativement aux hypothèses utilisées dans ce cadre de modélisation, deux catégories de tests sont à effectuer : Les tests de martingalité et le test de Monte-Carlo. Les premiers tests permettent de tester l'hypothèse de martingalité des prix des actifs actualisés dans un cadre d'absence d'opportunité d'arbitrage. Le test Monte-Carlo a pour objectif de tester la *Market Consistency* du modèle comme précisé par la réglementation : Le modèle doit permettre au mieux de reproduire avec un degré de précision qui y est acceptable les données de marché utilisés pour le calibrage.

Les tests de validation se basent sur la méthode de Monte-Carlo pour l'estimation de l'espérance qui, de sa part, requiert un nombre conséquent de trajectoires simulées. Dès lors, nous commençons par détailler l'approche considérée pour la diffusion du modèle.

Les paramètres utilisés pour la diffusion du modèle (voir tableau 6.5) correspondent à la meilleure itération sélectionnée parmi celles présentées dans la figure 6.16.

6.8.1 Diffusion du modèle

La diffusion des taux forward se fait généralement sous la mesure LIBOR Spot. Nous rappelons que l'intérêt d'introduire cette mesure réside dans la diffusion de ces taux sous une dynamique commune, équivalente à la mesure sans risque traditionnellement utilisée pour la diffusion des modèles de taux dans un cadre de modélisation en risque neutre.

Nous rappelons également que la dynamique des taux forward sous la mesure LIBOR Spot est présentée sous la formulation équivalente définie dans la partie 4.3.2.5. Par l'application du lemme d'Itô il vient que :

$$d \ln \tilde{F}_k(t) = \sigma_k(t) \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\Delta T_j \rho_{j,k} \sigma_j(t) \tilde{F}_j(t)}{1 + \Delta T_j (\tilde{F}_j(t) - \delta(j))} dt - \sum_{q=1}^{N_f} \frac{\xi_k^q(t)^2}{2} dt + \sum_{q=1}^{N_f} \xi_k^q(t) dZ^q(t) \quad (6.15)$$

Avec :

- $N_f \in \mathbb{N}$, le nombre de facteurs dans la structure de volatilité,
- $\sigma_k(t) = \sqrt{\sum_{q=1}^{N_f} (\xi_k^q(t))^2}$, la volatilité associée à chaque taux forward.

Le schéma de discrétisation

Pour la diffusion de notre modèle de taux. Nous utilisons la méthode de discrétisation d'Euler. Le schéma de discrétisation correspond à la subdivision $(T_j)_{j \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ où M est l'indice de maturité maximale. La subdivision est choisie de sorte à être compatible avec les dates de maturités, et les pas de temps $(T_{k+1} - T_k)_{k \in \llbracket 1, M-1 \rrbracket}$ des swaptions disponibles. En effet, pour simplifier les calculs, nous avons supposé que les structures de volatilité et corrélation sont constantes par morceaux sur les dates inter-maturités : c'est à dire sur les intervalles $[T_k - T_{k+1}]$ pour $k \in \llbracket 1, M \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 1, M \rrbracket$, le taux forward F_k varie dans l'intervalle $[0, T_k]$ donc la diffusion couvre les éléments du schéma de discrétisation T_i tel que $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$.

$$\tilde{F}_k(T_{i+1}) = \tilde{F}_k(T_i) \exp \left\{ \sigma_k(T_i) \Delta T_i \left(\sum_{j=\beta(T_i)}^k \frac{\Delta T_j \rho_{j,k} \sigma_j(T_i) \tilde{F}_j(T_i)}{1 + \Delta T_j (\tilde{F}_j(T_i) - \delta(j))} - \sum_{q=1}^{N_f} \frac{\xi_k^q(T_i)^2}{2} \right) + \sqrt{\Delta T_i} \sum_{q=1}^{N_f} \xi_k^q(T_i) \epsilon_i^q \right\}$$

À chaque étape de la simulation nous avons besoin des quantités suivantes :

- L'échantillon $(\epsilon_i^q)_{q \in \llbracket 1, N_f \rrbracket}$, où pour tout $q \in \llbracket 1, N_f \rrbracket$, $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ la variable $\epsilon_i^q = \frac{1}{\sqrt{\Delta T_i}} (Z^q(T_{i+1}) - Z^q(T_i))$, suit une loi normale standard. De plus les variables $(\epsilon_i^q)_{i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, q \in \llbracket 1, N_f \rrbracket}$ sont indépendantes. ;
- Les taux forward $(F_j(T_i))_{j \in \llbracket i+1, k \rrbracket}$.

Nous pouvons désormais calculer les prix Zéro-Coupon. En effet nous avons $P(T_i, T_i) = 1$, et

$$\frac{P(t, T_{i+1})}{P(t, T_i)} = \frac{1}{1 + \Delta T_i F_i(t)}, \quad \forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket$$

Et les prix des Zéro-Coupon peuvent s'exprimer en utilisant l'itération suivante :

$$P(T_i, T_{i+k}) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{P(T_i, T_{i+j+1})}{P(T_i, T_{i+j})} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1 + \Delta T_{i+j} F_{i+j}(t)}, \quad i \in \llbracket 0, M \rrbracket, \quad k \in \llbracket 1, M-i \rrbracket$$

De même les facteurs d'actualisation peuvent être calculés en suivant les étapes suivantes :

1. Initialisation : $D(0) = 1$;
2. Récurrence : pour tout $k \in \llbracket 0, M - 1 \rrbracket$, $D(T_{k+1}) = D(T_k) \times P(T_k, T_{k+1})$.

6.8.2 Tests de martingalité

Martingalité des déflateurs

Pour les déflateurs, le test de martingalité vérifie que pour toute date de simulation T_j nous avons l'égalité suivante :

$$P(0, T_j) = \mathbb{E}^* [D(T_j)], \quad (6.16)$$

Où \mathbb{E}^* désigne l'espérance sous la mesure LIBOR spot. Nous rappelons également que les déflateurs sont calculés pour chaque date de simulation par la formule suivante :

$$D(T_j) = \prod_{k \leq j-1} P(T_k, T_{k+1}) \quad (6.17)$$

L'espérance est estimée selon une approche Monte-Carlo en utilisant la loi forte des grands nombres. Soit N_s le nombre de simulation, l'estimation de l'espérance est donnée par :

$$\widehat{\mathbb{E}}^* [D(T_j)] = \frac{1}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} D^{(s)}(T_j). \quad (6.18)$$

Le test statistique à effectuer dans ce cas est :

$$\mathcal{H}_0 : \frac{\widehat{\mathbb{E}}^* [D(T_j)] - P(0, T_j)}{P(0, T_j)} = 0 \quad \text{contre} \quad \mathcal{H}_1 : \frac{\widehat{\mathbb{E}}^* [D(T_j)] - P(0, T_j)}{P(0, T_j)} \neq 0 \quad (6.19)$$

L'intervalle de confiance de l'estimateur est donnée par :

$$\left[-\frac{\widehat{sd}(T_j)}{P(0, T_j) \sqrt{N_s}} \Phi^{-1} \left(\frac{1 + \alpha}{2} \right) ; +\frac{\widehat{sd}(T_j)}{P(0, T_j) \sqrt{N_s}} \Phi^{-1} \left(\frac{1 + \alpha}{2} \right) \right] \quad (6.20)$$

$$\widehat{sd}(T_j)^2 = \frac{1}{N_s - 1} \sum_{s=1}^{N_s} \left(D^{(s)}(T_j) - \widehat{\mathbb{E}}^* [D(T_j)] \right)^2 \quad (6.21)$$

Les p-values sont calculées comme suit :

$$2 \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{\sqrt{N_s}}{\widehat{sd}(T_j)} |\widehat{\mathbb{E}}^* [D(T_j)] - P(0, T_j)| \right) \right\} \quad (6.22)$$

Nous présentons ci-dessous les intervalles de confiance pour les déflateurs ainsi que le p-values correspond aux tests statistiques réalisés :

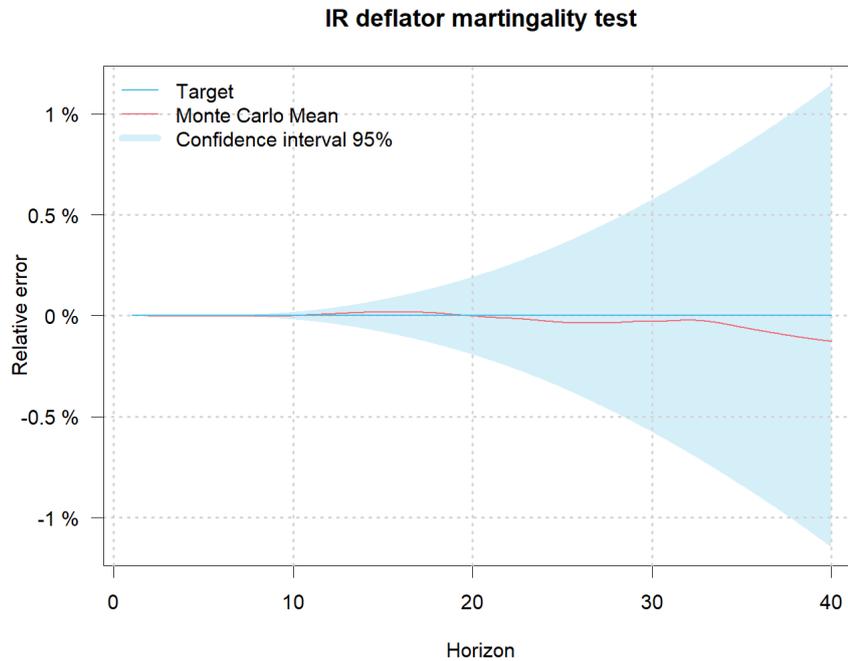


FIGURE 6.17 – Intervalles pour les déflateurs

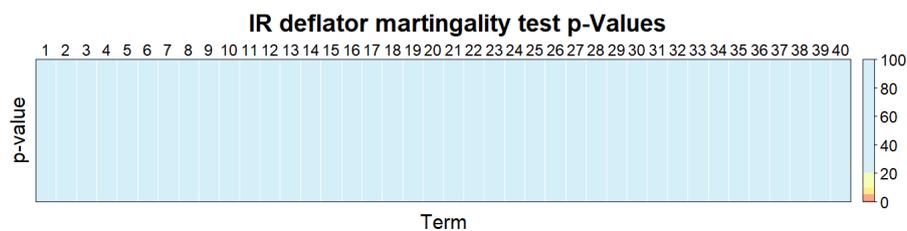


FIGURE 6.18 – P-values pour les déflateurs

Matringalité des prix Zéro-Coupon

De même concernant les prix Zéro-Coupon, le test consiste à vérifier que sous l'hypothèse de probabilité risque neutre, les prix actualisés des actifs financiers sont des martingales. Donc, pour toute date de simulation T_j il faut vérifier l'égalité suivante :

$$\hat{\mathbb{E}}^* [D(T_i) P(T_i, T_j)] = P(0, T_j) \quad (6.23)$$

Les intervalles de confiance et les p-valeurs prennent la forme qu'auparavant en utilisant l'estimateur. Et le test à réaliser prend la forme suivante :

$$\mathcal{H}_0 : \frac{\widehat{\mathbb{E}}^* [D(T_i) P(T_i, T_j)] - P(0, T_j)}{P(0, T_j)} = 0 \quad \text{contre} \quad \frac{\widehat{\mathbb{E}}^* [D(T_i) P(T_i, T_j)] - P(0, T_j)}{P(0, T_j)} \neq 0 \quad (6.24)$$

Nous obtenons les résultats suivant :

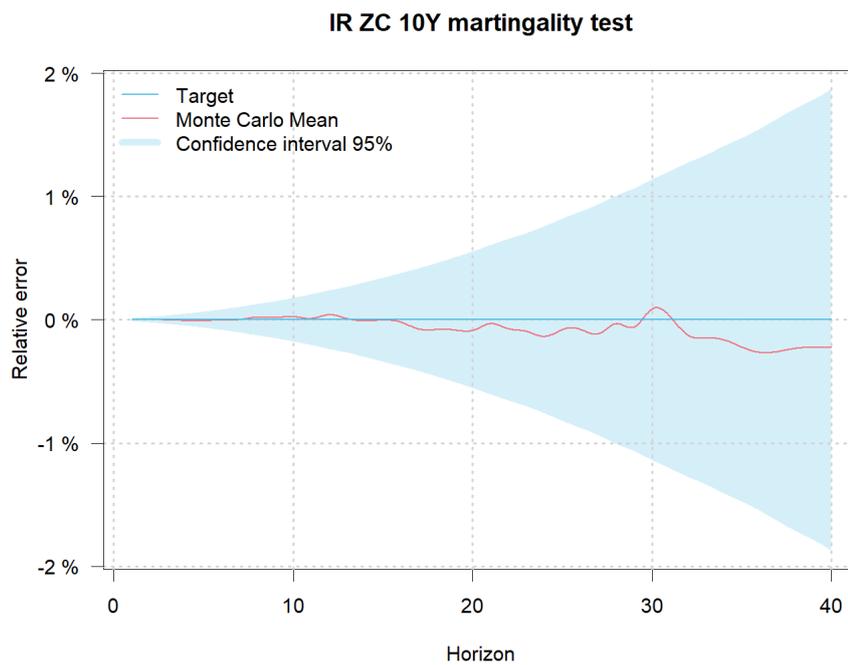


FIGURE 6.19 – Intervalles de confiance pour les prix Zéro-Coupon

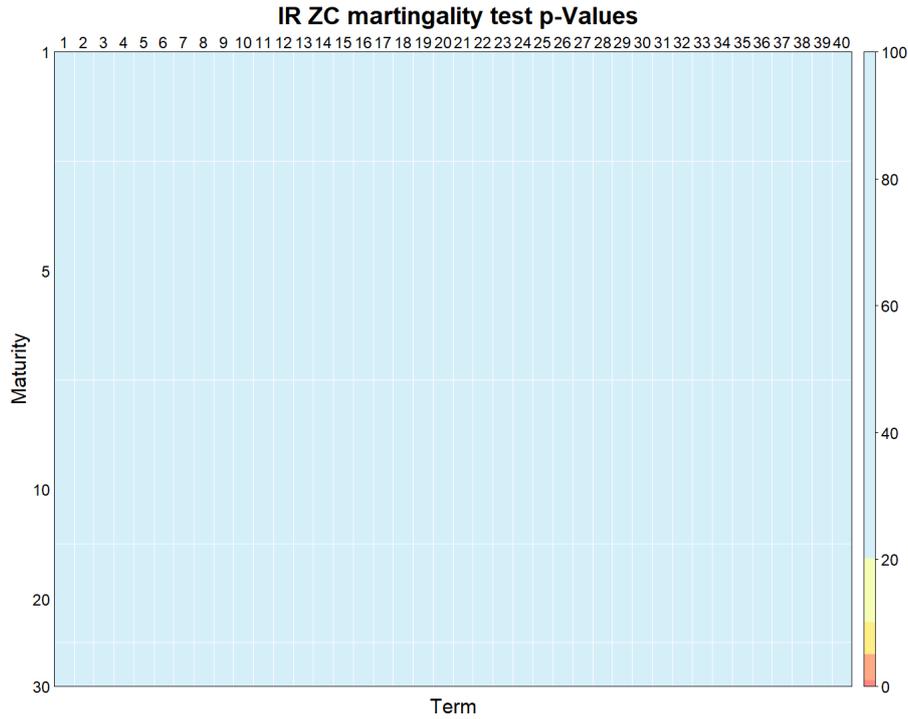


FIGURE 6.20 – P-values pour les prix Zéro-Coupon

6.8.3 Tests de repricing Monte-Carlo

Nous rappelons que le prix théorique tel que détaillé dans la partie 3.3.2 est donné par la formule :

$$Swaption(0, T_n, T_N) = \mathbb{E}^* \left[D(t, T_n) A_{n,N}(T_n) (S_{n,N}(T_n) - K)_+ \right] \quad (6.25)$$

Le payoff actualisé de la swaption étant donnée par :

$$Payoff_{n,N,K} = D(t, T_n) A_{n,N}(T_n) (S_{n,N}(T_n) - K)_+ \quad (6.26)$$

Chaque simulation nous fourni un payoff de la swaption, de sorte que le prix de la swaption peut être estimé par la moyenne Monte-Carlo à savoir :

$$\widehat{Swaption}(0, T_n, T_N) = \frac{1}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} Payoff_{n,N,K}^{(s)} \quad (6.27)$$

Pour que le test de repricing soit validé, il faut que le prix Monte-Carlo soit très proche des données initiales à savoir les prix observés sur le marché.

Nous présentons ci-dessous la matrice des écarts absolus entre des prix obtenus en utilisant la formule de pricing théorique et les prix Monte-Carlo :

Maturity/Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0.14%	0.05%	0.04%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.02%	0.01%	0.01%	0.05%	0.08%
2	0.04%	0.04%	0.03%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.02%	0.05%	0.08%
3	0.07%	0.06%	0.03%	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%	0.05%	0.08%
4	0.06%	0.04%	0.02%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.04%	0.07%
5	0.05%	0.03%	0.00%	0.01%	0.02%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.02%	0.02%	0.00%	0.03%	0.05%
7	0.02%	0.01%	0.01%	0.03%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.03%	0.01%	0.01%	0.04%
10	0.02%	0.02%	0.00%	0.01%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.01%	0.02%	0.04%
15	0.05%	0.05%	0.04%	0.03%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%	0.00%	0.02%	0.03%
20	0.07%	0.08%	0.06%	0.04%	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.02%	0.00%	0.01%	0.02%
25	0.07%	0.07%	0.06%	0.03%	0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%	0.01%	0.00%	0.01%
30	0.08%	0.08%	0.06%	0.05%	0.02%	0.02%	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.03%	0.01%	0.01%	0.00%

FIGURE 6.21 – Écarts absolus entre les prix modèle et Monte-Carlo

Conclusion pour la partie validation Comme nous avons pu le voir, les tests de validation pour le modèle DDLMM avec shift paramétrique sont très satisfaisants. D'une part, tous les écarts de martingalité sont contenus dans l'intervalle de confiance à 95% (p-valeurs toutes largement supérieures à 5%) avec un ordre de grandeur dans l'intervalle $[-0.5\%, 0.5\%]$. De même, les écarts obtenus entre les prix calculés par la formule de pricing et ceux obtenus en utilisant l'approche Monte-Carlo sont très acceptables, sauf pour très peu de points de données, notamment la première maturité et ténor.

6.8.4 Études des trajectoires générées suite à la diffusion

Jusqu'à présent, nous avons exploré plusieurs aspects de l'analyse du modèle DDLMM avec shift paramétrique. Notamment, la validation du modèle a produit des résultats suffisamment convaincants pour envisager son intégration dans un cadre de GSE en risque neutre. Néanmoins, la réalisation des sensibilités sur les paramètres de la fonction du shift semble nécessaire. L'objectif de cette partie sera de discuter l'impact de la forme paramétrique sur les trajectoires générées suite à la diffusion par notre modèle. De fait, nous analyserons les statistiques descriptives des taux nominaux générés correspondant aux maturités 1 an et 10 ans, pour trois sensibilités. La présence de taux négatif y sera discutée, mais également le scénario extrême inverse de présence de taux extrême. Les tests de Monte-Carlo seront également présentés. Nous finirons par une comparaison rapide avec un DDLMM classique avec shift constant $\delta = 10\%$.

Nous rappelons que dans les parties précédentes deux formes paramétriques étaient étudiées dont la première était sélectionnée pour sa stabilité. La figure 6.16 montre plusieurs allures pour la fonction du shift correspondant à plusieurs paramétrisations différentes. Notre choix des sensibilités va se faire de sorte qu'on puisse étudier des sensibilités sur le niveau de départ, le niveau à l'ultime et la vitesse de convergence. Finalement, trois sensibilités étaient sélectionnées, nous les présentons ci-dessous :

Sensibilité 1 : On considère les paramètres du shift suivants : $\alpha_0 = 35\%$, $\alpha_\infty = 10\%$ et $\beta = 100\%$. Cette sensibilité correspond à un cas où le shift variera dans l'intervalle $[10\% ; 35\%]$ avec une vitesse de convergence très rapide, c'est à dire

la valeur du shift se stabilisera à la valeur 10% dès les premières maturités.

Sensibilité 2 : On considère les paramètres du shift suivants : $\alpha_0 = 35\%$, $\alpha_\infty = 10\%$ et $\beta = 5\%$. On se positionne dans le même cas que pour la première sensibilité mais avec une vitesse de convergence assez faible pour permettre au shift de parcourir un plus grand nombre de valeurs, notamment pour les assez grandes maturités avant de se stabiliser à 10%.

Sensibilité 3 : On considère les paramètres du shift suivants : $\alpha_0 = 50\%$, $\alpha_\infty = 5\%$ et $\beta = 35\%$. Pour cette sensibilité on propose d'élargir la plage de valeurs parcourues par le shift, qui seront prises dans l'intervalle $[5\% ; 50\%]$ avec une vitesse de convergence vers le niveau ultime assez modérée.

Un ensemble de 1000 trajectoires a été généré par notre modèle. Nous procédons dans ce qui suit à une analyse de ces sensibilités :

Première sensibilité : Diffusion du modèle avec les paramètres du shift $\alpha_0 = 35\%$, $\alpha_\infty = 10\%$ et $\beta = 100\%$

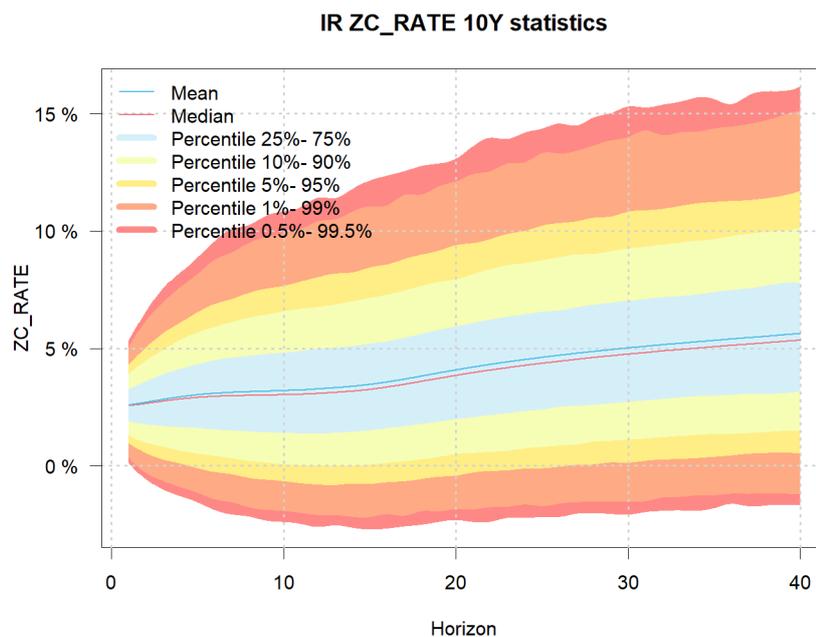


FIGURE 6.22 – Sensibilité 1 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 10 ans

Horizon de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans
Moyenne	2.24%	2.63%	3.31%	3.53%	5.43%
Médiane	2.21%	2.52%	3.10%	3.25%	5.09%
Quantile à 99.5%	5.50%	8.23%	11.72%	13.61%	17.25%
Quantile à 0.5%	-0.69%	-1.84%	-2.73%	-3.34%	-2.46%
Taux négatifs	2.69%	8.76%	10.63%	12.51%	5.43%

TABLE 6.6 – Sensibilité 1 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 1 an

Concernant le taux ZC 1 an, le tableau 6.7 regroupe les statistiques descriptives : la moyenne et la médiane ainsi que des quantiles y compris ceux inférieurs à 1% et supérieurs à 99% pour décrire les scénarios extrêmes. Pour le taux 1 an l'écart entre la moyenne et la médiane augmente avec l'horizon de projection : l'écart le plus grand est enregistré pour l'horizon 40 ans. Cela est peut être dû à la présence de trajectoires extrêmes pour les grands horizons de projection. Le niveau de la négativité des taux ainsi que la proportion des taux négatifs générés sont maintenus à un niveau raisonnable, ce qui est cohérent avec le contexte actuel où les taux ne montrent pas des valeurs négatives. L'explosivité des taux est assez contrôlée par le modèle, en effet le scénario extrême des taux à l'horizon 40 ans est de 17.25%.

Horizon de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans
Moyenne	2.58%	3.02%	3.20%	4.08%	5.62%
Médiane	2.56%	2.91%	3.02%	3.84%	5.34%
Quantile à 99.5%	5.34%	8.85%	10.82%	13.07%	16.15%
Quantile à 0.5%	0.13%	-1.56%	-2.40%	-2.32%	-1.70%

TABLE 6.7 – Sensibilité 1 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 10 ans

Concernant les taux nominaux 10 ans, la vitesse de convergence rapide de la fonction du shift implique que son niveau se stabilisera rapidement vers la valeurs 10%. Les résultats des statistiques descriptives montrent une réduction dans les écarts entre les moyennes et la médiane qui est peut être dû à la diminution de la proportion des scénarios extrêmes parmi les scénarios générés. Nous remarquons également dans la figure 6.22 que les scénarios extrêmes négatifs sont de faible proportion, et les taux les plus négatifs sont enregistrés pour les grands horizons.

Deuxième sensibilité : Diffusion du modèle avec les paramètres du shift $\alpha_0 = 35\%$, $\alpha_\infty = 10\%$ et $\beta = 5\%$

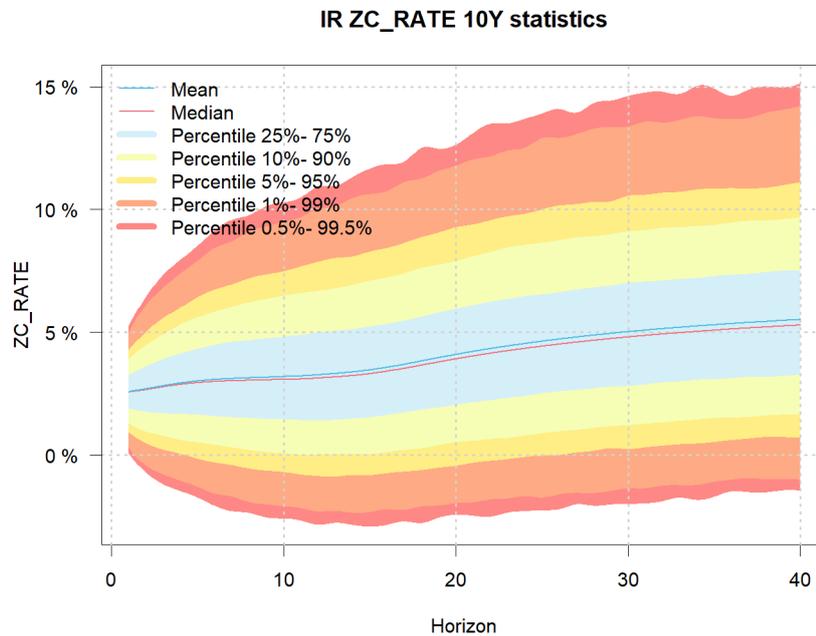


FIGURE 6.23 – Sensibilité 2 : Statistique descriptives des trajectoires générées pour le taux 10 ans

Horizon de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans
Moyenne	2.58%	3.02%	3.20%	4.08%	5.62%
Médiane	2.57%	2.95%	3.09%	3.92%	5.29%
Quantile à 99.5%	5.27%	8.52%	10.28%	12.63%	15.15%
Quantile à 0.5%	0.08%	-1.73%	-2.59%	-2.44%	-1.46%

TABLE 6.8 – Sensibilité 2 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 10 ans

La diminution de la vitesse de convergence de la fonction du shift entraîne une diminution dans le niveau des taux pour tous les horizons de projection. La proportion des taux négatifs pour les taux 10 ans a augmenté, nous observons une plus grande proportion de trajectoires à taux négatifs pour les grands horizons notamment. On remarque également que la proportion des scénarios extrêmes positifs (scénarios possiblement explosifs) diminue également.

Troisième sensibilité : Diffusion du modèle avec les paramètres du shift $\alpha_0 = 50\%$, $\alpha_\infty = 5\%$ et $\beta = 35\%$

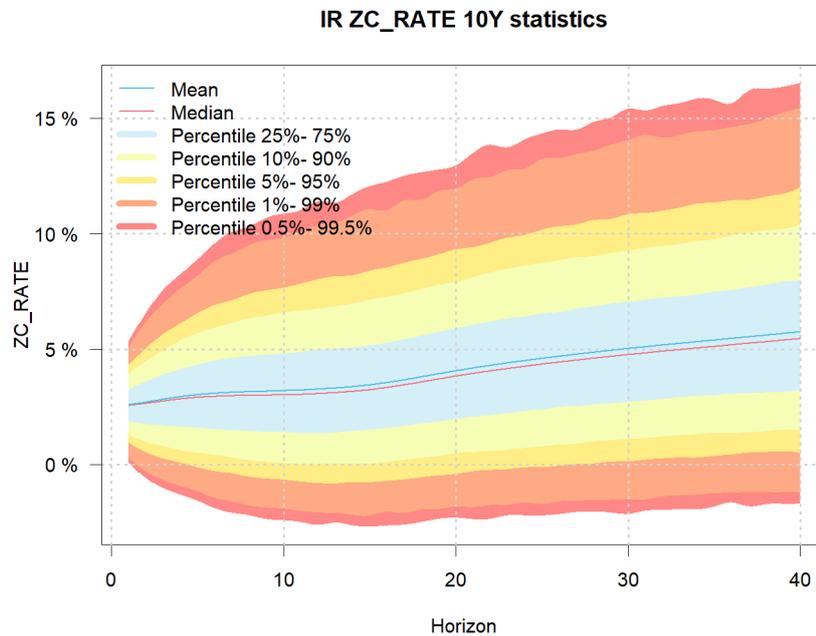


FIGURE 6.24 – Sensibilité 3 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 10 ans

Horizon de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans
Moyenne	2.24%	2.63%	3.31%	3.51%	5.49%
Médiane	2.22%	2.52%	3.10%	3.24%	5.14%
Quantiles à 99.5%	5.48%	8.19%	11.73%	13.53%	17.63%
Quantiles à 0.5%	-0.72%	-1.77%	-2.74%	-3.33%	-2.53%
Taux négatifs	0.93%	8.38%	8.87%	12.22%	4.49%

TABLE 6.9 – Sensibilité 3 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 1 an

Avec son niveau de départ de 50% le modèle génère un niveau de taux plus bas avec une plus grande proportion de trajectoires de taux négatifs, et cela pour tous les horizons de

projection, les taux les plus négatifs sont enregistrés pour les plus grands horizons.

Horizon de projection	1 an	5 ans	10 ans	20 ans	40 ans
Moyenne	2.59%	3.02%	3.20%	4.05%	5.74%
Médiane	2.56%	2.91%	3.02%	3.83%	5.45%
Quantiles à 99.5%	5.35%	8.89%	10.86%	12.95%	16.52%
Quantiles à 0.5%	0.12%	-1.57%	-2.43%	-2.31%	-1.69%

TABLE 6.10 – Sensibilité 3 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 10 ans

La fonction du shift tend vers un niveau de shift plus faible pour la première et la deuxième sensibilité avec une vitesse de convergence assez modérée. De fait, pour des maturités assez grandes notamment celle de 10 ans les taux seront shiftés plus faiblement relativement à la deuxième sensibilité. En effet, nous pouvons l’observer sur le graphique 6.24 la proportion des taux négatifs ainsi que leurs niveaux est désormais plus faible.

Conclusion pour les sensibilités : Les sensibilités réalisées nous ont permis de construire une première idée sur les impacts de la fonction du shift sur les trajectoires diffusées et pourront nous permettre d’anticiper les impacts ALM correspondants même si cela sort du cadre du présent travail et pourra constituer une piste d’approfondissement intéressante. Nous avons pu remarquer qu’un niveau du shift initial assez élevé avec une vitesse de convergence vers un niveau à l’ultime assez faible, qui est élevé, permettra l’apparition de taux négatifs pour les courtes maturités qui seront de plus en plus négatifs en fonction de l’horizon de projection, mais en revanche la proportion des scénarios extrêmes négatifs sera plus faible pour les grandes maturités. Néanmoins, l’obtention de scénarios extrêmes négatifs pour les moyennes et grandes maturités, est possible en diminuant la vitesse de convergence ou en augmentant le niveau à l’ultime. Les scénarios extrêmes explosives sont généralement limités à un niveau entre 15% et 17% qui reste raisonnable et convenable pour passer les tests de validation notamment celui de *repricing* de Monte-Carlo sans problèmes particuliers.

Dans ce cadre on peut dire que la paramétrisation au niveau du shift, notamment ces allures décroissantes était d’une grande utilité, d’une part pour la stabilisation des résultats de validation, en particulier celui de *monte-carlo*. De plus, il permet un contrôle accru sur le niveau de négativité des taux, constituant ainsi un cadre idéal pour la réalisation de diverses sensibilités et chocs, notamment dans le cadre des études ALM.

6.9 Conclusion sur le modèle DDLMM avec shift paramétrique

En guise de conclusion, nous avons donc pu parcourir plusieurs d’éléments d’analyse concernant le modèle DDLMM avec shift paramétrique. Les aspects théoriques du modèle

étaient présentés et les étapes de calculs pour dériver une formule fermée pour le prix de swaptions étaient explicitées.

Le modèle a pu réaliser des performances très satisfaisantes sur la plupart de la surface de volatilité des swaptions ATM, sa stabilité était validée par l'utilisation de deux algorithmes d'optimisation différents, et sa robustesse testée avec succès en utilisant des données de deux exercices différents.

La paramétrisation du shift s'avère également utile pour la stabilisation des tests de validation notamment les tests de martingalité de repricing. Les sensibilités réalisées sur les différents paramètres de la fonction du shift choisie en constituent une preuve.

Néanmoins, le modèle peut rencontrer des difficultés à répliquer les volatilités de marchés quand ceux-ci présentent des niveaux de courbures assez prononcés, notamment pour les swaptions ITM/OTM. Cette limitation du modèle a été mise en évidence lors du passage aux données de l'exercice 2022. De ce fait, on pourra dire que le modèle n'est pas bien adapté pour la réplification du *smile* de volatilité.

Dans la poursuite de notre objectif dans ce mémoire, il nous semble pertinent de nous orienter vers un modèle plus complexe, qui nous permettra non seulement de répliquer la surface de volatilité ATM, mais également celle des swaptions AFM (OTM et ITM), et notamment lorsque le smile de volatilité est présent par exemple pour les données du 4^{ème} de l'exercice 2022 (voir la figure 6.5).

Chapitre 7

Le modèle DDLMM avec paramètres incertains

7.1 Introduction

Hormis les propriétés souhaitables du DDLMM avec shift paramétrique et sa stabilité en termes de résultats de validation, néanmoins il ne permet pas de répliquer parfaitement le smile de volatilité observé sur le marché de swaptions. Ce fait n'est pas très étonnant vu que nous nous sommes intéressés à l'objectivation du shift en lui accordant une forme paramétrique dépendante des dates de maturité, alors que la modélisation du smile est généralement lié à la nature de la structure de volatilité (déterministe, stochastique ou discrétionnaire).

La littérature sur les modèles permettant de répliquer le smile de volatilité est assez abondante, on peut en citer les modèles à volatilité locale et ceux à volatilité stochastique notamment le DDSVMM (voir la partie 4.3.2). Ce dernier sera utilisé comme base de comparaison vu qu'il s'agit du modèle classiquement utilisé pour cette finalité.

Ce chapitre sera consacré à l'étude du modèle DDLMM avec paramètres Incertains.

7.2 Éléments théorique du modèle

On adopte les mêmes notations utilisées dans le cas du DDLMM avec shift paramétriques, à savoir $\mathcal{T} = \{T_0, \dots, T_N\}$ un ensemble de dates et $\{\Delta T_0, \dots, \Delta T_{N-1}\}$ tel que $\Delta T_k = T_{k+1} - T_k$. Avec $T_0 = 0$. On considère la famille des taux forward F_k de dates d'expiration T_k et de maturité T_{k+1} , pour $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. On rappelle que :

$$F_k(t) := F(t; T_k, T_{k+1}) = \frac{P(t, T_k) - P(t, T_{k+1})}{\Delta T_k P(t, T_{k+1})}$$

Avec $P(t, T)$ le prix à l'instant t du zéro-coupon de maturité T .

On note par Q^k la mesure de probabilité T_k -forward, associée au changement du numé-

raire $P(\cdot, T_k)$ et par E^k l'espérance sous cette mesure. On rappelle aussi que les taux forward sont des martingales sous leurs mesures forward associées.

On note par Q^d la mesure Libor spot ; on rappelle que le numéraire B_d est défini par :

$$B_d(t) = \frac{P(t, T_{\beta(t)})}{\prod_{k=1}^{\beta(t)-1} P(T_k, T_{k+1})} \quad \beta(t) = \inf \{i \geq 1 : T_i \geq t\} \quad (7.1)$$

7.3 Motivation et spécification derrière le modèle DDLMMUP

Le modèle DD-LMM (introduit dans la partie 4.3.2.2.1) est un choix naturel de modélisation des taux forwards «*shiftés*» comme martingale positive avec une volatilité déterministe dont la structure reste à spécifier (voir 4.3.3). Le modèle DDLMM permet, en utilisant certaines approximations d'obtenir des formules fermées pour le prix des swaptions ce qui explique sa popularité. Néanmoins, sous cette formulation la volatilité n'est pas assez paramétrisée pour assurer une réplcation complète du smile de volatilité ce qui explique le recours à des modèles plus complexes.

Le modèle DDLMMUP (*Displaced Diffusion Libor Market Model with Uncertain Parameters*) s'inscrit dans ce cadre dans la mesure où il est une extension du modèle DDLMM. Dans ce cas, il s'agit plutôt d'une version simplifiée et intuitive des modèles à volatilité stochastique (la stochastisité est introduite d'une façon discrétionnaire). Ce modèle a été initialement proposé par Gaterek (2003) et Brigo, Mercurio et Rapisadra (2004) puis Errai, Mauri et Mercurio (2004) dans [EMM04] ont proposés une version multi-factoriel du même modèle. Ce modèle est très peu répandu dans le monde actuariel, et notre objectif dans cette partie serait de l'investiger en détail pour tirer des conclusions quant à son applicabilité pour générer des tables de scénarios économiques.

Comme nous l'avons évoqué dans la partie 4.2.5, le taux forward F_k est une martingale sous sa mesure canonique (à savoir la mesure $Q^{T_{k+1}}$). Ceci dit, la dynamique du taux forward sous cette mesure de probabilité est sans *drift*, et pour la modéliser, il suffit de modéliser leurs coefficients de diffusion. Par exemple dans un modèle DD-LMM simple le coefficient de diffusion pour F_k est :

$$\sigma_k(t) [F_k(t) + \delta]$$

Où α est constante et σ_k une fonction déterministe de t , décrivant la volatilité du taux à l'instant t avec $t \in [0, T_k]$.

Le principe de base du DDLMMUP est de partir d'un DDLMM simple mais en ajoutant une incertitude sur ces paramètres. C'est à dire que les paramètres seront inconnus à l'instant $t = 0$. Les volatilités σ_k sont révélés immédiatement après l'instant 0, soit à $t = 0^+$.

Le modèle suppose que l'incertitude sur les paramètres provient d'une variable aléatoire

discrète I indépendante du processus Z^q , prenant des valeurs dans $\{1, \dots, N\}$, avec $Q^d(I=i) = \lambda_i$, $\lambda_i > 0$. En effet à $t = 0^+$ il existe N scénarios possible pour les paramètres,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_k^1 & \text{avec probabilité } \lambda_1 \\ \sigma_k^2 & \text{avec probabilité } \lambda_2 \\ \vdots & \vdots \\ \sigma_k^N & \text{avec probabilité } \lambda_N \end{array} \right.$$

Où σ_k^i est une fonction déterministe du temps.

En notons $\tilde{F}_k(t) := F_k(t) + \delta$ le taux forward shifté, sa dynamique sous sa mesure canonique est :

$$d\tilde{F}_k(t) = \tilde{F}_k(t) \times \sum_{q=1}^{N_f} \xi_k^{I,q}(t) dZ_{k+1}^q(t)$$

Avec $(Z_{k+1}^q)_{q \in \llbracket 1, N_f \rrbracket}$ est un mouvement brownien multi-dimensionnel standard sous la mesure $Q^{T_{k+1}}$.

7.3.1 Dynamique des taux forwards sous la mesure LIBOR Spot

La dynamique des taux forward sous la mesure LIBOR Spot dans le modèle DDLMM (voir la partie 4.3.1), peut se généraliser naturellement au modèle DDLMMUP, en conditionnant par rapport à I . En utilisant les notations introduites précédemment la dynamique des taux forward sous la mesure Libor spot est donnée par :

$$d\tilde{F}_k(t) = \tilde{F}_k(t) \left[\sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\Delta T_j \rho_{j,k} \sigma_j^I(t) \sigma_k^I(t) \tilde{F}_j(t)}{1 + \Delta T_j F_j(t)} dt + \sigma_k^I(t) dZ_k^d(t) \right] \quad (7.2)$$

Avec :

$$\rho_{ij}(t) = \sum_{q=1}^{N_f} \beta_i^q(t) \beta_j^q(t) \quad (7.3)$$

Où ρ est la structure de corrélation définie dans 4.3.2.5 de sorte que :

$$\xi_k^{I,q}(t) = \beta_k^q(t) \sigma_k^I(t) \quad (7.4)$$

Remarque 22. *Sous cette formulation nous avons supposé que les corrélations sont indépendantes de la variable aléatoire I . L'incertitude est appliquée sur les paramètres de la volatilité uniquement.*

7.4 Le pricing de swaptions dans le modèle DDLMM avec paramètres incertains

Les swaptions sont les produits dérivés de base utilisés classiquement pour le calibrage des modèles de taux en univers risque-neutre, de fait cette partie est réservée à la dérivation du formule fermée pour le pricing des swaptions dans le cadre du modèle DDLMM avec paramètres incertains.

Dans le DDLMM avec paramètres incertains tout se passe comme un DDLMM en conditionnant par rapport à une réalisation de la variable aléatoire I . De ce fait le prix des swaptions peut être dérivé en passant par les propriétés de l'espérance conditionnelle dans le cas discret. Pour les mêmes raisons que pour le DDLMM avec shift paramétrique il faut dériver une approximation du prix de swaption théorique.

On considère une swaption payeuse de tenor $T_N - T_n$. Les paiements s'effectuant selon l'échéancier $\{T_n, T_{n+1}, \dots, T_N\}$

Le taux swap forward se définissant par :

$$S_{n,N}(t) = \frac{P(t, T_n) - P(t, T_N)}{\sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(t, T_{k+1})} \quad t \in [0, T_n]$$

Le modèle donne la dynamique des taux forward. Pour exprimer la dynamique du taux swap forward, il est nécessaire d'écrire $S_{n,N}$ en fonction des taux forward. En particulier, pour tout $t \in [0, T_n]$ nous avons :

$$\begin{aligned} S_{n,N}(t) &= \frac{\sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(t, T_{k+1}) F_k(t)}{\sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(t, T_{k+1})} \\ &= \sum_{k=n}^{N-1} \alpha_k(t) F_k(t) \end{aligned}$$

Où $\forall k \in \llbracket n, N-1 \rrbracket, \forall t \in [0, T_n]$

$$\alpha_k(t) = \frac{\Delta T_k P(t, T_{k+1})}{\sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(t, T_{k+1})} \quad (7.5)$$

$(S_{n,N}(t))_{t \in [0, T_n]}$ est une martingale sous la probabilité swap forward $Q^{n,N}$ associée au changement de numéraire $A_{n,N}(t) = \sum_{k=n}^{N-1} \Delta T_k P(t, T_k)$, donc admet une dynamique

sans *drift*. D'après la formule d'Itô (voir par exemple [EG11]) :

$$\begin{aligned} dS_{n,N}(t) &= \sum_{k=n}^{N-1} \frac{\partial S_{n,N}(t)}{\partial F_k} dF_k(t) \\ &= \sum_{k=n}^{N-1} \frac{\partial S_{n,N}(t)}{\partial F_k} (F_k(t) + \alpha) \sum_{q=1}^{N_f} \xi_k^{q,I}(t) dZ_{n,N}^q(t) \\ &= \sum_{q=1}^{N_f} \sum_{k=n}^{N-1} \gamma_k^{q,I}(t) dZ_{n,N}^q(t) \end{aligned}$$

Où :

$$\gamma_k^{q,I}(t) := \frac{\partial S_{n,N}(t)}{\partial F_k} \xi_k^{q,I}(t) (F_k(t) + \delta)$$

$(Z_{n,N}^q)_{q \in [1, N_f]}$ étant un mouvement brownien N_f -dimensionnel standard.

Afin de dériver la dynamique de $S_{n,N}$ sous la mesure $Q^{\alpha, \beta}$ on va faire des approximations sur les γ_k . Dans ce qui suit nous présentons l'approximation proposée par Hull-White et qu'on peut trouver en détails dans [WZ06], cette approximation sera utilisée pour la détermination de la formule du prix des swaptions.

7.4.1 L'approximation de *Hull-White*

La première étape de l'approximation consiste à calculer le terme $\frac{\partial S_{n,N}}{\partial F_k}$. Nous avons :

$$S_{n,N} = \sum_{k=n}^{N-1} \alpha_k(t) F_k(t), \text{ avec } \alpha_k(t) = \frac{\Delta T_k P(t, T_{k+1})}{A_{n,N}(t)} \quad (7.6)$$

Remarque 23. Les coefficients stochastiques $(\alpha_k)_{k \in [n, N-1]}$ dépendent également des taux forwards, en effet nous avons :

$$\alpha_k(t) = f_k(F_n(t), \dots, F_{N-1}(t)) = \frac{\Delta T_k \prod_{j=n}^k \frac{1}{1 + \Delta T_j F_j(t)}}{\sum_{j=n}^{N-1} \Delta T_j \prod_{l=n}^j \frac{1}{1 + \Delta T_l F_l(t)}} \quad (7.7)$$

Par l'application du lemme d'Itô, il vient que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{n,N}(t)}{\partial F_j} &= \sum_{k=n}^{N-1} \frac{\partial (\alpha_k(t) F_k(t))}{\partial F_j} \\ &= \sum_{k=n}^{N-1} \left[\frac{\partial (\alpha_k(t))}{\partial F_j} F_k(t) + \frac{\partial F_k(t)}{\partial F_j} \alpha_k(t) \right] \\ &= \alpha_j(t) + \sum_{k=n}^{N-1} \frac{\partial \alpha_k(t)}{\partial F_j} F_k(t) \end{aligned}$$

Le calcul du terme $\frac{\partial (\alpha_k(t))}{\partial F_j}$ est détaillé dans l'article de [WZ06], nous donnerons directement l'expression finale de la dérivée partiel :

$$\frac{\partial S_{n,N}(t)}{\partial F_j} = \alpha_j(t) + \frac{\Delta T_j}{1 + \Delta T_j F_j(t)} \left[\sum_{l=n}^{j-1} \alpha_l(t) (F_l(t) - S_{n,N}(t)) \right] \quad (7.8)$$

À ce stade il ne reste qu'à formuler les hypothèses nécessaires pour obtenir une dynamique approximative du taux swap forward. Cette dynamique peut sous entendu être normale, log-normale ou log-normale shifté. On présentera le cas log-normale shifté

Dynamique log-normale shiftée du taux swap forward

Pour avoir une dynamique log-normale on multiplie et on divise par $S_{n,N}(t) + \delta$, la dynamique du taux swap s'écrit dans ce cas :

$$dS_{n,N}(t) = (S_{n,N}(t) + \alpha) \sum_{q=1}^{N_f} \sum_{k=n}^{N-1} \omega_k(t) \xi_k^{q,I}(t) dZ_{n,N}^q(t) \quad (7.9)$$

Avec :

$$\omega_k(t) = \frac{(F_k(t) + \alpha)}{(S_{n,N}(t) + \delta)} \left(\alpha_j(t) + \frac{\Delta T_j}{1 + \Delta T_j F_j(t)} \left[\sum_{l=n}^{j-1} \alpha_l(t) (F_l(t) - S_{n,N}(t)) \right] \right) \quad (7.10)$$

Approximation par la méthode de *freezing*

Nous pouvons voir directement que les termes $(\omega_j(t))_{j \in \llbracket n, N-1 \rrbracket}$ dépendent eux aussi des taux forwards F_k qui sont de leurs part aléatoires, de ce fait, on ne peut pas obtenir une dynamique log-normale exacte pour le taux swap forward ; le modèle forward log-normale et swap log normal sont dits incompatibles (voir [BM01] pour en connaître plus).

Néanmoins nous pouvons imposer des hypothèses sur les variations des termes dans les ω_j pour obtenir une dynamique approximative du taux swap qui soit log-normale et profiter alors de ces propriétés souhaitables quant au calcul de l'espérance conditionnelle et donc à la détermination du prix théorique d'une swaption.

La méthode la plus utilisée en littérature est la méthode dite de *freezing* qui se base sur l'hypothèse de faible variabilité de certaines quantités aléatoires. Il existe plusieurs variantes de cette méthode, le lecteur intéressé pourra se référer à [BM01]. Dans notre cas, on suppose que :

$$\alpha_j(t) \approx \alpha_j(0) \quad \text{et} \quad \omega_j(t) \approx \omega_j(0) \quad (7.11)$$

La dynamique du taux swap devient dans ce cas :

$$dS_{n,N}(t) = (S_{n,N}(t) + \delta) \sum_{q=1}^{N_f} \sum_{k=n}^{N-1} \omega_k(0) \xi_k^{q,I}(t) dZ_{n,N}^q(t) \quad (7.12)$$

qui correspond bien à une dynamique log-normale.

On peut l'écrire sous la forme équivalente suivante :

$$dS_{n,N}(t) = (S_{n,N}(t) + \alpha) \gamma_{n,N}^I(t) d\tilde{Z}_{n,N}(t) \quad (7.13)$$

En posant :

$$\begin{aligned} \gamma_{n,N}^I(t) &:= \sqrt{\sum_{q=1}^{N_f} \left(\sum_{k=n}^{N-1} \omega_k(0) \xi_k^{q,I}(t) \right)^2} \\ d\tilde{Z}_{n,N}(t) &:= \frac{\sum_{q=1}^{N_f} \sum_{k=n}^{N-1} \omega_k(0) \xi_k^{q,I}(t) dZ_{n,N}^q(t)}{\gamma_{n,N}(t)} \end{aligned} \quad (7.14)$$

On peut vérifier grâce à la caractérisation de Lévy du mouvement brownien (on peut voir la référence [Cha] par exemple) que $\tilde{Z}_{n,N}$ est un mouvement brownien unidimensionnel sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q}^{n,N}$.

Finalement on trouve la dynamique du taux swap forward est donnée par :

$$d\tilde{S}_{n,N}(t) = \gamma_{n,N}^I(t) \tilde{S}_{n,N}(t) d\tilde{Z}_{n,N}(t)$$

Où :

$$\tilde{S}_{n,N}(t) = S_{n,N}(t) + \alpha$$

Pricing de la swaption

Comme démontrée dans la partie 3.3.2, la valeur d'une swaption régissant entre les dates T_n et T_N est donnée par :

$$PS_{n,N}^{Th}(K) = A_{n,N}(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,N}} \left[(S_{n,N} - K)_+ \right] \quad (7.15)$$

En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle et en conditionnant par rapport à la variable discrète I nous obtenons :

$$\begin{aligned} PS_{n,N}^{Th}(K) &= A_{n,N}(0)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,N}} \left[(S_{n,N}(T_n) - K)_+ \right] \\ &= A_{n,N}(0)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,N}} \left[\left(\tilde{S}_{n,N}(T_n) - (K + \delta) \right)_+ \right] \\ &= A_{n,N}(0) \sum_{i=1}^N P[I = i] \times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{n,N}} \left[\left(\tilde{S}_{n,N}(T_n) - (K + \delta) \right)_+ | I = i \right] \\ &= A_{n,N}(0) \sum_{i=1}^N \lambda_i Bl(K + \delta, S_{n,N}(0) + \delta, \Gamma_{n,N}^i) \end{aligned}$$

En posant :

$$\Gamma_{n,N}^i := \sqrt{\int_0^{T_n} [\gamma_{n,N}^i(s)]^2 ds} = \sqrt{\sum_{q=1}^{N_f} \int_0^{T_n} \left(\sum_{k=n}^{N-1} \omega_k(0) \xi_k^{q,i}(s) \right)^2 ds}$$

Avec :

$$Bl(K + \delta, S_{n,N}(0) + \delta, \Gamma_{n,N}^i) = (S_{n,N}(0) + \delta) \phi(d_1) - (K + \delta) \phi(d_2)$$

Où ϕ est la fonction de répartition de la loi normale standard et

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{S_{n,N}(0) + \alpha}{K + \alpha} \right) + (\Gamma_{n,N}^i)^2 \frac{T_n}{2}}{\Gamma_{n,N}^i \sqrt{T_n}}$$

$$d_2 = d_1 - \Gamma_{n,N}^i \sqrt{T_n}$$

7.5 Méthodologie de calibrage du DDLMMUP

L'objectif de cette partie est de détailler la procédure de calibrage suivie pour le modèle DDLMMUP. Il vient sans doute que cette dernière sera plus chaotique, d'une part pour le nombre de paramètres qui peut devenir très grand si on élargit l'espace de réalisation de la variable aléatoire I . D'autre part, le modèle contient des paramètres embarqués à fixer en amont du calibrage qui nécessitent également des études en vue de les objectiver.

7.5.1 Objectivation des paramètres embarqués du modèle DDLMMUP

Dans cette partie on présentera les études menées pour objectiver les valeurs que nous pourrions accorder aux paramètres embarqués au modèle DDLMMUP. Ces paramètres sont le *shift* δ , N le nombre de réalisation de la variable aléatoire I et les valeurs des probabilités $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$. Les résultats de ces études seront présentées dans la partie 7.6.1.

Remarque 24. *Les facteurs de corrélation β_k^q sont également des paramètres embarqués. La méthode d'estimation de ses facteurs a été traitée dans la partie C.1.*

7.5.1.1 Objectivation du nombre des probabilités N

Notre approche consiste à réaliser une sensibilité sur le nombre de probabilités N en le faisant varier ($N = 2, 3, 5$). Généralement nous sortons avec la conclusion que 3 scénarios est le meilleur choix. En fait, comme nous allons le voir dans les parties qui suivent, un modèle à deux scénarios semble très restreint pour capter le *smile de volatilité* et le passage 4-5 scénarios conduit à une hyper paramétrisation du modèle sans pour autant augmenter la précision du modèle.

7.5.1.2 Objectivation des valeurs des probabilités $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$

Pour $N = 3$, on suppose sans perte de généralité que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, on fait si au moins deux de ces probabilités sont égales cela revient au cas $N = 2$ ou $N = 1$ qui n'est pas très intéressant. De même la réalisation de plusieurs sensibilités sur les valeurs des probabilités nous conduit au constat qu'avoir un scénario très probable, un deuxième moyennement probable et un dernier très peu probable est le meilleur choix.

7.5.1.3 Objectivation du shift

À l'image de l'étude réalisée pour le DDLMM avec shift paramétrique, la même démarche a été utilisée pour déterminer une plage de valeurs admissibles pour le facteur de déplacement δ . L'étude réalisée avait pour objectif l'évaluation de l'impact du shift sur l'explosivité et leurs négativité et sur la stabilité des tests de validation, notamment celui de la *market-consistency*.

Nous avons pu conclure que des valeurs de shift de l'intervalle $[10\%, 20\%]$ permettent de limiter le nombre de trajectoires explosives de manière satisfaisante et donnent une certaine flexibilité pour des études de sensibilité (en particulier pour faire des chocs à

la baisse sur les taux d'intérêts). Néanmoins, comme nous l'avons pu conclure suite aux résultats sur le modèle DDLMM avec shift paramétrique, la réplication du **smile** de volatilité n'est pas la spécialité du shift donc nous n'avons pas poussé son étude plus loin pour le modèle DDLMMUP et on s'est contenté de fixer sa valeur à 10% pour la suite de l'étude.

7.5.2 Données d'entrée et paramètres à calibrer

Le calibrage du modèle DDLMMUP requiert les éléments suivants en entrée :

- La **courbe des taux sans risque initiale** : il s'agit de la courbe fournie mensuellement par l'EIOPA. Elle nous sera utile pour déterminer la courbe des *taux forward* à l'instant $t = 0$ nécessaire au calibrage.
- La **matrice de volatilité** des swaptions (suivant la convention de Bachelier dans notre cas) pour un ensemble de ténors et de maturités données.
- La **structure de corrélation inter-forward** s'agissant des facteurs β_k^q décrivant la corrélation entre les taux forwards.
- Le **shift** δ représentant le facteur de déplacement du modèle. En vue de l'étude réalisée pour son objectivation, sa valeur sera fixée à 10% pour la suite de notre étude.

Le nombre de paramètres à calibrer sera de 6 pour chaque réalisation de I :

- Les **paramètres de la fonction de Rebonato** : $\{a^i, b^i, c^i, d^i; i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$
- Les **paramètres de la fonction d'échelle** : $\{\theta^i, \kappa^i; i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$

7.5.2.1 Dépendance des paramètres de la variable aléatoire I

Si nous fixons $N = 3$, le nombre de paramètres totale est 18. Même si le nombre de points de données dont nous disposons est suffisant pour que le problème d'optimisation soit bien identifié, cela pourra engendrer des saturations au niveau de certains paramètres et poser des problèmes dans la partie diffusion.

Remarque 25. *S'agit d'un modèle log-normale un calibrage pathologique (contenant plusieurs saturation) peut conduire à générer des trajectoires explosives et poser des problèmes dans la partie validation.*

Une approche possible pour limiter le nombre des paramètres et éviter ce problème, c'est de sélectionner seulement un sous ensemble des paramètres qui dépendra de la variable aléatoire I le reste étant unique pour toutes réalisations.

7.5.2.2 Pondération des données de calibrage

Nous avons constaté dans le chapitre précédent que le modèle DDLMM avec shift paramétrique ne permet pas de répliquer le smile de volatilité. Dans le but d'examiner la

capacité du modèle DDLMMUP quant à la réplication du smile de volatilité nous allons nous intéresser plus aux swaptions AFM (OTM et ITM).

L'idée est de réaliser plusieurs sensibilités sur les poids de calibrage pour étudier l'impact de ce choix sur la réplication du *smile de volatilité*. Notre approche consiste à calibrer sur des swaptions ATM et AFM mais en sur-pondérant les swaptions AFM (OTM et ITM) s'agissant des instruments pour lesquelles le phénomène du *smile* est plus prononcé pour les données du 4^{ème} trimestre de l'exercice 2022 (voir la figure 6.5). Nous avons également effectué des sensibilités par rapport au strikes, maturités et ténors des swaptions considérées lors du calibrage. Nous présentons dans le tableau suivant les 6 sensibilités que nous avons réalisés :

N° de sensibilité	Pondération choisie dans la sensibilité
<i>Sensibilité 1</i>	On pondère uniformément toutes les <i>swaptions</i> disponibles
<i>Sensibilité 2</i>	<ul style="list-style-type: none"> — 40% ATM et 60% OTM — 50% {1 – 10} et 50% {15 – 30} — 60% {–100, –50, 50, 100} et 40% {–25, 25} bps
<i>Sensibilité 3</i>	<ul style="list-style-type: none"> — 30% ATM et 70% OTM — 30% {1 – 10} et 70% {15 – 30} — 70% {–150, –100, 100, 150} et 30% {–25, 25} bps

TABLE 7.1 – Sensibilités sur les paramètres pour trois probabilités

Après la réalisation des différentes sensibilité, nous avons fait en sorte d'être proche des pondérations qui ont permis de réduire l'erreur quadratique relative. Ces pondérations seront utilisées par la suite pour calibrer les autres modèles, à savoir le DDLMM et le DDSVLMM (voir 4.3.2) afin d'établir une base de comparaison.

Remarque 26. *Il existe des méthodes d'objectivation des pondérations plus sophistiquées que nous n'avons pas traité dans le cadre de ce mémoire. Néanmoins, le lecteur intéressé peut voir par exemple le mémoire [Hen18] où s'est intéressé à l'utilisation du Vega du portefeuille pour la pondération des données de calibrage.*

7.5.3 Formulation du problème d'optimisation

Nous rappelons à présent le problème d'optimisation utilisé pour déterminer les paramètres optimaux du modèle.

Le principe du calibrage et de déterminer les paramètres du modèle qui permettront de minimiser un écart quadratique pondéré entre les prix de swaptions observés sur le marché et les prix théoriques.

Le calibrage du modèle DDLMMUP monte certainement en complexité par rapport à celui du DDLMM avec shift paramétrique pour le grand nombre de paramètres qu'il faut

estimer :

$$\{(a^i, b^i, c^i, d^i, \kappa^i, \theta^i), i \in \llbracket 1, N \rrbracket\}$$

Et le problème d'optimisation peut être formulé comme suit :

$$\Theta = \underset{\Theta}{\operatorname{argmin}} \left(\sum_{n=1}^{N_1} \sum_{N=n+1}^{n+N_2} \omega_{n,N} \left(\frac{PS_{n,N}^{Mkt} (K_{n,N}, S_{n,N}(0), \sigma_{n,N}^{Mkt}) - PS_{n,N}^{Th} (K_{n,N}, \Theta)}{PS_{n,N}^{Mkt} (K_{n,N}, S_{n,N}(0), \sigma_{n,N}^{Mkt})} \right)^2 \right) \quad (7.16)$$

Où :

- N_1 et N_2 désignent respectivement l'indice de la maturité maximale et le ténor maximal des swaptions considérées pour le calibrage.
- $PS_{n,N}^{Mkt}$ le prix marché de la swaption d'indice de maturité n et de ténor N évalué à l'instant 0.
- $PS_{n,N}^{Th}$ le prix théorique d'une swaption obtenu par le modèle évalué à l'instant 0.
- $K_{n,N}$ correspond au strike de swaption de maturité d'indice n et de ténor N .
- $\omega_{n,N}$ correspond à la pondération de l'écart relatif quadratique sur la swaption d'indice de maturité n et de ténor N .

7.6 Résultats du calibrage

Dans le cadre du modèle DDLMM avec shift paramétrique, les résultats sur les Swaptions AFM ont montré que celui-ci n'est pas très adapté pour la réplication du *smile de volatilité*. En fait, ce dernier a un nombre de propriétés intéressantes en termes d'objectivation du facteur de déplacement δ mais également en termes de convergence et stabilité des résultats.

L'objectif du modèle DDLMMUP est différent dans le sens où on s'attend en premier lieu à une réplication du *smile de volatilité*, notamment la réplication de la surface de volatilité des swaptions AFM (OTM et ITM). Néanmoins on calibre également sur les swaptions pour répliquer le *skew* de volatilité. Notre procédure de calibrage consiste à trouver un compromis en termes de pondérations pour permettre de visualiser les deux phénomènes simultanément pour les swaptions AFM et ATM. De fait, nous avons réalisé un nombre de sensibilités sur les pondérations (voir tableau 7.1) pour en étudier l'impact sur la réplication du *smile de volatilité*.

Dans cette partie, nous présentons les résultats des sensibilités sur les hyper-paramètres et les poids de calibrage, ensuite nous étudions séparément les résultats de calibrage sur les swaptions ATM uniquement et après sur les *swaptions* AFM/ATM conjointement.

Nous rappelons que les éléments essentiels à analyser concernant le calibrage sont :

- Convergence de la fonction objective.
- La non-saturation des paramètres obtenus.
- La réplication de la matrice de Swaption en utilisant les paramètres calibrés.

7.6.1 Objectivation du choix des hyper-paramètres N et $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$

Comme évoqué dans la partie 7.5.1.1, nous avons réalisé des sensibilités sur le nombre de probabilités N en le faisant varier. Nous calibrons le modèle en prenant respectivement $N = 2, 3, 4$, nous avons obtenu les résultats suivants :

Sensibilité	Résultat de Calibrage sur swaptions AFM (RMSE)
$N = 2$	2.78%
$N = 3$	2.76%
$N = 4$	2.79%

TABLE 7.2 – Résultats de calibrage sur les swaptions AFM

La RMSE calculée sur les swaptions AFM montre que l'augmentation de N ne permet pas d'améliorer sensiblement les résultats et conduit à une augmentation dans le nombre de paramètres qui peut engendrer des problèmes de convergence et de stabilité des résultats.

La même étude réalisée sur les valeurs de probabilités λ_i conduisent à choisir un vecteur de probabilités avec un scénario très probable, un moyennement probable et un dernier peu probable, les auteurs dans [EMM04] ont fait le même choix. Dans la suite, nous travaillons avec les probabilités suivantes : $\lambda = (0.7, 0.2, 0.1)$

Choix des hyper-paramètres

Dans toute la suite on fixera :

$$\mathbf{N} = 3 \quad \lambda = (0.7, 0.2, 0.1)$$

7.6.2 Choix des pondérations des instruments de calibrage

Les différentes sensibilités présentées dans le tableau 7.1 donnent les résultats suivants :

Sensibilités	RMSE (sur les swaptions AFM)
1	2,91%
2	2,78%
3	2,76%

TABLE 7.3 – Résultats de calibrage pour les trois sensibilités

Choix des pondérations

On présentera dans la suite les résultats du calibrage correspondants au troisième cas tout en l'utilisant comme base de comparaison avec les autres modèles à savoir le DDLMM et le DDSVLMM.

7.6.3 Résultats de calibrage sur les Swaptions ATM

La présentation des résultats de calibrage sur les swaptions ATM se fait dans le but de comparer les résultats du modèle DDLMMUP avec ceux obtenus par le DDLMM avec shift paramétrique. Le calibrage a été effectué par des données de marchés du 4^{eme} trimestre de l'exercice 2022 pour les raisons citées précédemment.

Convergence de l'algorithme d'optimisation et résultats calibrés

Le calibrage du modèle DDLMMUP a été effectué à l'aide de l'algorithme d'optimisation de Nelder-Mead.

Nous présentons les résultats du calibrage obtenus dans le tableau suivant :

Réalisation	a	b	c	d	κ	θ	δ
$I = 1$	5.60%	0.21%	1.01%	8.91%	20.91%	11.55%	10%
$I = 2$	31.97%	17.55%	0.00%	0.00%	9.81%	50.80%	10%
$I = 3$	43.36%	6.30%	8.70%	0.00%	5.01%	0.00%	10%
Erreur absolue = 0.02 %							

TABLE 7.4 – Paramètres issus du calibrage sur les Swaptions ATM en utilisant l'algorithme Nelder-Mead

Nous pouvons dans un premier temps analyser plusieurs aspects liés au calibrage sur les Swaptions *ATM*.

Le premier point est lié à la convergence de l'algorithme d'optimisation. En effet, l'erreur absolue moyenne est de 0.02%, ce qui permet de dire que les résultats sont satisfaisants en termes d'erreur moyenne. Néanmoins un autre critère important dans notre étude est le phénomène de saturation des paramètres.

Cela nous mène à notre second point. En effet, on peut voir que pour les réalisations de I les plus improbables il y a eu des saturations au niveau de certains paramètres ; notamment les paramètres c et d de la fonction de *Rebonato* et le paramètre de *Scaling* θ .

Cela est dû à deux causes principales : D'une part le plus grand nombre de paramètres du modèle peut conduire à un phénomène de compensation entre ceux-ci. D'autre part les

probabilités de réalisation de I engendre implicitement une pondération dans la fonction de calibrage, et dans ce cas les paramètres associés aux probabilités les moins importantes seront moins impactant dans le problème d'optimisation.

Ainsi, pour la présente configuration la convergence de l'optimisation est satisfaisante mais la stabilité du calibrage soulève des questions vu le grand nombre des paramètres du modèle.

Un dernier point à vérifier est la cohérence entre les volatilités théoriques avec celle de marché.

La surface de volatilité ATM résultant du calibrage

Pour s'assurer de l'efficacité du calibrage sur les Swaptions *ATM*, un dernier point à analyser sont les écarts entre les volatilités théoriques avec celles du marché. Nous présentons les résultats correspondants à l'ensemble de la surface de volatilité, i.e pour les maturités allant de 1 à 5 années, puis 7, 10, 15, 20, 25, 30 ans et des ténors de 1 à 10 ans, puis 15, 20, 25 et 30 ans.

Ci-dessous la matrice contenant les écarts absolus sur l'ensemble de la surface de volatilité entre les données théoriques et celles du marché :

Maturity/Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
1	0.02%	0.02%	0.01%	0.03%	0.02%	0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.02%	0.01%	0.01%	0.02%
2	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.03%	0.04%	0.04%	0.03%	0.04%	0.04%
3	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.02%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%
4	0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.02%	0.02%	0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%
5	0.00%	0.00%	0.02%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%
7	0.00%	0.00%	0.01%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%
10	0.00%	0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%
15	0.04%	0.05%	0.04%	0.04%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.02%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
20	0.05%	0.05%	0.04%	0.03%	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.02%	0.02%	0.03%
25	0.04%	0.03%	0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.03%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%
30	0.05%	0.03%	0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.02%	0.02%	0.03%	0.05%	0.05%	0.04%	0.04%

FIGURE 7.1 – Ecarts absolus entre les volatilités de marché et les volatilités du modèle DDLMMUP après calibrage

Les écarts obtenus entre les volatilités induites par le modèle est celles du marché sont satisfaisants sur l'ensemble de la surface de volatilité. Les erreurs les plus élevées sont constatées pour les ténors les plus faibles pour les grandes maturités ainsi que pour les ténors les plus élevés pour les faibles maturités.

Nous pouvons donc conclure que le calibrage du modèle DDLMMUP était satisfaisant en termes d'écart entre les volatilités théoriques et celles de marchés mais également au niveau de la convergence de l'algorithme d'optimisation. Toutefois la saturation des paramètres en fait une limitation du modèle qu'il faut soulever.

Nous rappelons également que le modèle DDLMM avec shift paramétrique a été aussi

performant sur les swaptions ATM qui est d'ailleurs moins complexes en termes de calibrage et du nombre de paramètres, notamment on ne constate pas un phénomène de saturation des paramètres.

De fait, la performance du modèle DDLMMUP est principalement attendu dans le calibrage sur les swaptions AFM, notamment pour la réplication du *smile de volatilité* qui y est observé.

On s'intéressera dans la section suivante à l'analyse des résultats obtenus lors du calibrage sur les surfaces de volatilité ITM et OTM.

7.6.4 Résultats du calibrage sur les swaptions AFM

En fait, suite à notre procédure de calibrage, explicitée en détails dans la partie 6.5, nous nous intéressons à présent au calibrage sur les swaptions ITM et OTM. Nous rappelons également que le calibrage sur ces instruments est relativement complexe par rapport à celui des swaptions ATM.

Cette complexité provient principalement de la présence du phénomène de *smile de volatilité* qui se caractérise par la présence d'une courbure dans les graphes de volatilité implicite en fonction du strike contrairement aux volatilités ATM dont les surfaces de volatilité sont relativement "*plates*". Nous rappelons que la plupart des modèles classiques ne permettent pas de capturer ce phénomène correctement en raison de leurs structures de volatilité déterministes.

Afin de pouvoir reproduire cette courbure au niveau de la surface de volatilité nous examinerons le modèle DDLMMUP avec le choix de pondération réduisant l'erreur quadratique moyenne (voir la partie 6.5 pour plus de détails). Nous présentons ci-dessous les résultats de calibrage.

Données de calibrage

On rappelle brièvement les données utilisées dans le calibrage. Les données de marché utilisées proviennent du 4^{eme} trimestre de l'année 2022. Le calibrage a été effectué en fixant le ténor des swaptions à 10 ans et pour les maturités allant de 1 à 5 années, 7, 10, 15, 20, 25, 30 ans et des *strikes* allant de -100 bps à 100 bps.

Résultats de calibrage

À l'image du calibrage sur les swaptions ATM, nous avons utilisé l'algorithme d'optimisation de Nelder-Mead. Nous insistons également sur le fait que la capacité du modèle à reproduire la courbure au niveau de la surface de volatilité provient de l'incertitude sur les paramètres du modèle. Les bornes de calibrage pour les différents paramètres ont été choisies aussi larges que possible (aucun contrôle sur les paramètres n'est imposé à ce stage).

Les paramètres calibrés obtenus sont présentés dans le tableau suivant :

Scénario	a	b	c	d	κ	θ	δ
I = 1	2.7%	0.0%	7.9%	8.5%	21.6%	13.6%	10.0%
I = 2	12.5%	18.1%	0.0%	0.0%	7.2%	59.5%	10.0%
I = 3	45.2%	3.2%	11.1%	0.0%	5.8%	0.0%	10.0%

TABLE 7.5 – Paramètres issus du calibrage sur les Swaptions ITM/OTM en utilisant l’algorithme Nelder-Mead

Dans l’objectif d’explicitier les résultats obtenus à l’issu du calibrage, et de souligner la qualité de reproduction du smile de la surface de volatilité par le modèle DDLMMUP, nous présenterons pour les maturités 5, 10, 20 et 30 ans les graphiques de volatilité implicite en fonction du strike.

La matrice des écarts entre les volatilités marchés et modèle ainsi que ces graphiques sont représentés ci-après :

Maturity	-100 bps	-50 bps	-25 bps	0 bps	25 bps	50 bps	100 bps
1	0.13%	0.01%	0.03%	0.04%	0.04%	0.02%	0.06%
2	0.08%	0.00%	0.03%	0.04%	0.04%	0.02%	0.05%
3	0.14%	0.07%	0.02%	0.02%	0.05%	0.08%	0.12%
4	0.14%	0.08%	0.05%	0.00%	0.04%	0.07%	0.11%
5	0.13%	0.05%	0.02%	0.02%	0.03%	0.06%	0.16%
7	0.15%	0.11%	0.07%	0.02%	0.02%	0.06%	0.11%
10	0.16%	0.06%	0.02%	0.01%	0.03%	0.08%	0.21%
15	0.06%	0.09%	0.06%	0.00%	0.05%	0.10%	0.20%
20	0.03%	0.11%	0.10%	0.04%	0.02%	0.09%	0.24%
25	0.01%	0.11%	0.13%	0.07%	0.00%	0.09%	0.27%
30	0.07%	0.08%	0.13%	0.08%	0.01%	0.12%	0.33%

FIGURE 7.2 – Ecarts absolus Marché-Modèle pour les swaptions ITM/OTM

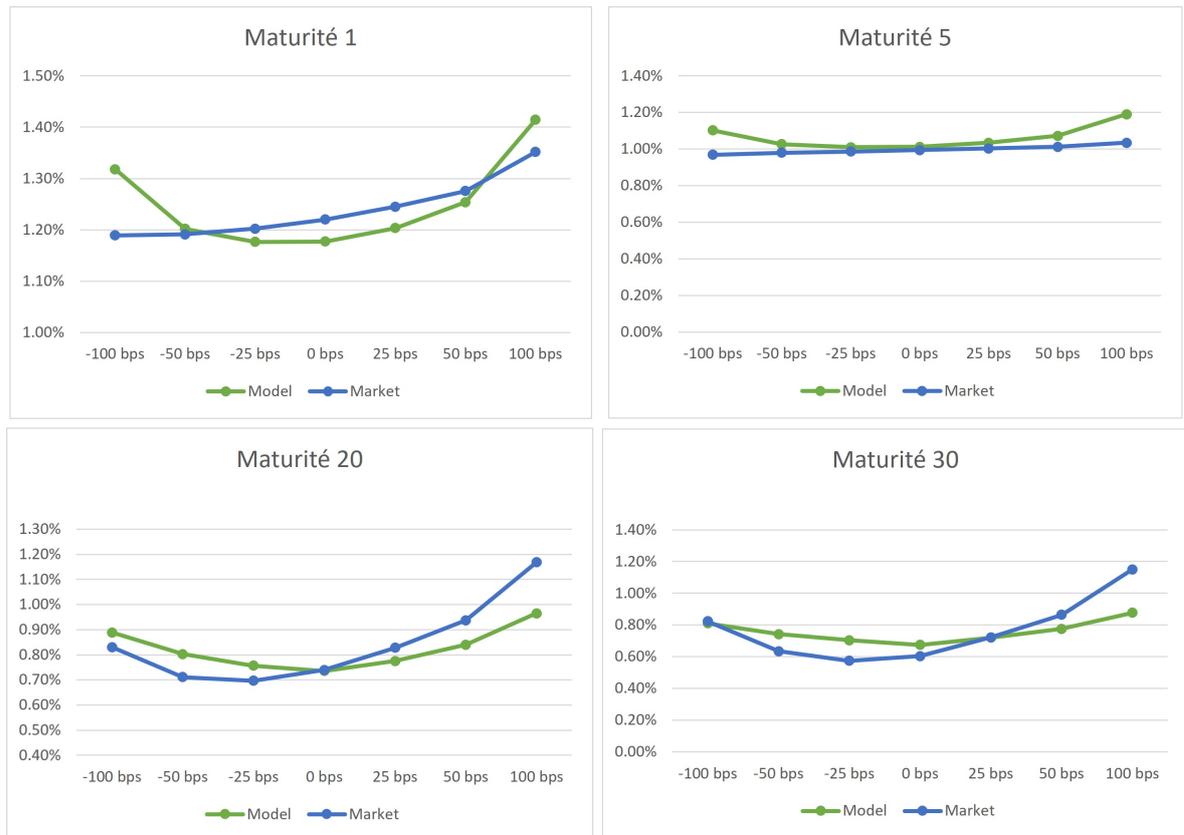


FIGURE 7.3 – Comparaison entre les volatilités ITM/OTM du marché et du modèle DDLMMUP en fonction du *strike* pour plusieurs maturités

Nous procédons dans un premier temps à une analyse des paramètres calibrés. Relativement aux paramètres calibrés pour les swaptions ATM nous remarquons qu'il y a eu une saturation supplémentaire au niveau du paramètre b de la fonction de Rebonato correspondant à la réalisation $I = 1$. La saturation des paramètres est justifiée par la complexité du calibrage mais également par le nombre important des paramètres.

Concernant la réplcation du smile de volatilité, nous pouvons affirmer que les résultats sont assez bon pour la plupart des maturités. En effet, nous observons que le modèle permet de reproduire une certaine courbure au niveau de la surface de volatilité des swaptions ATM/OTM. Contrairement au modèle DDLMM avec shift paramétrique pour lequel la surface de volatilité obtenue était relativement "*plate*" ne présentant pas ainsi une courbure assez prononcée.

Ainsi, le modèle DDLMMUP est assez performant sur les swaptions ATM/OTM. Pourtant, le problème de saturation des paramètres soulève des questions quant aux consé-

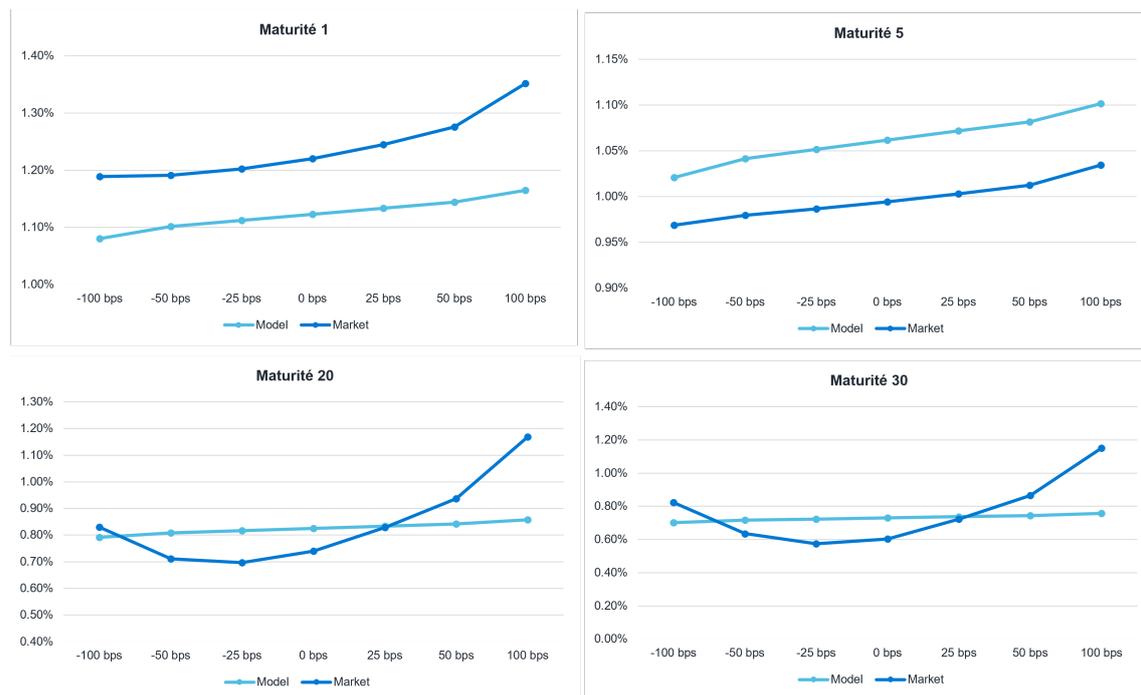


FIGURE 7.4 – Résultats de réplcation du smile de volatilité pour le modèle DDLMM

quences que cela peut engendrer dans la phase de diffusion du modèle.

Avant de passer à cette étape, il pourrait être intéressant de comparer ces résultats de calibrage avec ceux des modèles DDLMM et DDSVLMM. Le premier s'agissant du modèle classique, d'où l'extension a été dérivée, et le deuxième étant le benchmark pour les modèles à volatilités stochastiques.

7.7 Comparaison avec le modèle DDLMM et DDSVLMM

En utilisant les mêmes données de calibrage et les mêmes pondérations nous avons calibré deux autres modèles de la famille *Libor Market*, il s'agit du modèle DDLMM (paramètres de calibrage présentés à l'annexe A.3) et DDSVLMM (formules de pricing et paramètres de calibrage présentés dans A.3). L'idée est de comparer les performances des deux modèles en termes de réplcation du *smile* de volatilité.

Les figures 7.4 et 7.5 représente respectivement la capacité de réplcation du *smile* par les modèles DDLMM et DDSVLMM.

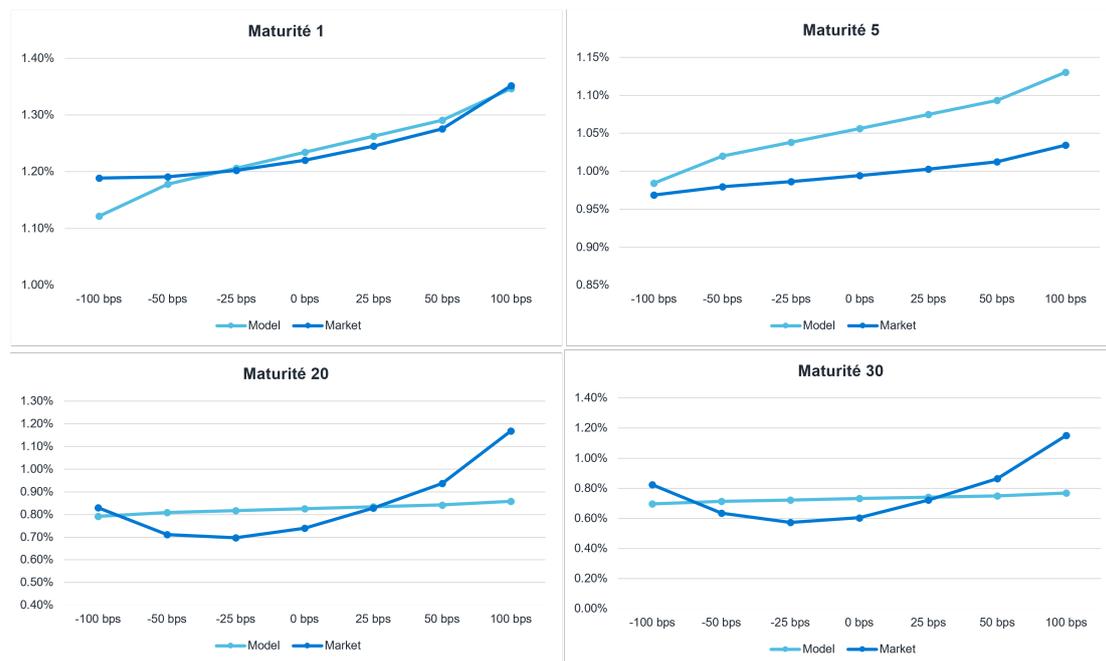


FIGURE 7.5 – Résultats de réplcation du smile de volatilité pour le modèle DDSVLMM

7.8 Validation du modèle

La procédure de calibrage du modèle DDLMMUP était assez complexe d'une part pour le grand nombre de paramètre à calibrer et d'autre part puisqu'il contient plusieurs paramètres embarqués dont la détermination peut être sujette de subjectivité. Notre méthodologie d'objectivation de ses paramètres nous a permis d'obtenir des résultats satisfaisants en terme de réplcation du smile de volatilité. Néanmoins, le problème de saturation de paramètre est resté un problème non résolu. Ce problème aura sans doute un impact sur la validation de notre modèle. Du fait que notre modèle est une mixture de modèle log-normaux, un mauvais calibrage des paramètres de la volatilité peut conduire celle-ci à exploser, générant ainsi des trajectoires explosives.

Notre objectif dans cette partie serait de proposer un traitement pour ce problème en utilisant les caractéristiques du modèle DDLMMUP, notamment la dépendance des paramètres de la variable discrète I . Mais avant cela il serait nécessaire de présenter les éléments de diffusion pour le modèle.

7.8.1 Diffusion du modèle

Tout comme le modèle DDLMM avec shift paramétrique, la diffusion des taux se fait sous la mesure LIBOR Spot. Nous rappelons que la dynamique des taux forward sous cette mesure est présentée dans la partie 4.3.1. En appliquant le lemme d'Itô il vient que :

$$d \ln \tilde{F}_k(t) = \sigma_k^I(t) \sum_{j=\beta(t)}^k \frac{\Delta T_j \rho_{j,k} \sigma_j^I(t) \tilde{F}_j(t)}{1 + \Delta T_j (\tilde{F}_j(t) - \delta)} dt - \sum_{q=1}^{N_f} \frac{\xi_k^{I,q}(t)^2}{2} dt + \sum_{q=1}^{N_f} \xi_k^{I,q}(t) dZ^q(t) \quad (7.17)$$

Avec :

- $N_f \in \mathbb{N}$, le nombre de facteurs dans la structure de volatilité,
- Avec $\sigma_k^I(t) = \sqrt{\sum_{q=1}^{N_f} (\xi_k^{I,q}(t))^2}$, la volatilité associée au taux forward de date de maturité T_k .

Le schéma de discrétisation

Pour la diffusion de notre modèle de taux. Nous commençons par la réalisation d'un nombre de simulations de la variable aléatoire I . Ensuite conditionnellement à chaque réalisation de I , en utilisant l'hypothèse d'indépendance entre I et le mouvement brownien $(Z^q)_{q \in \llbracket 1, N_f \rrbracket}$ nous diffusons les taux en utilisant la méthode de discrétisation d'Euler. Le schéma de discrétisation correspond à la subdivision $(T_j)_{j \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ où M est l'indice de maturité maximale. La subdivision choisie doit être compatible avec les dates de maturités, et les pas de temps $(T_{k+1} - T_k)_{k \in \llbracket 1, M-1 \rrbracket}$ des swaptions disponibles. En effet pour simplifier les calculs nous avons supposé que les structures de volatilité et decorrélation sont constantes par morceaux sur les dates inter-maturités : c'est à dire les intervalles $[T_{k+1} - T_k]$ pour $k \in \llbracket 1, M \rrbracket$.

Maintenant, soit $k \in \llbracket 1, M \rrbracket$, le taux forward F_k varie dans l'intervalle $[0, T_k]$ donc la diffusion couvre les éléments du schéma de discrétisation T_i tel que $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$. Pour une réalisation l de I nous avons :

$$\tilde{F}_k(T_{i+1}) = \tilde{F}_k(T_i) \exp \left\{ \sigma_k^l(T_i) \Delta T_i \left(\sum_{j=\beta(T_i)}^k \frac{\Delta T_j \rho_{j,k} \sigma_j^l(T_i) \tilde{F}_j(T_{i-1})}{1 + \Delta T_j (\tilde{F}_j(T_i) - \delta(j))} - \sum_{q=1}^{N_f} \frac{\xi_k^{l,q}(T_i)^2}{2} \right) + \sqrt{\Delta T_i} \sum_{q=1}^{N_f} \xi_k^{l,q}(T_i) \epsilon_i^q \right\}$$

À chaque étape de la simulation nous avons besoin des quantités suivantes :

- L'échantillon $(\epsilon_i^q)_{q \in \llbracket 1, N_f \rrbracket}$: Où pour tout $q \in \llbracket 1, N_f \rrbracket$, $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ la variable $\epsilon_i^q = \frac{1}{\sqrt{\Delta T_i}} (Z^q(T_{i+1}) - Z^q(T_i))$, suit une loi normale standard. De plus les variables $(\epsilon_i^q)_{i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, q \in \llbracket 1, N_f \rrbracket}$ sont indépendantes.
- Les taux forward $(F_j(T_i))_{j \in \llbracket i+1, k \rrbracket}$.

Le calcul des prix ZC et des déflateurs se fait de la même façon que pour le modèle précédent.

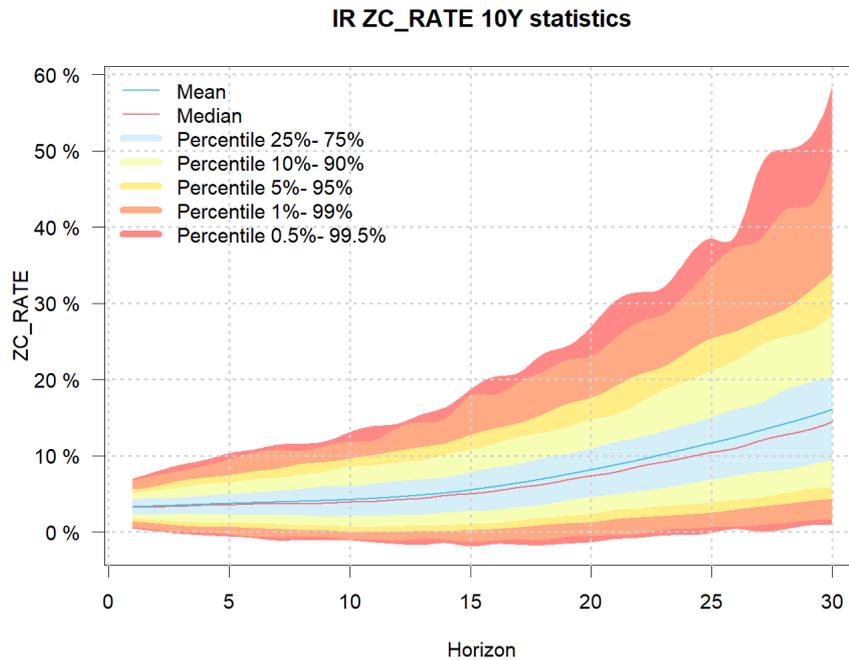


FIGURE 7.6 – Statistiques descriptives des trajectoires générées par le modèle DDLM-MUP

Mise en évidence du phénomène d'explosivité des trajectoires de taux

Dans un premier temps nous avons diffusé les taux forward en utilisant les paramètres présentés dans le tableau 7.5. En vue d'analyser les trajectoires générées nous avons réalisé des statistiques descriptives sur les taux nominaux pour les différentes maturités pour différents horizon de projection. La figure 7.6 présente ces statistiques pour le taux nominal 10 ans.

Les quantiles supérieurs à 99% décrivent les trajectoires extrêmes, et l'épaisseur des bandes rouges décrit la proportion de ces trajectoires par ceux générées. Nous remarquons toutefois que le niveau des trajectoires extrêmes devient assez élevé à partir de l'horizon de projection 25 ans ainsi que la proportion des trajectoires extrêmes. Cela est peut être dû à l'explosion des trajectoires aux réalisations de la variable I pour lesquels on a une mauvaise paramétrisation de la volatilité (saturation des paramètres de celle-ci).

Les tests de validation réalisés sur les trajectoires telles que présentées dans la figure 7.6, ne permettent de valider le modèle DDLM-MUP.

Scénario	a	b	c	d	κ	θ	δ
I = 1	7.6%	2.57%	6.9%	8.1%	20.3%	13.5%	10%
I = 2	13.6%	13.1%	8.51%	1.1%	20.3%	13.5%	10%
I = 3	8.52%	10.6%	7.2%	6.2%	20.3%	13.5%	10%

TABLE 7.6 – Paramètres issus du calibrage sur les Swaptions ITM/OTM après contrôle des paramètres

Contrôles proposés pour résoudre le problème

Le phénomène d'explosivité des trajectoires est un problème assez courant pour les modèles du type log-normale, cet effet peut être tolérable pour les modèles d'action par exemple car cela reste cohérent avec la nature assez volatile de leurs trajectoires. Néanmoins, pour les modèles de taux, les trajectoires explosives peuvent être assez problématique. Il existe plusieurs approche pour limiter cette effet ; par exemple nous avons pu voir l'impact d'un shift paramétrique sur le niveau des trajectoires extrêmes. Opérationnellement, ou pourra penser à *capper* les trajectoires générées pour les maintenir à des niveaux raisonnables, pourtant cette approche n'est pas bien fondée et peut engendrer des problèmes pour la validation des trajectoires.

La saturation des paramètres est principalement dû au grand nombre des paramètres du modèle. Au départ nous avons supposé que tous les paramètres dépendent de la variable I . Nous supposons désormais que seuls les paramètres de la fonction de Rebonato en dépendent et nous calibrons notre modèles sous les mêmes conditions spécifiées précédemment.

Comme nous pouvons le constater sur le tableau 7.6, suite à la réduction du nombre des paramètres dépendant de la variable aléatoire I nous n'avons plus de saturations au niveau des paramètres, cela confirme ce que nous avons supposé dans les parties précédentes. Pour compléter notre étude, il convient de diffuser les trajectoires des taux forwards à l'aide des paramètres calibrés, et ensuite procéder aux tests de validation notamment les tests de martingalité et le test de repricing **Monte-Carlo**.

7.8.2 Tests de validation

En se basant sur les paramètres calibrés présentés dans le tableau 7.6 nous avons diffusé 1000 trajectoires de taux forwards. Dans ce qui suit nous utiliserons ces trajectoires pour réaliser les tests de martingalité et de *repricing* Monte-Carlo. Nous rappelons que ces tests prennent exactement la même forme que les tests réalisés dans le cadre du modèle DDLMM avec shift paramétrique (revenir à la partie 6.8).

7.8.2.1 Test de martingalité

Nous présentons directement les résultats correspondants aux tests de validation réalisés :

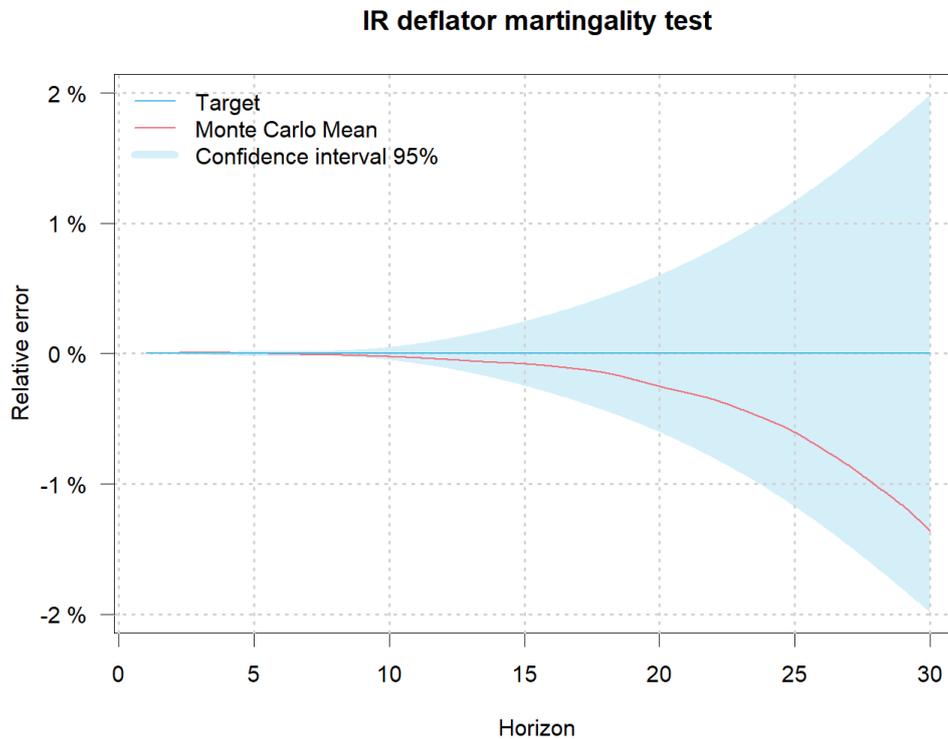


FIGURE 7.7 – Intervalles de confiance pour le déflateur pour le modèle DDLMMUP

Martingalité des déflateurs

Les figures 7.7 et 7.8 représentent respectivement les intervalles de confiance et les p-values du test de martingalité du déflateur. Nous remarquons que pour les horizons 2,3 et 30 ans les p-values affichées sont très faible, d'ailleurs seule l'horizon 2 qui ne valide pas le test de martingalité. Une analyse rapide des intervalles de confiance nous indique que les écarts relatifs entre les déflateurs et les prix zéro-coupon peuvent être 1% en valeur absolue, une valeur assez élevée par rapport aux résultats obtenus avec le DDLMM avec shift paramétrique. Cela nous amène à dire quela stabilité du test de martingalité du déflateur tend à se détériorer pour les grands horizons de projection.

Martingalité des prix Zéro-Coupon

De même les figures 7.9 et 7.10 présentent respectivement les résultats du test de martingalité des prix zéro-coupon en termes d'intervalles de confiance et de p-values. Bien que la majorité des maturités et des horizons de projection valident le test en ayant une p-valeur supérieur à 5%, le même constat peut être fait sur la stabilité du test. En effet le test de validation des prix zéro-coupon ne semble pas être stable comme nous l'indique

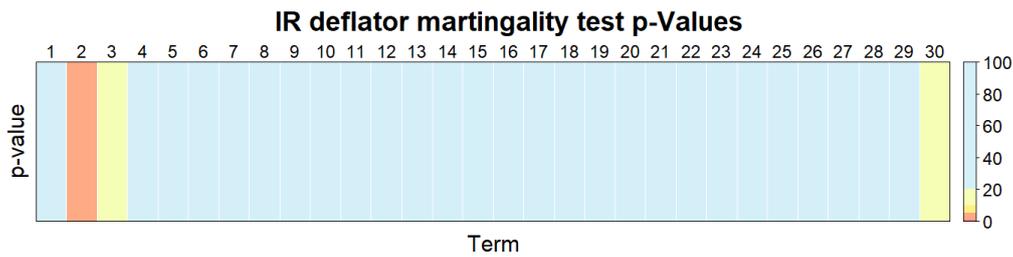


FIGURE 7.8 – P-values pour le test de martingalité du déflateur pour le modèle DDLM-MUP

les intervalles de confiance assez large pour les grands horizons de projection.

7.8.2.2 Test de repricing Monte-Carlo

Pour finir, nous présentons ci-dessous la matrice des écarts entre les prix calculés par la méthode de Monte-Carlo et ceux observés sur le marché des swaptions. Bien qu'il existe des zones sur la surface de volatilité rejoignant ainsi le problème de stabilité des tests précédents, on peut dire avec assez de recul que la majorité des erreurs absolues sont plutôt acceptables.

Maturity / Strike	-100 bps	-50 bps	-25 bps	0 bps	25 bps	50 bps	100 bps
1	0.04%	0.08%	0.08%	0.07%	0.06%	0.04%	0.03%
2	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.01%	0.05%
3	0.06%	0.06%	0.04%	0.00%	0.05%	0.10%	0.22%
4	0.06%	0.08%	0.07%	0.03%	0.02%	0.08%	0.21%
5	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.04%
7	0.04%	0.10%	0.09%	0.06%	0.00%	0.07%	0.23%
10	0.04%	0.05%	0.05%	0.06%	0.06%	0.07%	0.08%
15	0.11%	0.02%	0.04%	0.01%	0.07%	0.17%	0.38%
20	0.16%	0.00%	0.04%	0.01%	0.09%	0.21%	0.45%
25	0.16%	0.02%	0.08%	0.05%	0.06%	0.20%	0.47%
30	0.21%	0.00%	0.08%	0.06%	0.07%	0.22%	0.50%

FIGURE 7.11 – Écarts absolus entre les prix Monte-Carlo et marché

7.8.2.2.1 Conclusion pour la partie validation : Pour conclure l'étape de validation, nous avons proposé un traitement pour la saturation des paramètres et des trajectoires explosives en utilisant la caractéristique de dépendance de notre modèle. Bien évidemment, les résultats des tests de validation se sont améliorés, notamment pour les tests de martingalité et le test de *repricing*. Néanmoins, la stabilité des tests de validation pour le modèle DDLMUP reste encore une question ouverte pour ce modèle.

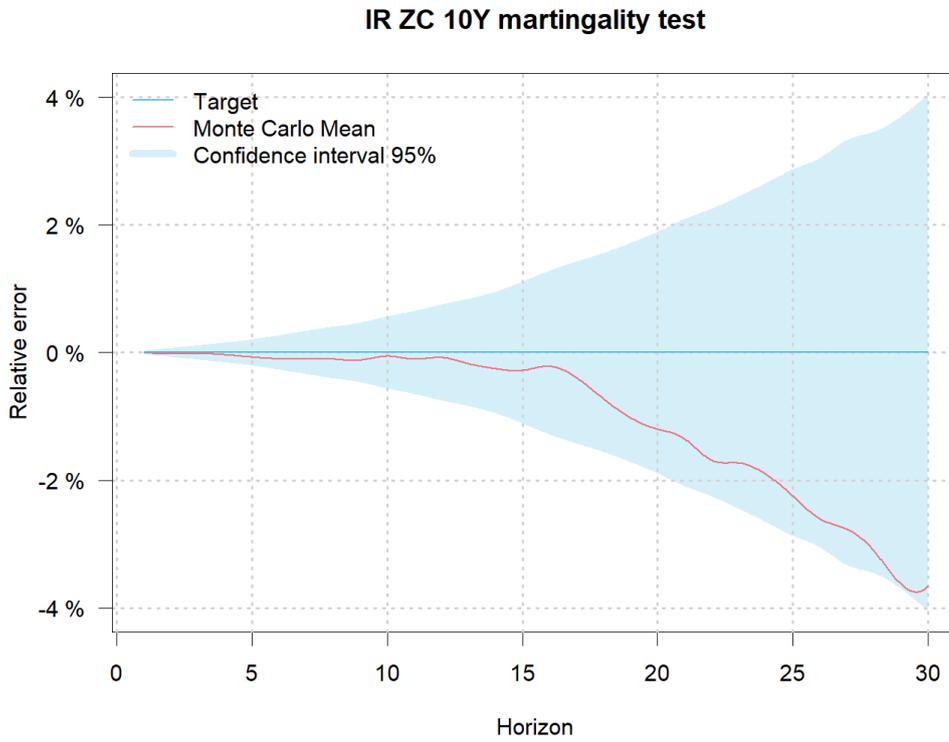


FIGURE 7.9 – Intervalles de confiance pour les Prix ZC

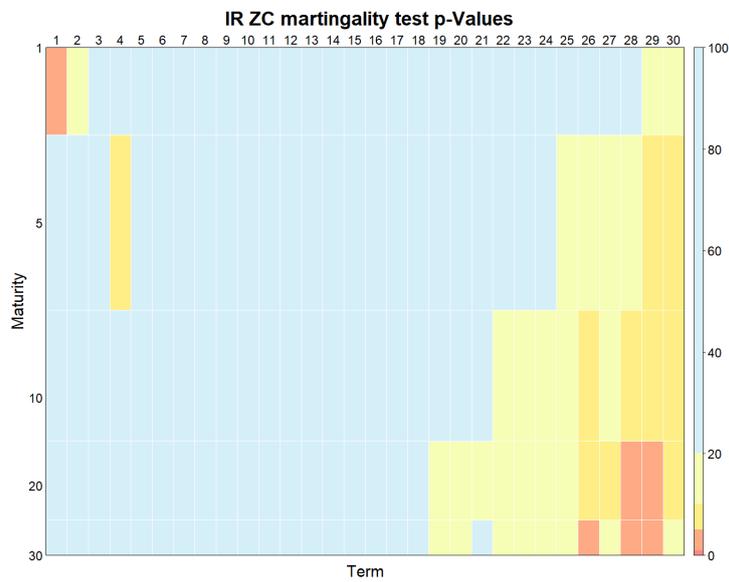


FIGURE 7.10 – P-values pour le test de martingalité des prix ZC

7.9 Conclusion pour le modèle DDLMMUP

L'étude du modèle DDLMMUP arrive à sa fin. Après avoir présenté les aspects théoriques du modèle DDLMMUP, notamment en ce qui concerne la dérivation de la formule théorique de pricing des swaptions et le schéma de diffusion des taux forward, nous nous sommes intéressés à son calibrage.

Il va sans dire que la procédure de calibrage du modèle a été quelque peu chaotique et complexe, soulevant ainsi plusieurs difficultés que nous avons essayé de surmonter tout au long de l'étude. La complexité du modèle provient principalement du fait qu'il s'agit d'un modèle hyper-paramétré, avec un grand nombre de paramètres embarqués, ce qui a pris une grande partie de notre étude en raison de la méthodologie proposée pour leur objectivation.

Cette complexité a été contrebalancée par les performances assez satisfaisantes du modèle sur la surface de volatilité AFM. En effet, le modèle a montré des écarts relativement acceptables ainsi qu'une reproduction correcte de la courbure du smile de volatilité, tout en obtenant de meilleurs résultats en termes de RMSE que les modèles utilisés comme benchmark.

Néanmoins, le modèle présente certaines limitations, notamment en relation avec le problème de saturation des paramètres et d'explosivité des taux générés, ce qui conduit à détériorer les résultats des tests de validation de martingalité et de market-consistency. Une alternative a été proposée, consistant en la réduction du nombre de paramètres dépendant de la variable aléatoire I . Cette alternative a partiellement résolu le problème en améliorant la réussite des tests, mais a également soulevé des questions sur la stabilité des tests de validation pour le modèle DDLMMUP, qui restent d'ailleurs ouvertes.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié deux extensions du modèle classique LIBOR Market. Nous avons posé les bases théoriques de cette famille de modèles, en nous concentrant particulièrement sur ces deux extensions spécifiques. Cette étude a permis de mettre en évidence la complexité du calibrage des modèles de taux dans un cadre de GSE risque-neutre. Nous avons pris le recul nécessaire pour objectiver cette procédure en détaillant plusieurs méthodologies. Par la suite, la diffusion des deux modèles a été associée à des tests de validation ainsi qu'à des analyses de sensibilité.

Le modèle DDLMM avec shift paramétrique, bien qu'il ne soit pas idéal pour la réplification de la surface de volatilité des swaptions ITM/OTM, présente néanmoins des avantages pour d'autres applications liées aux modèles de taux de la famille LIBOR Market, notamment en ce qui concerne les scénarios extrêmes tels que les taux bas ou explosifs.

De son côté, le modèle avec paramètres incertains est plus complexe en raison de sa structure de volatilité incertaine. Ce défi de calibrage plus important est toutefois compensé par des performances attendues supérieures pour les swaptions ITM/OTM, particulièrement en matière de réplification du *smile* de volatilité.

Lors de notre étude, nous avons comparé ces deux modèles afin d'en dégager les capacités et les limites respectives.

Le modèle DDLMM avec shift paramétrique a montré des performances très satisfaisantes sur les swaptions ATM. Sa stabilité a été validée à travers deux méthodes d'optimisation distinctes et sa robustesse testée sur des données provenant de différentes années. Le modèle démontre ainsi une flexibilité suffisante pour être utilisé dans diverses conjonctures économiques. L'introduction du shift paramétré en fonction de la date de maturité s'est révélée particulièrement utile pour la stabilité des tests de validation, notamment pour les tests de martingalité et de *market-consistency*. De plus, les analyses de sensibilité ont mis en évidence une capacité notable à contrôler les scénarios extrêmes, en particulier en ce qui concerne les phénomènes d'explosivité des taux et leur négativité. Toutefois, une limitation majeure reste son incapacité à reproduire certaines courbures observées dans les données de marché.

En ce qui concerne le modèle avec paramètres incertains, la procédure de calibrage s'est révélée plus complexe, notamment en raison du grand nombre de paramètres et la présence de plusieurs paramètres embarqués. L'objectivation des ses paramètres embarqués

a constitué un aspect central de notre étude. Cette analyse a permis de déterminer les caractéristiques de la variable aléatoire discrète sous-jacente, en précisant le nombre de réalisations et leurs pondérations respectives. Bien que cette complexité soit récompensée par des performances satisfaisantes, notamment dans la réplique de la surface de volatilité des swaptions ITM/OTM, des défis subsistent, notamment en ce qui concerne la stabilité des paramètres. La saturation de certains d'entre eux peut entraîner des comportements problématiques, comme l'explosivité des taux, rendant leur gestion délicate. Une approche pour réduire le nombre de paramètres a été discutée, mais malgré l'amélioration des résultats des tests de validation, la stabilité reste un problème non résolu.

Ce mémoire a permis d'établir une base solide pour la compréhension de la modélisation du risque de taux dans un cadre de GSE risque-neutre. Plusieurs méthodologies pour le calibrage des modèles étudiés pourraient être appliquées à d'autres modèles de taux d'intérêt. Cependant, les résultats obtenus ouvrent également la voie à des réflexions sur des axes de développement et des pistes d'amélioration pour de futures recherches.

Concernant le modèle DDLMM avec shift paramétrique, les sensibilités aux paramètres de la fonction de shift et l'anticipation des impacts en ALM pourraient être approfondies par le calcul des indicateurs de solvabilité ALM. Une étude plus complète sur les sensibilités réalisées dans ce mémoire pourrait constituer un axe d'investigation intéressant.

Quant au modèle avec paramètres incertains, il reste des pistes d'amélioration, notamment en matière de stabilité des tests de validation et des méthodes de détermination des pondérations de calibrage, en explorant des approches théoriquement plus fondées. Enfin, l'étude des sensibilités sur les paramètres intégrés, tels que les valeurs de probabilités, pourrait également être enrichissante pour évaluer leur impact sur les indicateurs de solvabilité de l'assureur.

Bibliographie

- [AA97] Leif ANDERSEN et Jesper ANDREASEN. “Volatility Skews and Extensions of the Libor Market Model”. In : (1997).
- [Arm22] Kamal ARMEL. “Valorisation économique des engagements en assurance vie : analyse critique de l’approche standard et propositions d’améliorations”. In : (2022).
- [AP18] Kamal ARMEL et Frédéric PLANCHET. “Comment définir la qualité d’un générateur de scénarios économiques destiné à évaluer le Best-Estimate épargne en euros ?” In : (2018).
- [Ben17] Mohammed BENNOUNA. *Calibrage du Libor Market Model dans le cadre d’un Générateur de Scénarios Économiques risque-neutre*. 2017.
- [Ben] Mohammed BENNOUNA. “Modélisation et Agrégation des risques : Mise en application dans le cadre de Solvabilité II”.
- [BS73] Fischer BLACK et Myron SCHOLES. “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”. In : *The Journal of Political Economy* 81.3 (1973), p. 637-654. URL : <http://www.jstor.org/stable/1831029>.
- [BON16] Paul BONNEFOY-CUDRAZ. *Implémentation et calibrage d’un Générateur de Scénarios Economiques : impact sur la volatilité du Solvency Capital Requirement*. 2016.
- [BGM97] Alan BRACE, Dariusz GATAREK et Marek MUSIELA. “The Market Model of Interest Rate Dynamics”. In : *Mathematical Finance* 7.2 (avr. 1997), p. 127-155. ISSN : 0960-1627, 1467-9965. DOI : 10.1111/1467-9965.00028. URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/1467-9965.00028> (visité le 27/08/2024).
- [BM01] Damiano BRIGO et Fabio MERCURIO. *Interest Rate Models Theory and Practice*. Springer, 2001.
- [Cha] Djalil CHAFAI. “Introduction to stochastic calculus”. In : ().
- [15] *directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l’accès aux activités de l’assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II)*. 2015.
- [EG11] Nicole EL KAROUI et Emmanuel GOBET. *Les outils stochastiques des marchés financiers*. 2011.

- [EMM04] Eymen ERRAIS, Gianvittorio MAURI et Fabio MERCURIO. “Capturing the Skew in Interest Rate Derivatives : A Shifted Lognormal LIBOR Model with Uncertain Parameters”. In : (2004).
- [Hen18] Léo HENRY-BIABAUD. *Générateur de scénarios économiques, effets des choix de calibrage et de modèle de taux sur le ratio de solvabilité 2, définition des zones les plus sensibles du best estimate à l'aide du vega*. 2018.
- [Jam97] Farshid JAMSHIDIAN. “LIBOR and swap market models and measures”. In : *Finance and Stochastics* 1.4 (1^{er} sept. 1997), p. 293-330. ISSN : 0949-2984, 1432-1122. DOI : 10.1007/s007800050026. URL : <http://link.springer.com/10.1007/s007800050026> (visité le 26/08/2024).
- [Kem09] Malcolm H. D. KEMP. *Market consistency : model calibration in imperfect markets*. Wiley finance series. Hoboken, NJ : Wiley, 2009. 350 p. ISBN : 978-0-470-77088-7.
- [Man21] Kamel MANSOUR. *Etude des modèles de taux G2++ et LMM+ au sein d'un Générateur de Scénarios Economiques risque-neutre et de leurs impacts sur la solvabilité d'un assureur*. 2021.
- [Ved17] Julien VEDANI. “Conceptualisation et mise en oeuvre du processus Own Risk and Solvency Assessment pour l'assurance vie”. In : (2017).
- [WZ06] Lixin WU et Fan ZHANG. “LIBOR MARKET MODEL WITH STOCHASTIC VOLATILITY”. In : (2006).

Table des figures

1	Réplication du skew de volatilité pour les swaptions ATM	6
2	Allures des fonctions du shift pour la deuxième forme paramétrique	6
3	Statistiques descriptives des trajectoires pour la troisième sensibilité	7
4	Réplication du smile de volatilité des swaptions AFM par le modèle DDLMMUP	8
5	Volatility skew replication for ATM swaptions	12
6	The shift function's profiles for the second parametric form	13
7	Descriptive statistics	14
8	Volatility smile replication on AFM swaptions for the DDLMMUP model	15
1.1	Les trois piliers de solvabilité II	25
1.2	Structure du bilan économique Solvabilité II	26
1.3	Modules et sous modules de risque définis par la formule standard (source : [Ben])	31
1.4	Calcul du SCR par risques élémentaires (source : [Ben])	31
1.5	Illustration de l'approche simulation dans les simulations (source : [Ben])	33
4.1	Forme de la fonction de Rebonato (source : [Arm22])	64
6.1	Ecart absolu entre les volatilités de marché et les volatilités du modèle après calibrage pour les swaptions ATM	79
6.2	Réplication du skew de volatilité ATM par le modèle pour les maturités 1 et 20 ans	80
6.3	Comparaison des volatilités de marchés en fonction des ténors suivant les années d'exercice	81
6.4	Comparaison des volatilités de marchés en fonction des maturités suivant les années d'exercice	82
6.5	Comparaison des <i>smile</i> de volatilité en fonction des années d'exercice	83
6.6	Ecart Market-Model sur les swaptions AFM pour le modèle DDLMM avec shift paramétrique	84
6.7	Réplication du smile de volatilité par le modèle DDLMM avec shift paramétrique	84
6.8	Comparaisons du niveau des taux sans risque suivant les années d'exercices	85

6.9	Ecart absolu entre les volatilités de marché et les volatilités du modèle après calibrage pour les swaptions ATM	86
6.10	Réplication du skew de volatilité ATM par le modèle pour les maturités 1 et 20 ans	87
6.11	Distribution de l'erreur absolue pour les deux formes paramétriques	89
6.12	Aperçu de quelques allures de première fonction du shift	90
6.13	Aperçu de quelques allures de la deuxième fonction du shift	91
6.14	Distribution des paramètres de la première forme	92
6.15	Distribution des paramètres de la deuxième forme	93
6.16	Distribution des valeurs d'erreurs pour les deux formes paramétriques	93
6.17	Intervalle pour les déflateurs	97
6.18	P-values pour les déflateurs	97
6.19	Intervalle de confiance pour les prix Zéro-Coupon	98
6.20	P-values pour les prix Zéro-Coupon	99
6.21	Écart absolu entre les prix modèle et Monte-Carlo	100
6.22	Sensibilité 1 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 10 ans	101
6.23	Sensibilité 2 : Statistique descriptives des trajectoires générées pour le taux 10 ans	103
6.24	Sensibilité 3 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 10 ans	104
7.1	Ecart absolu entre les volatilités de marché et les volatilités du modèle DDLMMUP après calibrage	121
7.2	Ecart absolu Marché-Modèle pour les swaptions ITM/OTM	123
7.3	Comparaison entre les volatilités ITM/OTM du marché et du modèle DDLMMUP en fonction du <i>strike</i> pour plusieurs maturités	124
7.4	Résultats de réplication du smile de volatilité pour le modèle DDLMM	125
7.5	Résultats de réplication du smile de volatilité pour le modèle DDSVLMM	126
7.6	Statistiques descriptives des trajectoires générées par le modèle DDLMMUP	128
7.7	Intervalle de confiance pour le déflateur pour le modèle DDLMMUP	130
7.8	P-values pour le test de martingalité du déflateur pour le modèle DDLMMUP	131
7.11	Écart absolu entre les prix Monte-Carlo et marché	131
7.9	Intervalle de confiance pour les Prix ZC	132
7.10	P-values pour le test de martingalité des prix ZC	132
C.1	Facteurs de corrélation inter-forward via la méthode d'ACP	149

Liste des tableaux

6.1	Paramètres calibrés pour la première forme	78
6.2	Paramètres calibrés pour la deuxième forme	78
6.3	Paramètres calibrés suivant les années d'exercice pour les deux formes paramétrique	86
6.4	Meilleures itérations de la multi-start pour la première et la deuxième forme paramétrique	89
6.5	Paramètres de la version contrôlée du DDLMM avec shift paramétrique	94
6.6	Sensibilité 1 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 1 an	102
6.7	Sensibilité 1 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 10 ans	102
6.8	Sensibilité 2 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 10 ans	103
6.9	Sensibilité 3 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 1 an	104
6.10	Sensibilité 3 : Statistiques descriptives des trajectoires générées pour le taux 10 ans	105
7.1	Sensibilités sur les paramètres pour trois probabilités	117
7.2	Résultats de calibrage sur les swaptions AFM	119
7.3	Résultats de calibrage pour les trois sensibilités	119
7.4	Paramètres issus du calibrage sur les Swaptions ATM en utilisant l'algorithme Nelder-Mead	120
7.5	Paramètres issus du calibrage sur les Swaptions ITM/OTM en utilisant l'algorithme Nelder-Mead	123
7.6	Paramètres issus du calibrage sur les Swaptions ITM/OTM après contrôle des paramètres	129
A.1	Paramètres calibrés pour le DDLMM	145
A.2	Paramètres calibrés pour le DDLMM	145

Liste des abréviations

EIOPA : European Insurance and Occupational Pensions Authority

ALM : Asset and Liabilities Management (Gestion actif-passif)

BE : Best Estimate

SCR : Solvency Capital Requirement

MCR : Minimum Capital Requirement

GSE : Générateur de Scénarios Économiques

LIBOR : London InterBank Offered Rate

LMM : Libor Market Model

DDLMM : *Displaced Diffusion* Libor Market Model

DDSVLMM : *Displaced Diffusion* Libor Market Model with Stochastic Volatility

DDLMMUP : *Displaced Diffusion* Libor Market Model with Uncertain Parameters

ATM : At The Money

AFM : Away From the Money

ITM/OTM : In The Money / Out The Money

ZC : Zéro-Coupon

TMG : Taux Minimum Garanti

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Formules de pricing du DDSVLMM

Nous présentons dans succinctement les éléments de pricing de swaptions dans le cadre du modèle DDSVLMM. Les démonstrations ne seront pas détaillées ici, néanmoins le lecteur intéressé par les développements théoriques du modèle *Displaced Diffusion LIBOR Market Model with Stochastic Volatility* peut se référer à l'article [WZ06].

A.1 Dynamique du taux swap

Nous donnons directement la dynamique du taux swap¹ dans le modèle DDSVLMM sous la probabilité LIBOR Spot.

$$d(S_{n,N}(t) + \delta) = dS_{n,N}(t) = \sqrt{V_t} \sum_{j=n}^{N-1} \frac{\partial S_{n,N}(t)}{\partial F_j(t)} (F_j(t) + \delta) \gamma_j(t) \cdot d\mathbf{W}_t^S, \quad (\text{A.1})$$

Avec $(V_t)_{t \leq T}$ un processus stochastique suivant une dynamique du type Cox-Ingersoll-Ross (CIR) sous la mesure de probabilité \mathbb{P}^S associé au changement de numéraire $A(t) = \sum_{j=n}^{N-1} \Delta T_j P(t, T_{j+1})$:

$$dV_t = \kappa(\theta - \xi_0(t)V_t) dt + \epsilon \sqrt{V_t} dZ_t^S, \quad (\text{A.2})$$

Avec :

- \mathbf{W}^S un mouvement brownien bi-dimensionnel sous la mesure de probabilité \mathbb{P}^S .
- $\gamma_i(\cdot)$ fonction déterministe bi-dimensionnel.
- Z^S est un mouvement brownien sous la mesure de probabilité \mathbb{P}^S .

Nous supposons également que les deux mouvements browniens \mathbf{W}^S et Z^S sont corrélés, et leurs structure de corrélation est définie telle que :

$$\langle dW^{S,(1)}, dZ^S \rangle_t = \langle dW^{S,(2)}, dZ^S \rangle_t = \frac{\rho}{\sqrt{2}} dt. \quad (\text{A.3})$$

1. La dynamique dans A.1 s'obtient facilement en utilisant la formule d'Itô

Remarque 27. La condition de Feller $2\kappa\theta \geq \epsilon^2$ assure que le processus $(V_t)_{t \leq T}$ reste positive et ne s'annule jamais tant que $V_0 > 0$

L'obtention d'une dynamique du type Heston [EG11] requiert de faire des approximation de *drift freezing*. Nous rappelons la formule de Hull & White, pour $n \leq j \leq N - 1$:

$$\frac{\partial S_{n,N}(t)}{\partial F_j(t)} = \omega_j(t) + \sum_{k=n}^{N-1} F_k(t) \frac{\partial \omega_k(t)}{\partial F_j} = \omega_j(t) + \frac{\Delta T_j}{1 + \Delta T_j F_j(t)} \left[\sum_{k=n}^{N-1} \omega_k(t) (F_k(t) - S_{n,N}(t)) \right].$$

L'hypothèse de *drift freezing* consiste à faire l'hypothèse d'une faible variation de certaines composantes stochastiques. Après avoir effectué l'approximation de *Hull-White* (voir [WZ06] pour les détails) nous obtenons la dynamique :

$$dS_{n,N}(t) = \sqrt{V_t} (S_{n,N}(t) + \delta) \sum_{j=n}^{N-1} \eta_j(0) \gamma_j(t) \cdot d\mathbf{W}_t^S, \quad (\text{A.4})$$

$$dV_t = \kappa (\theta - \xi^0(t) V_t) dt + \epsilon \sqrt{V_t} dZ_t, \quad (\text{A.5})$$

Avec :

$$\eta_j(0) = \frac{\partial S_{n,N}(0)}{\partial F_j(0)} \frac{F_j(0) + \delta}{S_{n,N}(0) + \delta}, \quad (\text{A.6})$$

$$\xi^0(t) = 1 + \frac{\epsilon}{\kappa} \sum_{j=n}^{N-1} \omega_j(0) \xi_j^0(t), \quad (\text{A.7})$$

$$\xi_j^0(t) = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sum_{k=\beta(t)}^j \Delta T_k \frac{F_k(0) + \delta}{1 + \Delta T_k F_k(0)} \left(\gamma_k^{(1)}(t) + \gamma_k^{(2)}(t) \right). \quad (\text{A.8})$$

Les approximations effectuées sont basées sur l'hypothèse de la faible variabilité des ratios : $\frac{\eta_j(t)}{\partial S_{n,N}(t)/\partial F_j(t)} \frac{F_j(t) + \delta}{S_{n,N}(t) + \delta}$ et $\frac{\Delta T_j (F_j(t) + \delta)}{1 + \Delta T_j F_j(t)}$.

A.2 Pricing des swaptions dans le modèle DDSVLM

On peut prouver (voir [WZ06]) que le spot d'une swaption avec un strike K , une maturité T_N et un tenor $T_N - T_n$ est donnée par :

$$PS(0, K, T_n, T_N) = A(0) \left\{ (S_{n,N}(0) + \delta) \mathbb{E} \left[e^{X(T_n)} \mathbf{1}_{\{X(T_n) > x^*\}} \right] - (K + \delta) \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{X(T_n) > x^*\}} \right] \right\}.$$

Avec :

$$X(t) := \ln \left(\frac{S^{n,N}(t) + \delta}{S^{n,N}(0) + \delta} \right) \quad \text{et} \quad x^* := \ln \left(\frac{K + \delta}{S^{n,N}(0) + \delta} \right) \quad (\text{A.9})$$

On note également la fonction génératrice de moments conditionnels de la variable aléatoire $X(T_n)$ par $\varphi_t(z) = \mathbb{E} [e^{zX(T_n)} | \mathcal{F}_t]$.

Alors les formules suivantes s'appliquent :

$$\mathbb{E} \left[e^{-X(T_m)} \mathbf{1}_{\{X(T_m) > x^*\}} \right] = \frac{\varphi_0(1)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} (e^{-iux^*} \varphi_0(1 + iu))}{u} du,$$

$$\mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{X(T_m) > x^*\}} \right] = \frac{\varphi_0(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} (e^{-iux^*} \varphi_0(iu))}{u} du.$$

Pour les démonstrations, nous proposons de se référer au papier de Zhang 2006 [WZ06].

Le calcul du prix de swaptions revient donc à calculer la fonction $\varphi_t(\cdot)$ qui vérifie d'ailleurs l'équation au dérivées partielles qu'on peut résoudre à l'aide des équations de Riccati [WZ06].

A.3 Paramètres calibrés pour le DDSVLMM et le DDLMM

Paramètres	a	b	c	d	κ	θ	δ
Valeur	8.55%	1.58%	8.64%	0.2%	110.78%	70.12%	10%

TABLE A.1 – Paramètres calibrés pour le DDLMM

Paramètres	a	b	c	d	κ	θ	ϵ	ρ	δ
Valeur	9.34%	1.45%	7.46%	0.1%	61.84%	38.63%	45.74%	72.30	10%

TABLE A.2 – Paramètres calibrés pour le DDLMM

Annexe B

Changement de Numéraire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Supposons qu'il existe un numéraire N et une probabilité Q_N équivalente à la probabilité historique \mathbb{P} , tels que, pour tout actif financier X , le prix de cet actif, lorsqu'il est normalisé par N , soit une martingale sous Q_N . Plus précisément, pour $0 \leq t \leq T$, on a :

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}_{Q_N} \left[\frac{X_T}{N_T} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Dans ces conditions, pour tout autre numéraire U , il existe une probabilité Q_U , également équivalente à \mathbb{P} , telle que le prix de tout actif financier Y , normalisé par U , soit une martingale sous Q_U . Autrement dit, pour $0 \leq t \leq T$, on a :

$$\frac{Y_t}{U_t} = \mathbb{E}_{Q_U} \left[\frac{Y_T}{U_T} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

De plus, la dérivée de Radon-Nikodym qui définit la mesure Q_U par rapport à Q_N s'exprime comme suit :

$$\frac{dQ_U}{dQ_N} = \frac{U_T N_0}{U_0 N_T}.$$

Pour un exposé détaillé sur les techniques de changement de numéraire le lecteur peut se référer à [BM01].

Annexe C

Corrélation inter-forward

Cette partie est largement inspirée de [Ben17], le lecteur peut y se référer pour plus de détails. On présentera la méthode d'estimation des corrélations inter-forwards en utilisant l'analyse en composantes principales.

Soient F_k et F_l respectivement le k -ième et le l -ième taux forward. La corrélation entre ces deux processus, notée $\rho_{k,l}$, est donnée par l'expression suivante :

$$\rho_{k,l} = \sum_{q=1}^{N_f} \beta_k^q \beta_l^q$$

où :

- β^q , pour $q \in \{1, \dots, N_f\}$, sont les facteurs de corrélation inter-forward, satisfaisant la condition suivante :

$$\sum_{q=1}^{N_f} (\beta_k^q)^2 = 1$$

- N_f représente le nombre de facteurs du modèle.

C.1 Méthode de Calibrage des Corrélations Inter-forward

Notre approche consiste à appliquer la méthode d'analyse en composantes principales sur un historique de taux forwards.

Définissons tout d'abord les données nécessaires et les notations utilisées dans la suite. Soit $H = \{t_1, \dots, t_N\}$ l'ensemble des dates historiques espacées d'un pas de temps Δ , avec $\Delta \leq 1$. Nous avons également besoin d'un historique de courbes de prix zéro-coupon, noté $P(t, t + j\Delta)$, obtenu à partir des taux swap de marché via la méthodologie exposée dans la partie I. À partir de ces courbes, on déduit les taux forward historiques $F(t, t + j\Delta, t + j\Delta + \Delta')$, également espacés d'un pas Δ' . En pratique, les pas de temps Δ et Δ' sont généralement fixés à $\frac{1}{2}$, correspondant à un pas semi-annuel.

Pour mener à bien l'ACP, il est nécessaire de définir une variable permettant d'approcher les corrélations inter-forward. Étant donné que les modèles étudiés sont des modèles log-normaux avec shift, cette variable est définie comme le log-rendement du taux forward shifté entre les instants t_i et t_{i+1} :

$$X_{i,j} = \ln \left(\frac{F(t_{i+1}, t_j, t_j + 1) + \delta}{F(t_i, t_j, t_j + 1) + \delta} \right)$$

L'objectif de l'ACP est alors de décomposer les variables $X_{i,j}$ en combinaisons linéaires de composantes principales notées C_q , pour $q = 1, 2, \dots, N_f$. Cela s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{X_{i,j} - \mu_j}{\sigma_j} \approx \sum_{q=1}^{N_f} w_q(j) \cdot C_q(t_{i+1})$$

où $w_q(j)$ sont les coefficients extraits de l'ACP, et :

$$\mu_j = \frac{1}{\#I} \sum_{i \geq 1} X_{i,j}, \quad \sigma_j = \sqrt{\frac{1}{\#I} \sum_{i \geq 1} (X_{i,j} - \mu_j)^2}$$

En notant λ_q la q -ième valeur propre (classée par ordre décroissant) de la matrice de variance-covariance associée à l'ACP, on a :

$$\text{Var}(C_q) = \lambda_q$$

On peut alors écrire :

$$\text{Var} \left(\sum_{q=1}^{N_f} w_q(j) \cdot C_q \right) = \sum_{q=1}^{N_f} w_q^2(j) \cdot \lambda_q$$

Après normalisation, il en résulte finalement :

$$\beta_j^q = \frac{w_q(j) \sqrt{\lambda_q}}{\sqrt{\sum_{q=1}^{N_f} w_q^2(j) \cdot \lambda_q}}$$

Ci-dessous, nous présentons les facteurs de corrélation obtenus en fonction de la maturité. La méthodologie décrite a été appliquée en utilisant un historique de 20 ans de courbes de taux swap, avec un pas historique trimestriel.

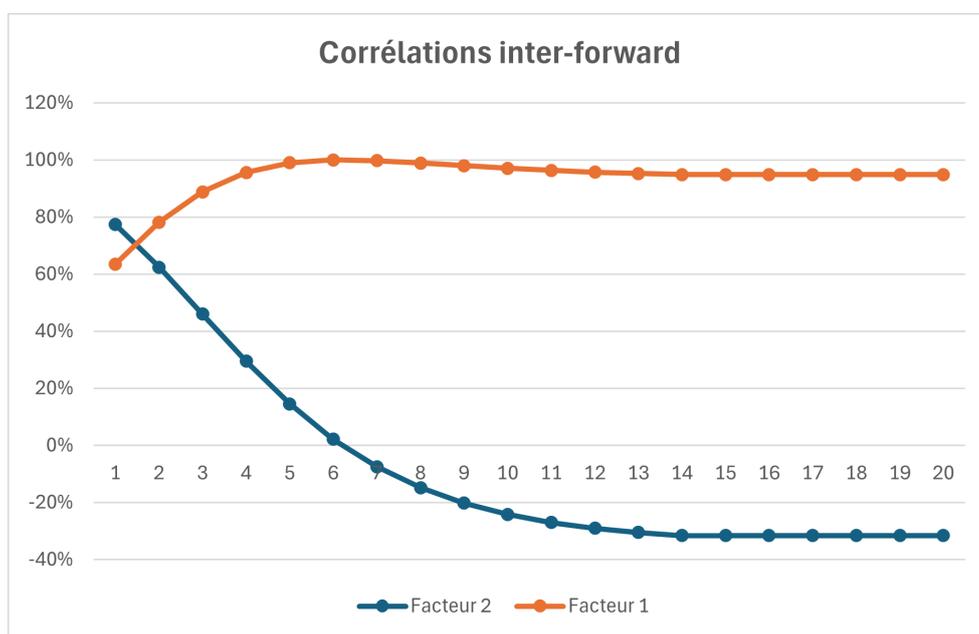


FIGURE C.1 – Facteurs de corrélation inter-forward via la méthode d’ACP