

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme universitaire
d'actuariat de Strasbourg (DUAS) et pour l'admission à
l'Institut des Actuares

Master Actuariat

Valorisation dans le référentiel IFRS des instruments de passif pour une société non cotée

Mémoire d'actuariat

PAR : **Daniel COTTER**

Encadrant Entreprise: PIERRE MONTESINOS

Encadrant Université: PIERRE O. GOFFARD

MEMBRES DU JURY:

Examineur : Jean BERARD, Université de Strasbourg

Examineur : Laurent ECKERT, Institut des Actuares

Examineur : David Crespine, Institut des Actuares

Date de soutenance : 8 décembre 2023

Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer mes remerciements les plus sincères à M. Pierre Montesinos de SPAC Actulaires pour la qualité de son encadrement tout au long de mon stage et de mon alternance. Sa patience, ses nombreux conseils et son suivi régulier m'ont permis de mener à bien ce mémoire dans les meilleures conditions. Je suis également reconnaissant envers le reste de l'équipe de SPAC Actulaires pour leur soutien continu pendant ma rédaction de ce mémoire.

Enfin, je remercie M. Pierre Goffard, mon tuteur de l'université, pour son organisation dans l'encadrement du mémoire.

Table des matières

| | |
|---|------------|
| Résumé | v |
| Abstract | vi |
| Synthèse | vii |
| Executive Summary | xiv |
| 1 Introduction | 1 |
| 2 Définition des éléments de passif | 3 |
| 2.1 Éléments généraux | 3 |
| 2.1.1 Dettes par émission d'obligations | 3 |
| 2.1.2 Capitaux propres | 11 |
| 2.1.3 Plans de paiements fondés sur les actions | 12 |
| 2.2 Éléments caractéristiques des sociétés non cotées | 16 |
| 2.2.1 Actions privilégiées | 16 |
| 2.2.2 Obligations convertibles | 17 |
| 2.3 Analyse en cascade — " <i>Waterfall Analysis</i> " | 20 |
| 2.3.1 Intervalles de répartition à proportions fixes | 20 |
| 2.3.2 Assimilation à un portefeuille d'options d'achat | 24 |
| 3 Référentiel IFRS des instruments d'une levée de fonds | 26 |
| 3.1 Notions de valorisation | 26 |
| 3.1.1 IFRS 13 — La juste valeur | 26 |
| 3.1.2 Coût amorti | 27 |
| 3.1.3 Coût résiduel | 27 |
| 3.2 Encadrement de valorisation pour les obligations convertibles | 28 |
| 3.2.1 Classification des composantes d'une obligation convertible | 28 |
| 3.2.2 Mesure des composantes d'une obligation convertible | 31 |
| 3.3 Encadrement de valorisation pour les paiements fondés sur les actions | 33 |
| 3.3.1 Généralités | 33 |
| 3.3.2 Dans le cadre de l'actionnariat salarié | 34 |
| 3.4 Problématique pour les sociétés non cotées | 35 |
| 4 Valorisation par modèle de structure de capital | 36 |
| 4.1 Choix de modèle | 36 |
| 4.1.1 Évolution des modèles existants | 36 |
| 4.2 Notions mathématiques préalables à la modélisation | 38 |
| 4.2.1 La transformation de Fourier | 38 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.2.2 | Les processus affines | 43 |
| 4.3 | Modélisation avec un processus mixte saut-diffusion | 46 |
| 4.3.1 | Formulation du modèle | 46 |
| 4.3.2 | Intégration de l'analyse en cascade | 53 |
| 4.3.3 | Explication de la méthode de résolution | 59 |
| 4.4 | Résolution numérique par itération | 63 |
| 4.4.1 | Étape 0 — La préparation des grilles de calcul | 63 |
| 4.4.2 | Étape 1 — Calcul de $\tilde{G}_{(k+1)}$ sur une grille uniforme | 65 |
| 4.4.3 | Étape 2 — Calcul de $G_{(k)}$ sur une grille uniforme | 68 |
| 4.4.4 | Étape 3 — Calcul de $Q_{(k+1)}$ sur une grille uniforme | 69 |
| 5 | Application numérique du modèle de valorisation | 70 |
| 5.1 | Calibration des paramètres de modélisation | 70 |
| 5.1.1 | Pour le taux sans risque | 70 |
| 5.1.2 | Pour le processus des actifs de la société | 72 |
| 5.2 | Présentation des données | 75 |
| 5.3 | Cohérence du modèle | 76 |
| 5.4 | Calibration des paramètres à une courbe de <i>spread</i> donnée | 76 |
| 5.4.1 | Lorsque le défaut avant maturité est négligé | 77 |
| 5.4.2 | Lorsque le défaut avant maturité est pris en compte | 79 |
| 5.4.3 | Comparaison des prix des titres | 81 |
| 5.5 | Sensibilité au <i>rating</i> de crédit | 83 |
| 6 | Conclusion | 86 |
| A | Calibration avec la possibilité de défaut avant la maturité | 89 |

Résumé

Dans le contexte financier d'aujourd'hui, la valorisation du passif d'une société non-cotée est devenue une préoccupation primordiale pour les investisseurs tout comme les créanciers et les parties prenantes. Les sociétés non cotées, généralement caractérisées par leur opacité et le peu d'informations financières de leurs activités, présentent une problématique exceptionnelle lorsqu'il s'agit de déterminer la juste valeur de leurs engagements. La détermination formelle de la juste valeur fait partie intégrante des normes conventionnelles d'information financière, plus particulièrement des Normes Internationales d'Information Financière (abrégées IFRS en anglais) qui définissent et soulignent explicitement l'importance de la juste valeur. Dans l'absence de cotations de marché, ces normes IFRS exigent la tâche complexe de valoriser simultanément l'ensemble des instruments adossés aux actions pour refléter leur juste valeur.

Ce mémoire entreprend donc une analyse approfondie de l'évaluation simultanée des instruments financiers du passif pour des sociétés non cotées. Il explore les fondements théoriques, les principes généraux conformément aux normes IFRS et l'application pratique de la valorisation des passifs dans le contexte des entreprises non cotées. Le contenu du mémoire est particulièrement motivé par l'analyse simultanée du risque de crédit et des structures complexes des capitaux propres, qui représente souvent une pierre d'achoppement pour la valorisation en l'absence de données de marché. L'adaptation des modèles structurels du risque de crédit avec des processus mixtes saut-diffusion pour répondre à cette problématique fait l'objet des travaux réalisés.

Mots-clés : *Juste valeur, Non coté, Analyse en cascade, Obligations convertibles, Actions privilégiées, IFRS 9, IAS 32, IFRS 2, Risque de crédit, Risque de défaut, Modèle structurel de défaut, Transformée de Fourier, Processus mixte saut-diffusion*

Abstract

In today's complex financial landscape, the valuation of a non-listed firm's liabilities has become a paramount concern for investors, creditors, and stakeholders alike. Non-listed firms, often characterized by their opacity and limited financial disclosure, present unique challenges in determining the fair value of their liabilities. The formal determination of fair value embodies an integral role in conventional financial reporting standards, most notably with regard to the International Financial Reporting Standards (IFRS) that explicitly define and emphasize the importance of fair value. In the absence of market prices, these IFRS require the sophisticated task of simultaneously valuing all equity-linked instruments to reflect their fair value.

This Master's thesis thus embarks on an in-depth analysis into the intricacies of simultaneously valuing private-firm liabilities. It explores the theoretical foundations, the overarching principles pursuant to IFRS, and the practical application of liability valuation within the context of non-listed firms. The contents of the thesis are particularly motivated by the simultaneous analysis of credit risk and complex equity structures, which often represents a stumbling block to valuation in the absence of market data. The revision of structural credit risk models with jump-diffusion processes to address this issue is the focus of the study undertaken.

Keywords : *Fair value, Non listed, Waterfall analysis, Convertible bonds, Preferred stock, IFRS 9, IAS 32, IFRS 2, Credit risk, Default risk, Structural credit risk model, Fourier transform, Jump-diffusion process*

Synthèse

Dans le contexte des sociétés non cotées, la détermination de la juste valeur des instruments du passif est une tâche complexe et multiforme. Contrairement à leurs homologues cotés en bourse, les sociétés non cotées opèrent dans un domaine où les prix du marché sont souvent absents ou peu fiables, où l'information peut être limitée ou rarement divulguée, et où les structures de capital observées sont diverses.

Toutefois, ce mémoire vise l'atténuation de ces points de difficulté par la proposition et mise en oeuvre d'un modèle de valorisation qui intègre la diversité des capitaux propres et qui est adapté aux données limitées du marché disponibles. Il comporte donc les fondements théoriques, les principes généraux conformément aux normes IFRS et l'application pratique de la valorisation des passifs dans le contexte des entreprises non cotées.

Les éléments de valorisation

Il convient d'abord de présenter les éléments de passif qui font l'objet de valorisation conjointement aux fondements théoriques existants de leur valorisation. Les éléments les plus communs, qui concernent également les sociétés cotées, seront abordés avant d'évoquer les éléments de passif caractéristiques du contexte non coté.

Éléments généraux

Dette par l'émission d'obligations

Un des principaux éléments du passif de n'importe quelle entreprise est représenté par la valeur totale de ses dettes. Dans une approche de valorisation, la dette considérée est généralement sous la forme d'une obligation. Les sociétés n'étant pas exemptées du défaut, leurs obligations intègrent une incertitude de remboursement qui définit le risque de crédit. La définition probabiliste de ce risque, et la valorisation conséquente, varient selon deux approches de modélisation : soit les modèles de structure de capital, soit les modèles à intensité.

D'une part, les modèles structurels de défaut supposent que le risque de crédit est un événement endogène qui survient lorsque la valeur totale des actifs d'une société ne permet pas de couvrir le remboursement de sa dette. Dans ces modèles, la probabilité de défaut est entièrement caractérisée par la valeur de la société et la valorisation des titres est assimilable à l'évaluation d'une option d'achat dont le sous-jacent est la valeur totale de la société.

D'autre part, les modèles à intensité de défaut supposent que le risque de crédit est un événement exogène qui survient au moment du premier saut d'un processus de Poisson ou d'un processus de Cox. Ce processus, et par conséquent le temps de défaut, sont indépendants de la valorisation de la firme dans cette modélisation.

Malgré cette approche moins intuitive par rapport aux modèles structurels, les modèles à intensité témoignent de plus de pouvoir explicatif des *spreads* de crédit, c'est-à-dire la différence de rendement avec le taux sans risque en compensation du risque de défaut accru.

Plans de paiements fondés sur les actions :

Un autre élément principal du passif est la valeur totale des plans de paiements fondés sur les actions. Ces plans sont régis de façon séparée par la norme IFRS 2 et concernent l'attribution d'instruments de capitaux propres ou de liquidité en référence à d'autres instruments de capitaux propres pour compenser des salariés ou des tiers avec une fonction similaire. Des exemples communs d'un plan de paiements fondés sur actions sont l'attribution gratuite d'actions, les *stock-options*, les bons de souscription de parts de créateur d'entreprise (BSPCE), et les bons de souscription d'actions.

Éléments caractéristiques d'une société non cotée

Deux autres éléments du passif, cette fois-ci emblématiques d'une société non cotée, sont les actions privilégiées et les obligations convertibles.

Actions privilégiées :

Une action privilégiée est une action assortie de droits supplémentaires par rapport aux actions classiques, appelées actions ordinaires par convention. Les droits économiques les plus souvent accordés aux actions privilégiées sont le privilège de liquidation et le droit de conversion en actions ordinaires. Le privilège de liquidité, qui crée une priorité de remboursement, illustre la hiérarchie qui existe entre les actionnaires.

Obligations convertibles :

Une obligation convertible est un produit hybride avec une composante d'obligation classique et une composante ayant le profil d'une option d'achat. Le détenteur d'une obligation convertible a la possibilité d'échanger son obligation contre un nombre généralement prédéterminé d'actions de la société émettrice à certaines périodes de la vie de l'obligation. La valeur des actions reçues par l'investisseur en cas de conversion d'une obligation convertible est appelée la parité.

Analyse en cascade — *Waterfall Analysis*

L'analyse en cascade, popularisée sous le nom *Waterfall analysis*, est une démarche d'analyse financière qui permet de déterminer les proportions de richesse allouée de façon marginale à toutes les parties prenantes d'une société lorsque la valeur de la société devient de plus en plus importante. En effet, quelle que soit la structure de capital d'une entreprise, il est toujours possible de déterminer des intervalles au sein desquels les proportions d'allocation marginale de richesse sont fixes.

Une conséquence de cette analyse est l'extension du modèle structurel de [Merton \(1974\)](#), où la valorisation de toute classe de titres est équivalente à l'évaluation d'une option d'achat dont le sous-jacent est la valeur totale de l'entreprise. L'analyse en cascade jouera un rôle similaire dans la modification du modèle de [Ballotta et Kyriakou \(2015\)](#) pour comprendre une structure de capital plus complexe.

Le cadre IFRS sur la valorisation

L'ensemble des éléments pertinents à la valorisation présenté, il est désormais utile de développer le cadre réglementaire de leur valorisation.

Notions de valorisation

Les trois notions utilisées pour apprécier les éléments du passif d'une société conformément à la norme IFRS sont : la juste valeur, le coût amorti et le coût résiduel des instruments. La juste valeur définit

le prix qui serait payé pour le transfert d'un passif lors d'une transaction normale entre des intervenants du marché à la date d'évaluation.

La norme IFRS 13 précise que la juste valeur, même pour les entités non cotées, doit comprendre les hypothèses qui seraient prises en compte par des intervenants du marché, dont notamment les hypothèses sur le risque de défaut (ou non-exécution).

Le coût amorti d'un passif, défini dans la norme IFRS 9, correspond à sa juste valeur à laquelle est appliquée un traitement comptable similaire aux amortissements classiques. Le taux d'amortissement utilisé, appelé taux d'intérêt effectif, actualise de façon exacte l'ensemble des flux de trésorerie pour retrouver la valeur comptable initiale.

Le coût résiduel, quant à lui, correspond simplement à la différence de valeur entre plusieurs composantes.

Encadrement de valorisation pour les obligations convertibles

Conformément à la norme IAS 32, les deux composantes d'une obligation convertible doivent être classifiées entre passif financier et instrument de capitaux propres. Au regard de la partie obligataire qui est presque toujours un passif financier, la classification de l'instrument dans son ensemble dépend de l'option de conversion ; trois cas de classification sont probables.

Lorsque l'option de conversion est un instrument de capitaux propres, l'obligation convertible est considérée comme instrument financier composé. Dans ce cas, la composante d'obligation classique est valorisée par coût amorti et l'option de conversion est valorisée par coût résiduel. Si l'option de conversion est un passif financier, l'ensemble de l'instrument est valorisé au coût amorti.

Cependant, si l'option de conversion vérifie les conditions d'un dérivé (défini dans la norme IFRS 9) en même temps que celles d'un passif financier, l'instrument est un passif financier hybride. Dans ce cas exceptionnel, l'option de conversion doit être valorisée par la juste valeur et la partie obligataire déduite par coût résiduel.

Encadrement de valorisation pour les paiements fondés sur les actions

En règle générale, la norme IFRS 2 exige que les paiements fondés en actions soient mesurés par la juste valeur de leur contrepartie, c'est-à-dire les biens et services qui sont reçus en échange par la société. Dans le cas où cette mesure des biens et services n'est pas envisageable, avec l'exemple remarquable des plans de l'actionnariat salarié, la valorisation des plans doit s'effectuer par référence à la juste valeur des instruments de capitaux propres attribués.

Le paragraphe 17 de la norme IFRS 2 précise également qu'en absence de données de marché, la détermination de la juste valeur doit intégrer

tous les facteurs et hypothèses que prendraient en considération des intervenants du marché bien informés et consentants pour la fixation du prix.

Ainsi, étant donné que les obligations convertibles influent sur la valeur des capitaux propres, une modélisation conforme aux normes IFRS devrait intégrer les facteurs qui seraient pris en considération au marché pour établir le prix d'une obligation convertible et de ses composantes. Un tel facteur d'un poids décisif dans l'établissement du prix des obligations convertibles est le risque de crédit de l'entité. À cela s'ajoute une structure de capitaux propres potentiellement complexe en cas d'émission d'actions privilégiées par l'entité.

L'étude d'un modèle financier qui puisse répondre à l'ensemble de ces contraintes fait l'objet de la prochaine section.

Modèle structurel de valorisation

Choix du modèle

Les modèles à intensité, sans possibilité de valorisation simultanée des instruments de passif, sont mal adaptés à la valorisation exigée par les normes IFRS et IAS dans le cas particulier d'une société non cotée. Ainsi, seuls les modèles structurels de défaut seront considérés pour répondre à cette problématique.

Seront également exclus les modèles structurels qui utilisent un processus de diffusion pur pour modéliser l'évolution des actifs en raison des estimations de [Lyden et Saraniti \(2001\)](#) et de [Eom, Helwege, et Huang \(2004\)](#) qui mettent en évidence la calibration inadéquate aux *spreads* de crédit. En revanche, la modélisation structurelle, comprenant des sauts et/ou une volatilité non constante pour la valeur de la société, représente une alternative satisfaisante au regard des prix bien adaptés au marché observés par [Lipton et Sepp \(2009\)](#), [Fang et Oosterlee \(2009b\)](#) et [Dao et Jeanblanc \(2012\)](#), parmi d'autres.

Par conséquent, le modèle de défaut par structure de capital retenu dans ce mémoire intègre la possibilité de sauts imprévisibles dans l'évolution de valeur des actifs de la société. Étant donné le contexte des sociétés non cotées, les modèles structurels avec une volatilité locale ou stochastique n'ont pas été abordés en raison du manque de prix de marché des options, nécessaires à la calibration.

Présentation du modèle

Le modèle de valorisation qui sera utilisé est une extension de l'article de recherche de [Ballotta et Kyriakou \(2015\)](#) avec l'inclusion d'une structure de capital plus complexe et une valorisation scindée de l'obligation convertible.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q}, \mathbb{F})$ un espace de probabilité filtré, avec \mathbb{Q} la mesure de probabilité risque-neutre et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une filtration. Il sera présumé que le domaine de définition de toute variable aléatoire évoquée par la suite correspond à cet espace filtré.

Notons $r(t)$ et $W(t)$ des processus stochastiques respectivement pour le taux court sans risque et la valeur des actifs de la société à un instant $t \in \mathbb{R}_+$.

Le premier facteur aléatoire $r(t)$ est supposé évoluer selon le modèle de Vasicek (1977).
En résumé,

Modèle de Vasicek

Dynamique du taux sans risque

Selon le modèle de Vasicek du taux sans risque, $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$dr(t) = \kappa [\mu_r - r(t)] dt + \sigma_r dZ_t^r$$

où :

- κ , μ_r , et σ_r sont des constantes réelles strictement positives ; et
- $Z^r = (Z_t^r)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} adapté à une filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ telle que $\mathcal{G}_t \subsetneq \mathcal{F}_t$.

Le deuxième facteur aléatoire $W(t)$ est supposé évoluer comme un processus mixte de diffusion à saut. En résumé,

Modèle de Ballotta et Kyriakou

Évolution de la valeur de la société

$$\begin{aligned} W(t) &= e^{Y(t)} \\ &= \exp \left(\tilde{Y}(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} X_k - \lambda \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [e^X - 1] t \right) \\ &= \exp \left(\ln[W(0)] + \int_0^t \left(r(s) - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \sigma Z_t^W + \sum_{k=1}^{N(t)} X_k - \lambda \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [e^X - 1] t \right), \end{aligned}$$

où :

- $N = (N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda \in \mathbb{R}_+$;
- $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à une variable X dont la fonction caractéristique est $\varphi_X : u \mapsto \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} (e^{iuX})$;
- $r(s)$ est le taux sans risque à l'instant s ;
- σ est une constante réelle strictement positive ; et
- $Z^W = (Z_t^W)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} adapté à la filtration \mathbb{G} .

Les facteurs aléatoires N , Z^W , et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont supposés mutuellement indépendants. De surcroît, le coefficient de corrélation de Pearson entre les processus Z^W et Z^r est constant et égal à $\rho \in [-1, 1]$.

Mise en oeuvre

Considérons une structure de capital qui comprend des obligations convertibles, des obligations classiques, des actions privilégiées, des actions ordinaires et des options de souscription. Ce modèle suppose un ensemble fini de dates de décision et de paiements discrètes concernant tous les titres, donné par $(\tau_k)_{0 \leq k \leq n}$, de sorte que

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \tau_k = T \left[1 - k(\Delta\tau) \right], \text{ avec } (\Delta\tau) = \frac{1}{n}.$$

Soient T la maturité de l'obligation classique et $\tau_{k^*} \leq T$ la maturité de l'obligation convertible pour un $k^* \in \{0, 1, \dots, n\}$.

A l'aide d'une analyse en cascade, il est possible d'explicitier une fonction $H_{(k)}^x$ des flux de récompense du contrat (soit la fonction des *payoffs*) à l'instant τ_k pour un porteur du titre x , lorsque $k = 0$ ou $k = k^*$. Considérons de plus la fonction $G_{(k)}^x$ à l'instant τ_k pour la valeur de continuation des titres, où le porteur des titres ne prend pas de décision qui change les flux futurs, donnée $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$ par

$$G_{(k+1)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k^+)) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} r(s) ds \right) H_{(k)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k^+)) \mid \mathcal{F}_{\tau_{k+1}} \right].$$

Alors, il existe une relation de récurrence entre les fonctions $H_{(k)}^x$ et $G_{(k)}^x$ qui permet de déterminer le prix en absence d'opportunité d'arbitrage des titres. En effet,

1. La fonction de flux $H_{(k)}^B$ de l'obligation classique est initialisée avec $k = 0$, c'est-à-dire à la maturité de l'obligation, et le prix de cette obligation à la maturité de l'obligation convertible, $\tilde{B}(\tau_{k^*})$, peut être calculé de façon itérative, où

$$H_{(k)}^B \implies G_{(k+1)}^B \implies H_{(k+1)}^B.$$

En absence d'opportunité d'arbitrage, $G_{(k^*)}^B(r(\tau_{k^*}), Y(\tau_{k^*})) = \tilde{B}(\tau_{k^*})$.

2. À la maturité de l'obligation convertible, $\tau_{k^*} = T_{CB}$, la fonction $H_{(k)}^x$ est initialisée pour l'ensemble des titres.
3. Les valeurs $H_{(k)}^x$ et $G_{(k)}^x$ sont calculées par itération jusqu'à l'obtention de $G_{(n)}^x$, qui correspond au prix à la date initiale $\tau_n = 0$.

Les intégrales de $G_{(k)}^x$ peuvent être calculées de façon efficace avec l'utilisation des algorithmes de *Fast Fourier Transform*.

La description ci-dessus de la mise en oeuvre du modèle n'est qu'une version très abrégée du modèle dans le corps du mémoire. Avec la définition de plus de fonctions et variables, le modèle de valorisation dans ce mémoire est capable de prendre en considération de nombreux facteurs supplémentaires dans la détermination du prix des titres de passif, tels que le paiement des coupons, le versement de dividendes, et le remboursement anticipé de l'obligation convertible par son émetteur.

Calibration des paramètres de modélisation

Pour le taux sans risque

Étant donnée l'application étendue du modèle de Vasicek, de nombreuses méthodes de calibration des paramètres μ_r, σ_r et κ sont envisageables. Une telle méthode possible est celle de Halgašová, Stehlíková, et Bučková (2014), qui minimise l'erreur quadratique moyenne entre les taux de rendement d'obligations zéro-coupon sans risque de défaut observés sur le marché et les taux de rendement sans risque générés par le modèle.

Pour la valeur de la société

En utilisant les propriétés des processus affines de Filipovic (2009), il est possible d'explicitier la fonction caractéristique des facteurs aléatoires

$$\mathbb{E}[e^{iu_1 r(t) + iu_2 Y(t)}] = \exp\left(\phi(t, iu_1, iu_2) + \psi_1(t, iu_1, iu_2)r(0) + \psi_2(t, iu_2)Y(0) + \psi_3(t, iu_2)\right),$$

avec $\phi : (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi_1 : (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi_2 : (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ et $\psi_3 : (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$. Finalement, en prenant $u_1 = 0$, la transformée de Fourier de Y est déterminée :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{iuY(t)}] &= \exp\left(\phi(t, 0, iu) + \psi_1(t, 0, iu)r(0) + \psi_2(t, iu)Y(0) + \psi_3(t, iu)\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{iuy} f_{Y(t)}(y) dy. \end{aligned}$$

En supposant que le temps de défaut est défini comme dans le modèle de Merton (1974) ou de Black et Cox (1976), il est possible d'utiliser la fonction caractéristique de Y pour calculer la probabilité de défaut de la société. Or, dans les modèles à intensité et pour une maturité t donnée, cette probabilité se calcule avec $\lambda(t)$, qui correspond à la différence entre le taux de rendement risqué et le taux sans risque. Une fonction telle que $t \mapsto \lambda(t)$ est équivalente à une courbe de *spread*, et les estimations de marché de telles courbes sont accessibles pour un *rating* de crédit donné de l'émetteur.

Ainsi, les paramètres de Y peuvent être calibrés par rapport à la courbe de *spread* qui correspond au *rating* de crédit supposé de l'émetteur, pour l'ensemble des points $(t, \lambda(t))$ de la courbe de *spread*.

Conclusion

La calibration du modèle est bien adaptée aux exigences des normes IFRS sur la juste valeur étant donné que le choix des paramètres découle des hypothèses de marché. L'inclusion des sauts aléatoires dans la modélisation permet aussi que le modèle s'adapte mieux aux probabilités de défaut de marché.

Enfin, l'algorithme de valorisation satisfait la problématique fondamentale de valorisation simultanée des titres dans IFRS 2 en généralisant des algorithmes existantes à l'aide de l'analyse en cascade. Ainsi, malgré pas intuitif au premier abord, ce mémoire réussit à développer une méthodologie viable pour la valorisation des titres de passif d'une société non cotée.

Executive Summary

The fair valuation of debt and equity instruments in the context of non-listed firms is an intricate and multifaceted task. In contrast to their publicly traded counterparts, non-listed firms operate within a realm where market prices are often absent or unreliable, information can be limited or selectively disclosed, and ownership structures vary widely.

Nevertheless, this thesis seeks to alleviate these challenging aspects by proposing and implementing a pricing model that integrates diverse ownership structures and that is adapted to the limited market data available. The thesis will thus explore the theoretical foundations, the overarching principles pursuant to IFRS, and the practical application of liability valuation within the context of non-listed firms.

Liabilities subject to valuation

First, we present the liabilities subject to valuation in conjunction with the theoretical foundations of their pricing. The most common liabilities, which also concern listed firms, will be discussed before turning to liabilities specific to the non-listed context.

General liabilities

Debt through bond issues :

One of the main liabilities for any firm is the total value of its debt. When pricing liabilities, the debt considered is generally in the form of bond issues. As firms are not exempt from defaulting, their bonds are subject to uncertainty of repayment, which defines the notion of credit risk. The probabilistic theory of credit risk, and its subsequent role in pricing, varies between two schools of models : either structural credit risk models or reduced-form default intensity models.

On the one hand, structural credit risk models postulate that credit risk is an endogenous event, which occurs when the total asset value of the firm is insufficient to cover debt repayment. In these models, the probability of defaulting is fully characterized by the firm's total value, and the pricing of securities is comparable to pricing a call option whose underlying asset is the total firm value.

On the other hand, default intensity models postulate that credit risk is an exogenous event, which occurs at the first jump of a Poisson process. This stochastic process, and thus the time of default, are independent of the firm value in default intensity models. Despite this less intuitive approach compared to structural models, reduced form models demonstrate greater explanatory power of credit spreads — the yield difference with the risk-free rate in compensation for increased default risk.

Share-based payments :

Another major element of liabilities is the total value of share-based payment schemes. These schemes are governed separately by IFRS 2 and concern the allocation of equity instruments or cash based on equity instruments as compensation to employees or third parties with similar functions. Common examples of share-based payments schemes include the award of free shares, stock-options, warrants for business creator shares, and equity warrants.

Liabilities of non-listed firms

Two additional major liabilities, emblematic of non-listed firms, are preferred stock and convertible bonds.

Preferred stock :

Preferred stock is stock with additional economic and legal rights compared to common stock. The economic rights most often granted to preferred stock are liquidity preference and the right to convert to common stock. The liquidity preference of a preferred share, which establishes a priority of repayment, illustrates the hierarchy that exists between shareholders.

Convertible bonds :

A convertible bond is a hybrid instrument of debt and equity, comprising a bond component and a component with the same financial profile of a call option. The holder of a convertible bond has the possibility to exchange the bond repayment for a generally predetermined number of shares of the issuing firm at certain periods throughout the instrument's duration. The value of each share received by the bondholder in the event of conversion is called the conversion price.

Waterfall Analysis

Waterfall analysis is a financial analysis approach that determines the proportions of wealth marginally allocated to all of a company's stakeholders as the company's value becomes increasingly important. Regardless of the company's capital structure, it is always possible to determine intervals within which the proportions of marginal wealth allocation are fixed.

A consequence of waterfall analysis is the extension of Merton's structural credit risk model, where the pricing of each class of securities is equivalent to pricing a call option whose underlying asset is the total firm value. This analysis will play a similar role in the extension of Ballotta and Kyriakou's pricing model to include a more complex capital structure.

The IFRS valuation framework

With all the relevant liabilities subject to valuation presented, it is worthwhile to elaborate the regulatory framework for their valuation.

Concepts of valuation

The three concepts used in IFRS guidelines to value the liabilities of a company are fair value, amortized cost, and residual cost. Fair value is defined as

the price that would be received to sell an asset or paid to transfer a liability in an orderly transaction between market participants at the measurement date.

IFRS 13 specifies that fair value, even for non-listed entities, must include the assumptions that would be used by market participants; this is especially the case regarding assumptions of credit risk (non-performance risk).

The amortized cost of a liability, defined in IFRS 9, corresponds to its fair value after an accounting manipulation similar to the amortization of assets. The amortization rate utilized, referred to as the effective interest rate, exactly discounts all future cash flows to the initial accounting value of the liability.

Meanwhile, residual cost corresponds simply to the difference of value between two or more components.

The valuation framework for convertible bonds

Pursuant to the international accounting standard IAS 32, the two components of a convertible bond must be classified as either a financial liability or an equity instrument. In light of the bond component nearly always being a financial liability, the classification of the convertible bond as a whole depends on the component of the right to conversion; there are three likely outcomes of classification.

When the right to conversion is an equity instrument, the convertible bond is considered a compound financial instrument. In this case, the bond component is valued at amortized cost and the equity component is valued by residual cost. If the provision of right to conversion is classified as financial liability, the whole instrument is measured at amortized cost.

However, if the provision of right to conversion verifies both the characteristics of a financial liability and a derivative (defined in IFRS 9), the convertible bond is considered a hybrid financial liability. In this special case, the right to conversion is measured at fair value and the value of the bond component is deduced at residual cost.

The valuation framework for share-based payments

As a general rule, IFRS 2 requires that share-based payments be measured at the fair value of their compensation, that is, the goods and services received by the company in exchange for the payments. In the event that the valuation of the goods and services received is not feasible, which includes the notable example of employee share ownership schemes, the schemes are to be valued by reference to the fair value of the equity instruments granted.

Paragraph 17 of IFRS 2 also specifies that in the absence of market data, determining fair value must incorporate

all factors and assumptions that knowledgeable, willing market participants would consider in setting the price.

Therefore, given that convertible bonds influence the value of equity, a model in keeping with IFRS guidelines should incorporate the factors that market participants would consider in setting the price of a convertible bond. One such decisive factor in the pricing of convertible bonds is the entity's credit risk. This is compounded by a potentially complex equity structure in the event of the entity issuing preferred stock.

The study of a financial model that can meet all these constraints is the subject of the next section.

Structural credit risk model for valuation

Model selection

Default intensity models, without the capacity to simultaneously price debt and equity instruments, are poorly suited to the valuation techniques required by IFRS and IAS in the specific case of a non-listed company. Thus, only structural credit risk models will be considered to address this issue.

The exclusion from this study will also apply to structural credit risk models that presume a pure diffusion process reflects the evolution of the total firm asset value. This is light of the estimations by Lyden and Saraniti (2001) and Eom, Helwege, and Huang (2004) that highlight the inaccurate credit spreads obtained with such assumptions. In contrast, structural models incorporating jumps and/or a non-constant volatility for the firm value are a satisfactory alternative given the properly market-fitted prices observed by Lipton and Sepp (2009), Fang and Oosterlee (2009), and Dao and Jeanblanc (2012), among others.

Consequently, the structural credit risk model chosen in this thesis incorporates the possibility of unpredictable jumps in the evolution of the firm's total asset value. Given the context of non-listed firms, structural models with local or stochastic volatility were not explored due to lack of market prices for options, which are needed for their calibration.

Presentation

The pricing model that will be developed is an extension of the research article by Ballotta and Kyriakou (2015) that includes a more complex capital structure and introduces a split pricing for convertible bonds components.

Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q}, \mathbb{F})$ be a filtered probability space, with \mathbb{Q} the risk-neutral probability measure and $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ a filtration. It will be assumed that all random variables subsequently defined belong to this filtered space.

We consider the notation $r(t)$ and $W(t)$ for the risk-free short rate and the firm's total asset value respectively at time $t \in \mathbb{R}_+$.

The first random factor $r(t)$ is assumed to evolve according to the Vasicek (1977) model. In essence,

Vasicek Model

Stochastic differential equation of the short rate

According to the Vasicek model, the short rate satisfies $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$dr(t) = \kappa [\mu_r - r(t)] dt + \sigma_r dZ_t^r$$

where :

- $\kappa, \mu_r,$ et σ_r are strictly positive real constants ; and
- $Z^r = (Z_t^r)_{t \in \mathbb{R}_+}$ is a Wiener process under \mathbb{Q} adapted to a filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ such that $\mathcal{G}_t \subsetneq \mathcal{F}_t$.

The second random factor $W(t)$ is assumed to evolve like the exponential of a jump-diffusion process. In essence,

Ballotta and Kyriakou's Model

Stochastic representation of the total firm value

$$\begin{aligned} W(t) &= \exp^{Y(t)} \\ &= \exp \left(\tilde{Y}(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} X_k - \lambda \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^X - 1]t \right) \\ &= \exp \left(\ln[W(0)] + \int_0^t \left(r(s) - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \sigma Z_t^W + \sum_{k=1}^{N(t)} X_k - \lambda \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^X - 1]t \right), \end{aligned}$$

where :

- $N = (N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ is a homogenous Poisson process with intensity $\lambda \in \mathbb{R}_+$;
- $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ is a sequence of independent and identically distributed random variables, sharing the distribution of a random variable X with the characteristic function $\varphi_X : u \mapsto \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{iuX})$;
- $r(s)$ is the short rate at time s ;
- σ is a strictly positive real constant ; and
- $Z^W = (Z_t^W)_{t \in \mathbb{R}_+}$ is a Wiener process under \mathbb{Q} adapted to the filtration \mathbb{G} .

The random factors N , Z^W , et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ are assumed to be mutually independent. Furthermore, the Pearson correlation coefficient between the Wiener processes Z^W et Z^r is assumed to be constant and equal to $\rho \in [-1, 1]$.

Implementation

We consider a capital structure that includes convertible bonds, bonds, preferred stock, common stock, and equity warrants. The model assumes that all relevant decision dates and dates of discrete payment exist in a finite set $(\tau_k)_{0 \leq k \leq n}$, such that

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \tau_k = T \left[1 - k(\Delta\tau) \right], \text{ with } (\Delta\tau) = \frac{1}{n}.$$

Let T be the bond maturity and $\tau_{k^*} \leq T$ the convertible bond maturity for $k^* \in \{0, 1, \dots, n\}$.

With the use of waterfall analysis, it is possible to explicitly define a payoff function $H_{(k)}^x$ for a holder of the security x at time τ_k when $k = 0$ or $k = k^*$. We further consider a function $G_{(k)}^x$ at time τ_k for the continuation value of the securities, where the holder does not take any decision altering the security's future cash flows. In the absence of arbitrage opportunity, this function is given $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$ by

$$G_{(k+1)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k^+)) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} r(s) ds \right) H_{(k)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k^+)) \mid \mathcal{F}_{\tau_{k+1}} \right].$$

It follows that there exists a recurrence relation between the functions $H_{(k)}^x$ et $G_{(k)}^x$ that creates the possibility to determine the current prices of all securities. In short,

1. The payoff function $H_{(k)}^B$ of the bond can be easily defined at $k = 0$, that is, at the bond's maturity, and the bond price at the convertible bond maturity $\tilde{B}(\tau_{k^*}^*)$, can be deduced through iterative calculation, where

$$H_{(k)}^B \implies G_{(k+1)}^B \implies H_{(k+1)}^B.$$

In the absence of arbitrage opportunity, $G_{(k^*)}^B(r(\tau_{k^*}^*), Y(\tau_{k^*}^*)) = \tilde{B}(\tau_{k^*}^*)$.

2. At the convertible bond maturity τ_{k^*} , the function $H_{(k)}^x$ can be defined for all securities.
3. The values of $H_{(k)}^x$ and $G_{(k)}^x$ can be calculated iteratively until the values $G_{(n)}^x$ are obtained, which correspond to the no-arbitrage prices at the evaluation date $\tau_n = 0$.

The integrals in the function $G_{(k)}^x$ can be resolved efficiently with the use of Fast Fourier Transform algorithms.

The above description of the model's implementation is only a very abridged version of the model in the body of this thesis. With the definition of additional functions and variables, the pricing model in this thesis is capable of incorporating numerous other factors in the valuation of liabilities, such as coupon payments, dividend distributions, and the premature redemption of the convertible bond by its issuer.

Model calibration

For the short rate

Given the widespread adoption of the Vasicek model, numerous calibration methods of the parameters μ_r, σ_r and κ are feasible. One such possible method is that of Halgašová et al. (2014), which minimizes the mean squared error between the observed spot rates of bonds with no default risk and risk-free rates generated by the model.

For the total firm value

Using the properties of affine processes established by Filipovic (2009), it is possible to express the joint characteristic function of the random factors $r(t)$ et $W(t)$ such that

$$\mathbb{E}[e^{iu_1 r(t) + iu_2 Y(t)}] = \exp\left(\phi(t, iu_1, iu_2) + \psi_1(t, iu_1, iu_2)r(0) + \psi_2(t, iu_2)Y(0) + \psi_3(t, iu_2)\right),$$

with $\phi : (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi_1 : (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{C}$, $\psi_2 : (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ et $\psi_3 : (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$. Finally, by evaluating $u_1 = 0$, the Fourier transform of Y is determined :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{iuY(t)}] &= \exp\left(\phi(t, 0, iu) + \psi_1(t, 0, iu)r(0) + \psi_2(t, iu)Y(0) + \psi_3(t, iu)\right) \\ &= \int e^{iuy} f_{Y(t)}(y) dy. \end{aligned}$$

Assuming that the time of default is defined like in the Merton (1974) or Black and Cox (1976) model, the firm's default probability can be estimated with the characteristic function of Y . Yet at the same time, for a given maturity t in reduced form credit risk models, the same default probability is calculated with $\lambda(t)$, which corresponds to the difference between the risky bond's remuneration rate and the risk-free rate. The function $t \mapsto \lambda(t)$ is equivalent to a spread curve, and market estimations of such curves are accessible for a given credit rating of the bond issuer.

Therefore, the parameters describing the process Y can be calibrated against the spread curve that corresponds to the issuer's presumed credit rating at all points $(T, \lambda(T))$ of the spread curve.

Conclusion

The model calibration is well adapted to the requirements set in IFRS on fair value as the choice of parameters results from market assumptions. The inclusion of random jumps in modelling the firm value further improves this aspect by allowing the model's default probabilities to better fit the market-implied probabilities of the spread curve.

Finally, the pricing algorithm satisfies the key challenge of IFRS to simultaneously value equity-linked instruments by extending existing algorithms with Waterfall Analysis. As such, despite not being immediately intuitive, this thesis succeeds in outlining a viable methodology to value a non-listed firm's liabilities.

Introduction

La valorisation des instruments de passif peut certes être jugée une opération ardue quelle que soit la nature de la société sur laquelle l'évaluation se base ; cependant, la problématique s'accroît lorsqu'il s'agit d'une société non cotée. Il existe deux principales caractéristiques inhérentes au secteur non coté qui peuvent expliquer cette problématique.

La première source de difficulté saillante est le manque d'informations de marché. Lorsque le prix des instruments de capitaux propres ou de la dette ne sont pas facilement disponibles, la possibilité d'exploiter des valeurs de référence dans l'évaluation est fortement limitée. De ce fait, les méthodes de valorisation sont généralement réalisées sur la base de facteurs plus subjectifs, ce qui augmente le risque de non conformité avec la juste valeur des normes IFRS. L'appréciation du risque de crédit des dettes est particulièrement floue lorsqu'elle est mesurée en absence du marché financier.

D'autre part, une source principale de la problématique de valorisation est la structure complexe des capitaux propres des sociétés non cotées. En plus des actions ordinaires, cette structure comprend souvent de nombreux instruments hybrides, dont notamment les obligations convertibles et les actions privilégiées. L'inclusion de tels instruments renforce la hiérarchie entre les parties prenantes, nécessitant une analyse spécifique dite en cascade.

L'enjeu de ce mémoire est de pallier ces points de difficulté par la proposition et mise en oeuvre d'une méthode de valorisation qui intègre la hiérarchie des titres et qui emploie au mieux des données de marché. Pour répondre à cet objectif, ce mémoire se décomposera en plusieurs sections regroupées au sein de quatre chapitres.

Dans un premier chapitre, l'accent sera mis sur les méthodes de valorisation existantes avec la présentation des instruments financiers du passif qui peuvent être émis. Ce chapitre sera utile à la bonne compréhension des notions importantes dans ce mémoire, telles que le risque de crédit et l'analyse en cascade des instruments. Il s'agira d'abord des instruments les plus généraux, tels que les obligations, avant d'approfondir les éléments qui présentent davantage un intérêt pour les sociétés non cotées.

Par la suite, le deuxième chapitre sera consacré au développement des points essentiels des normes IFRS qui délimiteront le cadre de valorisation. Les principes fondamentaux de la réglementation, dont notamment la juste valeur, seront formellement développés. Ce chapitre vise également à clarifier les règles d'application pour les instruments à l'instar des obligations convertibles, qui disposent de la possibilité d'être scindés en plusieurs composantes.

Ensuite, il sera possible d'aborder dans un troisième chapitre une méthode de valorisation qui répond au mieux aux objectifs fixés. Le modèle qui sera présenté comprend notamment l'originalité d'évaluer simultanément des obligations convertibles et non convertibles, des actions privilégiées et ordinaires, et des options d'achat dans la structure de capital de la société émettrice. La prise en compte de la scission des obligations convertibles dans la valorisation fait également partie des apports du modèle.

Enfin, dans le dernier chapitre sera étudiée la calibration du modèle avec un exemple d'application numérique. Une analyse de sensibilité sera menée sur le *rating* de crédit, qui détermine l'ensemble des paramètres endogènes à la modélisation.

Définition des éléments de passif

2.1 Éléments généraux

Les éléments étudiés dans cette section concernent tout type de société, les spécificités du secteur non-coté étant abordées à la [section 2.2](#)

2.1.1 Dettes par émission d'obligations

Lorsqu'une société émet de la dette par des obligations, le remboursement des flux aux créanciers n'est pas certain. Cette incertitude est traduite formellement par le risque de crédit (aussi appelé risque de défaut ou risque de contrepartie) des obligations. La définition et la valorisation conséquente du risque de crédit varie selon deux approches fondamentales mais mutuellement exclusives :

1. l'approche par un modèle structurel, ou
2. l'approche par un modèle à intensité.

Modèles structurels du risque de crédit

Dans cette approche fondamentale, il est supposé que le risque de crédit est un évènement endogène qui survient lorsque la valeur totale des actifs de la société emprunteuse n'est pas suffisante pour couvrir le remboursement de la dette. Ce type de modélisation a été instauré aux années 1970 avec le travail de [Merton \(1974\)](#). En vu de la similarité de ce modèle avec l'analyse en cascade de la [section 2.3](#), il est utile de l'aborder en détail.

Le modèle de Merton repose sur l'hypothèse d'une structure de capital simplifiée de la société,

$$W_t = E_t + D_t,$$

où W_t représente l'ensemble des actifs de la société, E_t la valeur des capitaux propres, et D_t la valeur des dettes à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$. En supposant que :

- i) W_t suit un mouvement géométrique brownien de dérive μ et de volatilité σ ,
 $\left(\frac{dW_t}{W_t} = \mu dt + \sigma dZ_t, \text{ avec } Z_t \text{ un mouvement brownien standard sous la mesure risquée } \mathbb{P} \right)$
- ii) un actif sans risque s'échange sur le marché au taux de rendement constant et continu r ,
- iii) la dette de la société est équivalente à une obligation zéro-coupon de nominal K et de maturité T , dont le défaut ne peut survenir avant l'échéance,

il est possible de résoudre explicitement les valeurs de E_t et D_t . Étant donnée la responsabilité limitée des actionnaires, à la maturité T de la dette :

$$\begin{cases} D_T = \min(W_T, K) & = K - (K - W_T)^+ \\ E_T = (W_T - K)\mathbf{1}_{\{W_T \geq K\}} & = (W_T - K)^+ \end{cases} \quad \text{en définissant } x^+ := x \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

En termes des flux en T , on s'aperçoit ainsi que le flux des capitaux propres (E_T) est parfaitement dupliqué par l'achat d'un *call* européen de maturité T et de prix d'exercice K sur la valeur de la société (soit un flux de $(W_T - K)^+$). De façon similaire, le flux terminal des dettes (D_T) est dupliqué par l'achat d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut de nominal K (soit un flux de K en T) avec la vente d'un *put* européen de prix d'exercice K sur la valeur de la société (soit un flux de $-(K - W_T)^+$), où l'obligation et le *put* sont de même maturité T .

Il s'ensuit qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage, les valeurs de E_t et D_t pour $t < T$ sont égaux aux prix des portefeuilles de duplication en date t . Or, les hypothèses i) et ii) de Merton permettent d'appliquer la formule de [Black et Scholes \(1973\)](#) pour évaluer le *call* et le *put*.

Par conséquent¹,

$$E_t = W_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad \text{où} \quad \begin{cases} d_1 := \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}} \left[\ln \left(\frac{W_t}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right], \\ d_2 := d_1 - \sigma \sqrt{T-t}, \\ \Phi : x \mapsto \mathbb{P}(Z \leq x) \text{ étant donné } Z \sim \mathcal{N}(0, 1), \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} D_t &= K e^{-r(T-t)} - \left[-W_t \Phi(-d_1) + K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) \right] \\ D_t &= W_t \Phi(-d_1) + K e^{-r(T-t)} [1 - \Phi(-d_2)] \\ D_t &= W_t \Phi(-d_1) + K e^{-r(T-t)} \mathbb{P}(Z > -d_2) \\ D_t &= W_t \Phi(-d_1) + K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \quad \text{par symétrie de la loi } \mathcal{N}(0, 1). \end{aligned}$$

Cependant, l'hypothèse que l'évènement de défaut ait lieu uniquement à la maturité pourrait être gênante pour les entreprises dont les créanciers sont capables de déclencher le défaut avant la maturité de leurs obligations. Ainsi, le modèle de Merton a été étendu par de nombreux auteurs, dont notamment [Black et Cox \(1976\)](#) qui ont défini le temps de défaut par

$$\tau := \inf \left\{ t \in [0, T] \mid W_t < L(t) \right\}^2,$$

où $L(t)$ correspond au seuil de défaut en fonction du temps t lorsque celui-ci est précisé par les clauses restrictives du contrat de crédit. En absence d'opportunité d'arbitrage, on remarque que $L(t) \leq K$. En supposant le cas contraire par l'absurde, les créanciers seraient toujours remboursés par le nominal K , ce qui correspondrait à une obligation sans risque de défaut.

Un exemple possible de $L(t)$ est $L(t) := K_0 e^{-k(T-t)}$, avec $K_0 \leq K$ et k tel que la condition $L(t) \leq K$ est respectée à tout instant t . Il s'agit d'un minimum de remboursement à maturité K_0 actualisé par le taux k . Dans ce cas, le temps de défaut τ est donné par le temps d'arrêt d'un mouvement brownien avec dérive.

Ce modèle est étudié par la suite étant donné que les probabilités de défaut qui en découlent peuvent servir à la calibration de paramètres à la [sous-section 5.1.2](#).

1. Formules Black-Scholes d'un *call* et d'un *put* européens potentiellement à détailler
 2. La convention $\inf \emptyset = +\infty$ s'applique à cette définition

Soit $(Z_t^{\mathbb{Q}})_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien standard sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} adapté à la filtration $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Alors,

$$\begin{aligned} \{W_t < L(t)\} &= \left\{ W_0 \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma Z_t^{\mathbb{Q}} \right] < K_0 e^{-k(T-t)} \right\} \\ &= \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma Z_t^{\mathbb{Q}} < \ln \left(\frac{K_0}{W_0} \right) - k(T-t) \right\} \\ &= \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 - k \right) t + \sigma Z_t^{\mathbb{Q}} < \ln \left(\frac{L(0)}{W_0} \right) \right\} \\ &= \left\{ d_0 + mt + \sigma Z_t^{\mathbb{Q}} < 0 \right\}, \end{aligned}$$

en définissant $m := (r - \frac{1}{2} \sigma^2 - k)$ et $d_0 := \ln \left(\frac{W_0}{L(0)} \right)$. Notons également $Y_t^{\mathbb{Q}} := d_0 + mt + \sigma Z_t^{\mathbb{Q}}$.

Il s'ensuit que dans le modèle de Black-Cox, la fonction de répartition du temps de défaut sous \mathbb{Q} pour tout instant $t \in [0, T]$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\tau < t) &= \mathbb{Q} \left[\min_{s \leq t} \left(\frac{W_s}{L(s)} \right) \leq 1 \right] \\ &= \mathbb{Q} \left(\min_{s \leq t} Y_s^{\mathbb{Q}} \leq 0 \right). \end{aligned}$$

Proposition 1

Loi conditionnelle du temps d'arrêt d'un mouvement brownien arithmétique ^a

Soient :

- $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, et $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$ des constantes,
- $Y_t = y_0 + \mu t + \sigma Z_t$ un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{P} et adapté à la filtration $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, et
- $M_t = \inf_{0 \leq s \leq t} Y_s$ le processus du minimum de $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Alors, $\forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^2 \mid s < t$ et $M_s \geq 0$,

$$\mathbb{P}(M_t \geq 0 \mid \mathcal{F}_s) = F(t, s),$$

où ^b

$$F(t, s) := \Phi \left(\frac{Y_s + \mu(t-s)}{\sigma \sqrt{t-s}} \right) - \exp \left(\frac{-2\mu Y_s}{\sigma^2} \right) \Phi \left(\frac{-Y_s + \mu(t-s)}{\sigma \sqrt{t-s}} \right).$$

a. Démontré à la section 1.3.1 de [Bielecki, Jeanblanc, et Rutkowski \(2016\)](#)

b. On reprend la définition $\Phi : x \mapsto \mathbb{P}(Z \leq x)$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Grâce à la Proposition 1 au-dessus,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\tau < t) &= 1 - \mathbb{Q} \left(\min_{s \leq t} Y_s^{\mathbb{Q}} > 0 \right) \quad \text{avec } d_0 > 0 \text{ si on suppose } \tau > 0 \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{d_0 + mt}{\sigma \sqrt{t}} \right) + \exp \left(\frac{-2md_0}{\sigma^2} \right) \Phi \left(\frac{-d_0 + mt}{\sigma \sqrt{t}} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{-d_0 - mt}{\sigma \sqrt{t}} \right) + \exp \left(\frac{-2md_0}{\sigma^2} \right) \Phi \left(\frac{-d_0 + mt}{\sigma \sqrt{t}} \right). \end{aligned}$$

Ce résultat peut être étendu à la probabilité conditionnelle du temps de défaut car

$$\begin{aligned} Y_t^{\mathbb{Q}} &= d_0 + mt + Z_t^{\mathbb{Q}} \\ &= \ln \left(\frac{W_t}{L(t)} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall (s, t) \in [0, T]^2 \mid s < \min(t, \tau)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\tau < t \mid \mathcal{F}_s) &= 1 - \Phi \left(\frac{Y_s^{\mathbb{Q}} + m(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) + \exp \left(\frac{-2mY_s^{\mathbb{Q}}}{\sigma^2} \right) \Phi \left(\frac{-Y_s^{\mathbb{Q}} + m(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{-\ln \frac{W_s}{L(s)} - m(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) + \exp \left(\frac{-2m \ln \frac{W_s}{L(s)}}{\sigma^2} \right) \Phi \left(\frac{-\ln \frac{W_s}{L(s)} + m(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{\ln \frac{L(s)}{W_s} - m(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) + \left(\frac{L(s)}{W_s} \right)^{\frac{2m}{\sigma^2}} \Phi \left(\frac{\ln \frac{L(s)}{W_s} + m(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}} \right). \end{aligned}$$

Proposition 2

Loi jointe d'un mouvement brownien arithmétique et son temps d'arrêt ^a

Soient :

- $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, et $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$ des constantes,
- $Y_t = y_0 + \mu t + \sigma Z_t$ un mouvement brownien sous la mesure \mathbb{P} et adapté à la filtration \mathbb{F} ,
- $M_t = \inf_{0 \leq s \leq t} Y_s$ le processus du minimum de $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, et
- $\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid Y_t \leq 0\}$.

Alors, $\forall (s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ et $\forall y \geq 0 \mid s < \min(t, \tau)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_t \geq y, \tau \geq t \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{P}(Y_t \geq y, M_t \geq 0 \mid \mathcal{F}_s) \\ &= G(y, t, s), \end{aligned}$$

où

$$G(y, t, s) = \Phi \left(\frac{-y + Y_s + \mu(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) - \exp \left(\frac{-2\mu Y_s}{\sigma^2} \right) \Phi \left(\frac{-y - Y_s + \mu(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}} \right).$$

^a. Démontré à la section 1.3.2 de [Bielecki et al. \(2016\)](#)

En particulier, cette proposition permet d'obtenir la loi jointe du temps d'arrêt avec la valeur de la société en posant $Y_t \leftarrow Y_t^{\mathbb{Q}}$ et $y \leftarrow \ln \frac{x}{L(t)} \forall x \geq L(t)$ étant donné $t \leq T$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_t > x, \tau \geq t \mid \mathcal{F}_s) &= \Phi \left(\frac{\ln \frac{W_s}{x} + (m+k)(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}} \right) - \\ &\quad \left(\frac{L(s)}{W_s} \right)^{\frac{2m}{\sigma^2}} \Phi \left(\frac{\ln L(s)^2 - \ln(xW_s) + (m+k)(t-s)}{\sigma\sqrt{t-s}} \right). \end{aligned}$$

Avec ces formules, il est possible d'expliciter les valeurs de D_t et E_t dans le modèle de Black-Cox.

À la maturité de la dette,

$$\begin{aligned}
 E_T &= (W_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \\
 &= \left(L(0)e^{kT} e^{Y_T^{\mathbb{Q}}} - K \right)^+ \mathbf{1}_{\{\min_{s \leq T} Y_s^{\mathbb{Q}} > 0\}} \\
 &= \left(Y_T^{\mathbb{Q}} - \ln \left[\frac{Ke^{-kT}}{L(0)} \right] \right)^+ \mathbf{1}_{\{\min_{s \leq T} Y_s^{\mathbb{Q}} > 0\}} \\
 &= \left(Y_T^{\mathbb{Q}} - \tilde{K} \right) \mathbf{1}_{\{Y_T^{\mathbb{Q}} > \tilde{K}, \min_{s \leq T} Y_s^{\mathbb{Q}} > 0\}} \quad \text{avec } \tilde{K} = \ln \left(\frac{Ke^{-kT}}{L(0)} \right) = \ln \frac{K}{K_0} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Ce flux correspond parfaitement au flux terminal d'un *call* européen barrière de type *down and out*, dont :

- le prix du sous-jacent à tout instant $t \in \mathbb{R}_+$ est donné par $Y_t^{\mathbb{Q}}$,
- la maturité est T ,
- le prix d'exercice est \tilde{K} , et
- le niveau de la barrière, en dessous de laquelle l'option d'achat est nulle, est donné par la valeur 0.

Ainsi, en absence d'opportunité d'arbitrage, E_t est égal au prix en date t d'une telle option d'achat exotique. Pour alléger la rédaction de cette résolution, notons

$$A = \left\{ Y_T^{\mathbb{Q}} > \tilde{K}, \min_{s \leq T} Y_s^{\mathbb{Q}} > 0 \right\}.$$

Étant donné que le prix est la valeur actuelle des flux futurs,

$$\begin{aligned}
 E_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} E_T \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[Y_T^{\mathbb{Q}} \mathbf{1}_A \mid \mathcal{F}_t \right] - \tilde{K} e^{-r(T-t)} \mathbb{Q}(A \mid \mathcal{F}_t) \\
 &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(Y_t^{\mathbb{Q}} + m(T-t) + \sigma(Z_T - Z_t) \right) \mathbf{1}_A \mid \mathcal{F}_t \right] - \tilde{K} e^{-r(T-t)} \mathbb{Q}(A \mid \mathcal{F}_t) \\
 &= e^{-r(T-t)} \mathbb{Q}(A \mid \mathcal{F}_t) \left[Y_t^{\mathbb{Q}} + m(T-t) - \tilde{K} \right] \quad \text{car } (Z_T - Z_t) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t \text{ et } \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Z_T - Z_t) = 0 \\
 &= e^{-r(T-t)} G(\tilde{K}, T, t) \left[\ln \left(\frac{K_0 W_t}{K L(t)} \right) + m(T-t) \right],
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } G(\tilde{K}, T, t) = \Phi \left(\frac{-\tilde{K} + \ln \frac{W_t}{L(t)} + m(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) - \left(\frac{L(t)}{W_t} \right)^{\frac{2m}{\sigma^2}} \Phi \left(\frac{-\tilde{K} + \ln \frac{L(t)}{W_t} + m(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \right).$$

Quand aux créanciers, la valeur de leur remboursement à la maturité est donnée par

$$D_T = K \mathbf{1}_{\{\tau > T, W_T \geq K\}} + W_T \mathbf{1}_{\{\tau > T, W_T < K\}} + L(\tau) \mathbf{1}_{\{\tau = T\}},$$

où les deux premiers termes correspondent au remboursement de dette dans le modèle de Merton et le troisième terme avec la fonction L intègre la définition du temps de défaut introduit par Black et Cox.

Par conséquent, dans le cas où $t < \tau$,

$$\begin{aligned}
 D_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-r(T-t)} D_T \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= K e^{-r(T-t)} \mathbb{Q}(W_T \geq K, \tau > T \mid \mathcal{F}_t) + e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[W_T \mathbf{1}_{\{W_T < K, \tau > T\}} \mid \mathcal{F}_t \right] + \\
 &\quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[L(\tau) e^{-r(\tau-t)} \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \right] \\
 &= K e^{-r(T-t)} \mathbb{Q}(W_T \geq K, \tau > T \mid \mathcal{F}_t) + W_t \left[1 - \mathbb{Q}(\tau \leq T \mid \mathcal{F}_t) - \mathbb{Q}(W_T \geq K, \tau > T \mid \mathcal{F}_t) \right] + \\
 &\quad \int_t^T L(s) e^{-r(s-t)} \frac{\partial}{\partial s} \left[\mathbb{Q}(\tau \leq s \mid \mathcal{F}_t) \right] ds.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, il convient de noter que ces formules issues du modèle de Black et Cox peuvent encore être généralisées afin d'incorporer un taux sans risque stochastique, le cas échéant. Une telle solution de forme fermée a été établie par [Briys et De Varenne \(1997\)](#).

Modèles à intensité du risque de crédit

L'autre approche fondamentale du risque de crédit, initiée aux années 1990, suppose que le défaut est un évènement exogène dont la survenance n'est plus prévisible à tout instant t . Cette approche, réalisée par exemple dans les travaux de [Jarrow et Turnbull \(1995\)](#), permet de définir le temps de défaut et sa loi sans nécessiter la modélisation de la valeur de la société. Par conséquent, ce type de modèle est aussi dénommé modèle « sous forme réduite » du risque de crédit, dont l'appréhension repose sur l'intensité de défaut.

Il est possible de démontrer que le processus qui définit l'intensité est connu dans le jargon financier comme le *spread* de crédit, soit l'écart de rentabilité par rapport au taux sans risque afin de compenser le risque de défaut de l'émetteur. Pour démontrer ce résultat fondamental, la forme générale d'un modèle à intensité est formellement développée.

Notons τ le temps de défaut qui sera défini par la suite sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$ de sorte que $\mathbb{Q}(\tau = 0) = 0$ et $\mathbb{Q}(\tau > t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Soient :

- $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus de comptage, soit un processus croissant dans \mathbb{N} avec $N_0 = 0$,
- $(H_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ le processus indicateur du défaut $H_t = \mathbf{1}_{[\tau, +\infty[}(t)$ dont la filtration naturelle est donnée par $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$,
- $(\lambda_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus adapté à une filtration de référence $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, et
- $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une filtration telle que $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \cup \mathcal{H}_t$.

Alors,

$$\tau := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid N_t > 0\},$$

définit un temps de défaut imprévisible d'intensité $(\lambda_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ si

- (i) le processus indicateur du défaut est donné par $H_t = N_{\min(t, \tau)} \forall t \in \mathbb{R}_+$ et
- (ii) le processus $M_t := H_t - \int_0^t \lambda_s \mathbf{1}_{\{s < \tau\}} ds$ est une \mathbb{F} -martingale.

Le processus d'intensité peut être interprété comme le taux instantané de défaut si cet évènement n'est pas encore survenu.

En effet, $\forall h > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(t < \tau \leq t+h \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{t+h} \lambda_s \mathbf{1}_{\{s < \tau\}} ds \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &\approx \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \lambda_t h \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

De façon équivalente,

$$\lambda_t = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \frac{\mathbb{Q}(t < \tau \leq t+h \mid \mathcal{F}_t)}{\mathbb{Q}(t < \tau \mid \mathcal{F}_t)}.$$

Lorsque l'intensité est une fonction déterministe du temps³, soit $\lambda(t) := \lambda_t$, il est possible de démontrer que le processus de comptage N_t dans la définition de τ correspond à un processus de Poisson non homogène. Étant donné que $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_0] &\implies \mathbb{Q}(\tau > t) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^t \lambda(s) \mathbf{1}_{\{s < \tau\}} ds \right] = 0 \\ &\implies \mathbb{Q}(\tau < t) = \int_0^t \lambda(s) \mathbb{Q}(\tau > s) ds \quad \text{par le théorème de Fubini} \\ &\implies \frac{d}{dt} [1 - \mathbb{Q}(\tau > t)] = \lambda(t) \mathbb{Q}(\tau > t) \\ &\implies \frac{1}{\mathbb{Q}(\tau > t)} \frac{d}{dt} [\mathbb{Q}(\tau > t)] = -\lambda(t) \\ &\implies \mathbb{Q}(\tau > t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda(s) ds \right). \end{aligned}$$

Ainsi, τ est de même loi que le temps d'arrivée de la première occurrence d'un processus de Poisson non homogène d'intensité $\lambda(t)$.

Une définition identique, appelée construction canonique de τ , est donc

$$\tau := \inf \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \mid \int_0^t \lambda(s) ds \geq E \right\},$$

où E est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 qui est indépendante de \mathbb{G} .⁴ Lorsque le processus d'intensité est stochastique, le processus de comptage N_t est un processus de Cox, connu également sous le nom de processus de Poisson doublement stochastique.

Proposition 3

Loi conditionnelle du temps de défaut dans un modèle sous forme réduite

Soient $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2 \mid s < t$. Alors,

$$\begin{aligned} i) \quad \mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbf{1}_{\{s < \tau\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_s^t \lambda_u du \right) \mid \mathcal{G}_s \right] \text{ et} \\ ii) \quad \mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{G}_s) &= \mathbb{Q}(\tau > s) = \exp \left(- \int_0^s \lambda_u du \right). \end{aligned}$$

La proposition ci-dessus est une conséquence directe de la loi de τ si le processus d'intensité est déterministe.

3. Dans ce cas, il convient de noter que $G_t = \{\emptyset, \Omega\}$ (souvent appelé tribu triviale), et donc $\mathcal{F}_t = \mathcal{H}_t \forall t \in \mathbb{R}_+$
 4. C'est-à-dire, $\mathbb{Q}(E > x) = e^{-x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} + \mathbf{1}_{\{x < 0\}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Si le processus d'intensité est stochastique, il suffit d'utiliser la propriété⁵ que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[Y \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[Y \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mid \mathcal{G}_t \right]}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{G}_t)},$$

pour toute variable aléatoire Y intégrable afin d'établir le i) de la [Proposition 3](#). Le ii) de la [Proposition 3](#) découle directement de la construction canonique du temps de défaut.

À l'aide de ces résultats, il est possible de fournir une formule générale de la valeur de dette dans un modèle à intensité.

Supposons l'existence d'une obligation zéro-coupon de nominal K et de maturité T qui correspond à la dette de la société. On considère de surcroît que le taux court de rendement sans risque est donné par un processus $(r(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ adapté à la filtration \mathbb{G} .

Alors, lorsque aucun recouvrement n'est possible en cas de défaut, la valeur de la dette à tout instant $t \in [0, T]$ est donnée par

$$\begin{aligned} D_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) K \mathbf{1}_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= K \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mathbf{1}_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{G}_t \right]}{\mathbb{Q}(\tau > t \mid \mathcal{G}_t)} \\ &= K \exp \left(\int_0^t \lambda_s ds \right) \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mathbf{1}_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{G}_T \right] \mid \mathcal{G}_t \right], \end{aligned}$$

car la tribu $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{G}_T$.

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mathbf{1}_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{G}_T \right] &= \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \mathbb{Q}(\tau > T \mid \mathcal{G}_T) \\ &= \exp \left(- \int_t^T (r_s + \lambda_s) ds \right) \exp \left(- \int_0^t \lambda_s ds \right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} D_t &= K \exp \left(\int_0^t \lambda_s ds \right) \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T (r_s + \lambda_s) ds \right) \exp \left(- \int_0^t \lambda_s ds \right) \mid \mathcal{G}_t \right] \\ &= K \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T (r_s + \lambda_s) ds \right) \mid \mathcal{G}_t \right]. \end{aligned}$$

Cette formule illustre que dans un modèle à intensité, l'évaluation d'une obligation avec risque de défaut est analogue à l'évaluation d'une obligation sans défaut. En effet, le prix d'une obligation zéro-coupon risquée est donnée par l'actualisation du flux terminal K au taux sans risque augmenté du processus d'intensité. De ce fait, le processus $(\lambda_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est assimilable au *spread* de crédit de l'émetteur.

5. Cette propriété est détaillée à la section 3.1.1. de [Bielecki et al. \(2016\)](#)

Il convient de noter que la notion de *spread* de crédit peut toujours s'appliquer lorsque le taux de recouvrement en cas de défaut est non nul. Notamment, [Lando \(1998\)](#) a établi un modèle à intensité où les créanciers récupèrent une fraction $R_t \in [0, 1]$ du prix en absence d'opportunité d'arbitrage de l'obligation immédiatement avant le défaut si cet évènement survient à l'instant t . Lorsque le processus du taux de recouvrement $(R_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est adapté à la filtration \mathbb{G} , la formule suivante donne la valeur de la dette à tout instant $t \in [0, T]$:

$$D_t = K \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T (r_s + \lambda_s [1 - R_s]) ds \right) \mid \mathcal{G}_t \right].$$

En effet, le terme $\lambda_s [1 - R_s]$ agit comme *spread* de crédit, parfois appelé *short spread*, qui pourrait être modélisé par un seul processus si ce terme est stochastique.

2.1.2 Capitaux propres

Les capitaux propres sont la part du patrimoine d'une entreprise qui appartient aux actionnaires. Ils correspondent à la différence entre l'actif et le passif du bilan comptable. L'actif représente les biens et les droits détenus par l'entreprise, tels que les immobilisations, les stocks, les créances ou la trésorerie. Le passif représente les dettes et les obligations de l'entreprise envers les tiers, tels que les fournisseurs, les banques, les salariés ou l'État. Les capitaux propres mesurent donc la valeur nette de l'entreprise et sa capacité à financer ses investissements sans recourir à l'endettement.

Les capitaux propres se composent de nombreux éléments comptables, dont :

- Le capital social, qui est la somme des apports en numéraire ou en nature effectués par les actionnaires lors de la création ou de l'augmentation de capital de l'entreprise.
- Les réserves, qui sont des sommes mises en réserve par l'entreprise pour faire face à des besoins futurs ou pour financer des investissements. Elles proviennent principalement des bénéfices non distribués aux actionnaires.
- Le report à nouveau, qui est le solde positif ou négatif des résultats antérieurs non affectés aux réserves ou au capital.
- Le résultat net de l'exercice, qui est le bénéfice ou la perte réalisé par l'entreprise sur une période donnée.

Dans le cadre de ce mémoire, les capitaux propres seront représentés uniquement par les actions et les plans de paiements fondés sur les actions. Notamment, les actions peuvent être de classes variées, comme ce sera évoqué dans la [sous-section 2.2.1](#).

2.1.3 Plans de paiements fondés sur les actions

Les plans de paiements fondés sur les actions sont des instruments de capitaux propres ; toutefois, ils sont à distinguer car ceux-ci doivent être évalués de façon séparée conformément à la norme IFRS 2.

De façon générale, l'actionnariat salarié est un ensemble de dispositifs qui vise à associer durablement les salariés, mais pas uniquement, d'une entreprise cotée ou non, à son capital. L'actionnariat salarié a fait l'objet de nombreuses études académiques, à l'instar des travaux de Fenn et Liang (2001) qui soulignent que les incitations managériales sous forme d'actions ont le potentiel de contribuer à aligner les incitations des managers et des actionnaires. Par ailleurs, les travaux de Elouadi (2015) mettent en lumière que l'actionnariat salarié direct contribue à diminuer significativement l'intention de départ et que l'implication organisationnelle et la satisfaction au travail sont augmentées avec l'octroi d'actions aux salariés.

L'actionnariat salarié, régi comptablement par la norme IFRS 2 « Paiement fondé sur des actions » permet, de façon synthétique, une convergence des motivations vers des objectifs stratégiques communs, prédéfinis et transparents. Dans la suite, une analyse est présentée pour les principaux dispositifs dont le droit d'accès au capital est différé, notamment pour les plans :

- d'attribution gratuites d'actions (AGA),
- de *stock-options*,
- de bons de souscription de parts de créateur d'entreprise (BSPCE) et
- de bons de souscription d'actions (BSA),

afin d'apporter un éclairage sur les spécificités de chaque support.

Attribution gratuite d'actions (AGA)

Régi par l'article L225-197-1 et suivants du Code de commerce, ce type de véhicule peut être utilisé uniquement par les sociétés par actions, qu'elles soient cotées ou non. L'assemblée générale extraordinaire permet au conseil d'administration d'attribuer, selon un régime fiscal et social favorable, sous certaines conditions et dans certaines limites, des actions gratuites à leurs salariés et mandataires sociaux (président du conseil d'administration, directeur général, directeurs généraux délégués, membres du directoire ou gérant d'une société par actions) ou à ceux des sociétés qui leur sont liées. En effet, l'article L.225-197-1 du Code de commerce autorise l'attribution au profit de certaines catégories de salariés qui sont identifiées par la direction. Ce sont également ces organes dirigeants qui fixent les conditions et les éventuels critères d'attribution des actions (art.L.225-197-1, I).

Pour les actions gratuites attribuées sur autorisation de l'assemblée générale extraordinaire intervenue à compter du 8 août 2015, la période d'acquisition ne peut pas être inférieure à un an. Aussi, l'assemblée générale extraordinaire n'est plus tenue de fixer une période de conservation, qui court à compter de l'attribution définitive des actions. Toutefois, la durée cumulée des périodes d'acquisition et de conservation des actions ne peut pas être inférieure à 2 ans.

Il est à noter que la période de conservation, aussi appelée période d'incessibilité ou clause de *lock-up*, induit potentiellement une décote sur la juste valeur de l'action.

Selon l'URSSAF, les attributions gratuites d'actions sont exclues de l'assiette des cotisations de Sécurité sociale, de la CSG et de la CRDS, mais entraînent pour l'employeur le versement d'une cotisation patronale. Depuis le 1er janvier 2018, le taux de cette contribution est de 20% de la valeur, à la date d'acquisition, des actions attribuées. La prise en compte de la date d'acquisition signifie d'une part que la période d'incessibilité est ignorée par l'URSSAF et d'autre part que, si le cas se présente, il convient d'étaler le coût de la contribution patronale lié à chaque tranche d'acquisition sur sa période associée. Il est également précisé par l'URSSAF que les PME qui occupent moins de 250 personnes, dont le chiffre d'affaires annuel n'excède pas 50 millions d'euros ou dont le total du bilan annuel n'excède pas 43 millions, et qui n'ont pas distribué de dividendes, sont exonérées de la contribution patronale, dans la limite, pour chaque salarié, du montant annuel du plafond de la Sécurité sociale.

Stock-Options

L'attribution de *stock-options*, aussi appelées options de souscription ou d'achat d'actions est régie par l'article L225-177 du Code de commerce. Les différences entre les dénominations traduisent les caractéristiques des actions sous-jacentes. Dans le cas d'options de souscription, le bénéficiaire achète des actions nouvelles tandis que les actions sont déjà existantes dans le cas d'option d'achat d'action.

En synthèse, l'article L225-177 du Code de commerce indique que le conseil d'administration, sous réserve d'autorisation de l'assemblée générale extraordinaire, peut attribuer des options donnant le droit à la souscription d'actions au bénéfice de tout ou partie des membres du personnel salarié à un prix de souscription (également appelé prix d'exercice des options) fixé définitivement le jour où les options sont consenties (cette date correspond à la date d'attribution). Notons au passage que l'article précité précise également que la fixation des conditions dans lesquelles seront consenties les options (par exemple, les clauses d'incessibilité, les salariés concernés ou encore les critères d'attribution) est une responsabilité qui incombe au conseil d'administration. Certaines conditions sont néanmoins encadrées, comme la période d'incessibilité qui ne peut pas excéder trois ans à compter de la date de levée des options ou encore le fait que les héritiers d'un bénéficiaire décédé puissent exercer l'option dans un délai de six mois à compter du décès.

Ce prix d'exercice est explicitement bordé par le texte légal, qui distingue le cas où l'action sur laquelle est adossée l'option est admise aux négociations sur un marché réglementé – c'est-à-dire les actions cotés, des actions non-cotés. Dans le cas des actions cotées, l'article indique exactement que

le prix de souscription ne peut pas être inférieur à 80% de la moyenne des cours cotés aux vingt séances de bourse

précédent la date d'attribution, les valeurs retenues étant bien souvent celles à la clôture, éventuellement ajustées. L'inclusion de cet éventuel rabais a des effets fiscaux pour le bénéficiaire, non détaillés ici.

Concernant les actions non-cotées, l'article perd en précision puisqu'il indique que

le prix de souscription est déterminé conformément aux méthodes objectives retenues en matière d'évaluation d'actions en tenant compte, selon une pondération appropriée à chaque cas, de la situation nette comptable, de la rentabilité et des perspectives d'activité de l'entreprise. Ces critères sont appréciés le cas échéant sur une base consolidée ou, à défaut, en tenant compte des éléments financiers issus des filiales significatives.

Il résulte de cette disposition que la situation la plus courante est de retenir un prix d'exercice égal à la valeur du titre sur lequel l'option est adossée.

Bons de Souscription de Parts de Créateur d'Entreprise (BSPCE)

Ce véhicule s'adresse avant tout aux *start-ups* et aux entreprises en phase de croissance, dont la plupart sont des sociétés non cotées. Comme l'indique l'article 163 bis G du Code général des impôts, les sociétés éligibles à l'émission de BSPCE sont, pour ne reprendre que les principaux critères, les sociétés par actions non cotées, ou alors cotées sur un marché réglementé mais dont la capitalisation boursière ne dépasse pas 150 millions d'euros, immatriculées au registre du commerce et des sociétés depuis moins de 15 ans et soumises à l'impôt sur les sociétés en France. Lorsqu'elles remplissent ces conditions, l'article 163 bis G du Code général des impôts indique que les sociétés peuvent attribuer, sous réserve d'autorisation de l'assemblée générale extraordinaire,

des bons incessibles à leurs salariés, à leurs dirigeants soumis au régime fiscal des salariés et aux membres de leur conseil d'administration, de leur conseil de surveillance ou, en ce qui concerne les sociétés par actions simplifiées, de tout organe statutaire équivalent.

Lorsque la société émettrice dépasse le seuil de capitalisation boursière de 150 millions d'euros mais qu'elle remplit l'ensemble des autres conditions, alors une dérogation indique qu'elle peut continuer à attribuer des bons pendant les trois ans qui suivent la date de ce dépassement. Ainsi, comme les AGA et les *stock-options*, les BSPCE ne peuvent pas être attribués à des tiers de l'entreprise.

A la manière des *stock-options*, un BSPCE permet à son détenteur de souscrire à des titres de la société émettrice selon des conditions préétablies, comme la durée d'acquisition des droits (souvent étalée par tranches afin de maximiser l'effet de fidélisation), les conditions d'atteinte d'objectifs particuliers mais surtout le prix d'exercice. Le prix d'exercice, ou prix de souscription, est le prix prédéfini auquel le bénéficiaire pourra acheter les actions. Le prix d'exercice est explicitement encadré par l'article 163 bis G du Code général des impôts. En effet, celui-ci indique que

il est au moins égal, lorsque la société émettrice a procédé dans les six mois précédant l'attribution du bon à une augmentation de capital par émission de titres conférant des droits équivalents à ceux résultant de l'exercice du bon, au prix d'émission des titres concernés alors fixé, diminué le cas échéant d'une décote correspondant à la perte de valeur économique du titre depuis cette émission.

Contrairement à l'émission de *stock-options* ou d'actions gratuites, l'émission de BSPCE n'entraîne le paiement d'aucune contribution patronale, ce qui renforce son rôle de véhicule d'accompagnement de croissance.

Bons de souscription d'action (BSA)

Le format financier des BSA est semblable à ceux des *stock-options* et des BSPCE puisqu'ils permettent à un détenteur d'acquérir des actions de la société à un prix déterminé. En tant que valeur mobilière au sens des articles L211-1 et L211-2 du Code monétaire et financier, les BSA peuvent être émis par des sociétés par actions cotées ou non, et sont régis par les articles L228-91 et suivants du Code de commerce. En particulier, le statut de valeur mobilière lui confère deux propriétés que les autres véhicules d'actionnariat ne vérifient pas : les BSA sont librement cessibles dès leur émission - sauf mention contraire de la part du conseil d'administration - et les BSA peuvent être attribués à des tiers de la société. Cette spécificité fait des BSA le véhicule préféré des *start-ups* pour inclure leurs investisseurs, conseils ou autres partenaires dans le potentiel de croissance de la société.

Comme pour les AGA, *stock-options* et BSPCE, l'attribution des BSA peut être conditionnée à des critères internes et externes. A l'instar du prix d'exercice des *stock-options* pour les sociétés non cotées, il existe un flou sur la fixation du prix d'exercice. En effet, si le prix peut être fixé librement, celui-ci doit néanmoins être cohérent avec la valeur réelle de l'action sous-jacente, sous peine de requalification fiscal en salaire déguisé. L'arrêt n°17-24470 rendu par la Cour de cassation illustre parfaitement cette requalification puisqu'il considère que

dès lors que les bons de souscription d'actions sont proposés aux salariés en contre-partie ou à l'occasion du travail et acquis par ceux-ci à des conditions préférentielles, ils constituent un avantage qui entre dans l'assiette des cotisations sociales.

Par conséquent, si l'adéquation entre le prix d'exercice et la valeur de l'action peut être contrôlée en ayant recours à des techniques de valorisation spécifiques, il convient en parallèle, voire en amont, de veiller à ce que les conditions d'attribution ne puissent pas être qualifiées de « préférentielles ».

2.2 Éléments caractéristiques des sociétés non cotées

2.2.1 Actions privilégiées

De façon générale, les entreprises n'ayant pas encore pu débiter sur le marché boursier offrent de nombreux droits supplémentaires avec des actions dites privilégiées (ou *preferred stock* en anglais qui domine le jargon financier) pour susciter l'investissement. Ces droits peuvent concerner non seulement la gestion et l'opération de l'entreprise, mais également des avantages économiques qui sont plus facilement quantifiables. Le fonctionnement de ces instruments est bien explicité par l'*American Institute of Certified Public Accountants (AICPA)*.

Fonctionnement

Le droit économique le plus souvent accordé est appelé le privilège de liquidation (*liquidation preference* en anglais). Ceci correspond au paiement prioritaire de liquidité jusqu'à un montant fixe et défini au préalable lors d'un évènement qui induit la vente des titres, tel qu'une acquisition ou fusion. Lorsque ce privilège est offert, l'intégralité de la somme redevable aux actionnaires avec privilège de liquidation doit être distribuée avant que tout détenteur des actions non privilégiées – par convention appelées actions ordinaires (ou *common stock*) – soit remboursé.

En plus de ce privilège, les titres sont généralement assortis d'un droit de conversion, qui permet d'échanger une action privilégiée pour un nombre prédéfini d'actions ordinaires. Ce droit est propice car la valeur d'une action privilégiée non-convertible est presque toujours plafonnée, tandis qu'une telle limite n'existe pas pour les actions ordinaires. La seule exception est dans le cas des actions privilégiées avec participation (*participating preferred stock*) qui ont une valeur potentiellement infinie sans conversion.

En effet, la plupart des actions privilégiées émises par les entreprises sont sans participation. Le point notable sur ces actions est que l'actionnaire a un choix mutuellement exclusif entre jouir de son privilège de liquidation et jouir de la richesse des fonds propres au prorata de ses actions. Par conséquent, un actionnaire rationnel convertira ses actions privilégiées uniquement dès lors que sa quote-part potentielle d'actions ordinaires sera devenue plus rentable.

Ainsi, la valeur des actions ordinaires dépend de la richesse de l'entreprise, soit sa valeur marchande, et des privilèges de liquidation accordés. Ces éléments sont essentiels pour modéliser le comportement des actionnaires privilégiés et, par la suite, valoriser toutes les actions de l'entreprise.

Hiérarchie entre les actionnaires

Il faut également tenir compte du fait que les actions privilégiées ne peuvent pas être traitées toutes ensemble comme les actions ordinaires. En l'occurrence, les investisseurs ayant droit au privilège de liquidation ne sont pas forcément prioritaires au même niveau. L'ordre hiérarchique d'un actionnaire privilégié pour être remboursé au cas d'un évènement de liquidation est résumé par le terme anglo-saxon *seniority*.

En général, cet ordre est déterminé par la temporalité de la distribution des actions, où les actions privilégiées émises les plus récemment se situent au sommet de la hiérarchie et leurs actionnaires seront remboursés en premier. Dans une large mesure, les sommes requises par une entreprise à chaque tour d'investissement accroissent de façon nette en même temps que l'entreprise élargit de plus en plus l'échelle de ses activités. Il n'est donc pas étonnant que les derniers investisseurs, capables de prêter les sommes les plus importantes sans l'intermédiaire du marché boursier, soient des firmes de venture capital dont le remboursement est prioritaire aux autres.

Il en résulte que les premières actions privilégiées distribuées – portant la référence *Series Seed* – sont remboursées après les actions privilégiées d'un deuxième tour de distribution – portant la référence *Series A*. Dans le cas de tours d'investissement ultérieurs, les références *Series B* pour le troisième tour, *Series C* pour le quatrième tour, etc. sont aussi appliquées comme convention.

Toutefois, un ordre hiérarchique déterminé par le temps d'investissement n'est pas une règle fixe, d'où la déclaration systématique du *seniority* des actions privilégiées lors de leur distribution. Une exception suffisamment fréquente pour gagner sa propre appellation est le cas de *pari passu*, qui dénote un *seniority* équivalent entre plusieurs classes d'actions privilégiées. En effet, les actionnaires privilégiés avec *pari passu* sont toujours remboursés ensemble, mais au prorata de leur privilège de liquidation au lieu d'un remboursement typique au prorata du nombre d'actions.

2.2.2 Obligations convertibles

Une obligation convertible est un produit hybride avec une composante d'obligation classique et une composante ayant le profil d'une option d'achat. Le détenteur d'une obligation convertible a la possibilité d'échanger son obligation contre un nombre prédéterminé d'actions (indiqué par le ratio de conversion) de la société émettrice à certaines périodes de la vie de l'obligation. La valeur des actions reçues par l'investisseur en cas de conversion d'une obligation convertible est appelée la parité.

La valeur de l'obligation convertible est au moins égale à la valeur d'une de ses composantes. La partie obligataire sert donc de plancher en cas de chute du cours du sous-jacent, en supposant que le *rating* de crédit de l'émetteur ne se dégrade pas. Cependant, le coupon d'une obligation convertible est inférieur à celui d'une obligation classique de mêmes caractéristiques pour compenser la valeur de l'option de conversion.

Une obligation convertible peut également inclure différentes clauses favorisant le souscripteur ou l'émetteur, tel que le remboursement anticipé de l'obligation à un prix spécifié si la parité dépasse un seuil (ce qui favorise l'émetteur).

Paramètres

Les paramètres qui caractérisent une obligation convertible donnée sont des paramètres de type obligataire ou de type optionnel : certains sont fixés par les conditions de marché tandis que d'autres sont des caractéristiques intrinsèques du produit, fixées par la société émettrice.

Les paramètres fixés par la société émettrice de l'obligation sont les suivants :

- Le nominal, soit la valeur faciale de l'obligation convertible. Le prix d'émission d'une obligation convertible est généralement exprimé en pourcentage de cette valeur faciale.
- La maturité, soit la date à laquelle l'émetteur s'est engagé à rembourser le porteur de l'obligation en cas de non conversion.
- Le prix de remboursement, soit le montant que l'investisseur recevra en liquidité si l'option de conversion n'est pas exercée à la maturité. Ce montant est exprimé en pourcentage du nominal.
- Les coupons, soient les paiements d'intérêt de l'obligation, exprimés en fonction du nominal. Ces paiements dans une large mesure représentent un taux d'intérêt fixe du nominal.
- Le ratio de conversion, soit le nombre d'actions sous-jacentes que l'investisseur reçoit par obligation convertible en cas de conversion.
- La provision de *call*, soit une clause avec des modalités supplémentaires au sujet du prix de remboursement qui permettent l'émetteur de rembourser le porteur de l'obligation convertible avant la maturité. Du point de vue de l'émetteur, il s'agit du droit de racheter l'obligation convertible à un prix d'exercice déterminé, d'où la mise en rapport avec un *call* américain.

Lorsque cette provision est exercée, le porteur dispose d'un délai bien précisé pour soit accepter le remboursement prématuré soit de tirer profit de l'option de conversion. Ce délai est souvent appelé le délai de préavis du *call*.

Les paramètres fixés par les conditions de marché les suivants :

- Le taux sans risque, soit le taux d'intérêt d'un emprunteur sûr, dont la rentabilité est certaine sur la vie de l'obligation convertible.
- Le *spread* de crédit de l'émetteur, soit l'écart de rentabilité évoqué à la [sous-section 2.1.1 pour les modèles à intensité](#). Cet écart, en dehors du contexte d'un modèle mathématique, est traduit par le *rating* de crédit de l'émetteur qui est attribué par une agence de notation financière.
- Le plancher obligataire, soit la valeur actuelle des flux de coupons et du remboursement final. L'actualisation des flux est faite au taux⁶ qui serait appliqué à l'émetteur si l'obligation ne comprenait pas une option de conversion.
- La valeur optionnelle, soit la différence entre la valeur de l'obligation convertible et le plancher obligataire, ce qui correspond à la valeur de l'option d'achat incluse dans l'obligation convertible.
- La parité, soit le cours de l'action sous-jacente multiplié par le ratio de conversion.

Elle est exprimée au même format et en même devise que le prix de l'obligation convertible.

6. En général, ce taux est égal au taux sans risque augmenté du *spread* de crédit de l'émetteur.

En d'autres termes, la parité correspond à la valeur des actions sous-jacentes à une obligation convertible. Il s'agit donc de la variable clés du produit qui détermine le choix de conversion.

- La prime de conversion, soit la différence entre le prix de l'obligation convertible et la parité, exprimée en pourcentage de la parité. Plus cette prime est faible, plus la valeur de l'obligation convertible est sensible aux variations du cours de l'action sous-jacente.

Valorisation simple

Très fréquemment, le modèle d'évaluation des obligations convertibles utilise l'arbre binomial pour décrire l'évolution de prix de l'action, suivant la méthodologie de [Cox, Ross, et Rubinstein \(1979\)](#). L'horizon temporel de l'arbre est la maturité de l'obligation convertible, et à chaque nœud, l'action sous-jacente peut soit augmenter soit baisser de proportions u et d respectivement. Ces proportions sont choisies de sorte que le rendement espéré de l'action coïncide avec le taux *forward* (taux sans risque pertinent pour le nœud) observé sur le marché et de sorte que la volatilité de l'action soit égale à un paramètre fixé pour la modélisation.

Sachant les valeurs possibles de l'action sous-jacente, la valeur de l'obligation convertible peut donc être calculée en tenant compte de l'option de conversion à la maturité. Par induction arrière et en utilisant les probabilités risque-neutre, [Bardhan, Bergier, Derman, Dosembet, et Kani \(1994\)](#) proposent de tester l'optimalité de conversion sur chacun des nœuds jusqu'à déduire la valeur de l'obligation convertible.

Il est remarquable que le choix de conversion joue sur le taux d'actualisation utilisé pour les flux futurs. L'actualisation est généralement faite selon la démarche de [Tsiveriotis et Fernandes \(1998\)](#). En effet, à chaud nœud, l'obligation convertible est décomposée en une partie obligataire et une partie optionnelle afin d'utiliser une actualisation au taux dit « risqué » (augmenté du *spread* de l'émetteur) et au taux sans risque respectivement des deux parties. La somme des deux parties actualisées constitue la valeur actualisée de l'obligation convertible au nœud.

2.3 Analyse en cascade — "Waterfall Analysis"

L'ensemble des éléments de passif détenus par les actionnaires d'une société et par les prêteurs de crédit à cette société existent dans une hiérarchie. En effet, dans l'évènement de liquidation de la société, le remboursement de certains éléments de passif est prioritaire aux autres.

L'analyse de la répartition de richesse entre tous les membres qui détiennent les passifs d'une société a été popularisé dans les oeuvres de *venture capital*, telle que celui de Carver (2011), sous le nom anglo-saxon : *Waterfall Analysis*, soit une analyse en cascade. De façon synthétique, cette analyse illustre précisément la façon dont plus la valeur d'une société est importante, plus les porteurs de passifs participent dans sa richesse.

2.3.1 Intervalles de répartition à proportions fixes

Les proportions d'allocation de richesse entre tous les porteurs du passif varient selon la valeur des actifs de la société. Néanmoins, il existe toujours une étendue de valeurs d'actifs pour laquelle les proportions d'allocation de richesse sont invariantes. Une telle étendue maximale est appelée une *tranche* par les anglo-saxons dans la méthode du *waterfall*.

Il s'ensuit que toutes les valeurs possibles d'une société peuvent être regroupées en *tranches*. De surcroît, les valeurs ponctuelles qui séparent deux tranches adjacentes sont communément appelés des *breakpoints* étant donnée la discontinuité du vecteur. Conformément à sa traduction littérale, ces points de cassure décrivent les valeurs d'entreprise auxquelles le vecteur des proportions d'allocation de richesse change de façon discontinue. Avec cette définition, il convient de remarquer qu'une valeur nulle de la société sera toujours un *breakpoint* trivial, quelle que soit la décomposition des fonds propres.

Exemple de calcul des *breakpoints* et des *tranches*

Afin d'illustrer le calcul de l'ensemble des *breakpoints*, considérons la structure de capital présentée dans la Table 2.1⁷ ci-dessous.

| Classe d'actions | Nombre d'actions | Privilège de liquidation (€) |
|--------------------------|------------------|------------------------------|
| Series A | 73 884 | 285,02 |
| Series Seed I | 14 033 | 171,56 |
| Series Seed II | 8 967 | 220,98 |
| Ordinaire | 50 501 | — |
| <i>Sous-total</i> | 147 385 | — |
| Instruments dilutifs | Nombre d'options | Prix d'exercice |
| Options d'achat I | 3 662 | 171,56 |
| Options d'achat II | 8 075 | 285,02 |
| <i>Sous-total</i> | 11 737 | — |
| TOTAL | 159 122 | — |

TABLE 2.1 – Structure de capital

7. Toutes les actions privilégiées et options d'achat sont convertibles avec une parité 1 :1

Plusieurs points importants devraient être précisés en supplément de la [Table 2.1](#). Premièrement, on remarque l'existence de deux classes d'actions privilégiées qui, malgré une différence en privilège de liquidation et en nombre, portent toutes les deux la référence *Series Seed*. En l'occurrence, il s'agit d'un cas de *pari passu* où le client a émis deux types d'actions privilégiées distincts tout en leur accordant le même *seniority*. Ainsi, les actionnaires *Series Seed* jouiront de leur privilège de liquidation ensemble, mais il faut souligner qu'ils ne convertiront pas leurs actions aux mêmes moments.

En deuxième lieu, on aperçoit l'inclusion d'options d'achats dans la structure de fonds propres. Ces options sont toutes de style européen, de maturités au moins égales à 5 ans et elles opèrent sur la juste valeur d'une action ordinaire comme actif sous-jacent. Or, l'action ordinaire est la dernière classe d'action à dépasser une valeur nulle comme déjà constaté. Par voie de conséquence, les options d'achat se situent au dernier rang de *seniority*. Dans la dernière *tranche* qui est déterminée grâce à l'analyse en cascade, quelle que soit la structure des fonds propres, toutes les classes de titres compris dans les capitaux propres participent à la valeur d'entreprise au prorata des actions ordinaires pleinement diluées.

Pour le premier *breakpoint* Les actions privilégiées *Series A*, ayant le *seniority* le plus important dans l'entreprise, ont l'avantage d'être la première classe à tout paiement en évènement de liquidité. Ainsi, les actionnaires de cette classe recevront 100% de la valeur de l'entreprise jusqu'à ce que le privilège de liquidation de chaque action *Series A* soit épuisé.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Breakpoint 1} &= \text{Nombre d'actions } \textit{Series A} \times \text{Privilège de liquidation par action} \\ &= 73\,884 \times 285,02 \text{ €} \\ &= 21\,058\,417,68 \text{ €}. \end{aligned}$$

En d'autres termes, une juste valeur de l'entreprise entre 0 et ce premier *breakpoint* correspond à la première *tranche*, où 100% de la richesse est allouée aux actions *Series A*.

Pour le deuxième *breakpoint* Une fois que le privilège de liquidation de toute la classe *Series A* est épuisé, la valeur restante de l'entreprise est ensuite utilisée pour satisfaire le privilège de la classe *Series Seed*. Mathématiquement,

$$\begin{aligned} \text{Privilège de liquidation } \textit{Series Seed} &= \text{Privilège } \textit{Series Seed I} + \text{Privilège } \textit{Series Seed II} \\ &= (14\,033 \times 171,56 \text{ €}) + (8\,967 \times 220,98 \text{ €}) \\ &= 4\,389\,029,14 \text{ €}. \end{aligned}$$

Donc, pour respecter l'ordre hiérarchique dans l'allocation de richesse,

$$\begin{aligned} \text{Breakpoint 2} &= \text{Privilège de liquidation } \textit{Series Seed} + \text{Breakpoint 1} \\ &= 25\,447\,446,82 \text{ €}. \end{aligned}$$

La deuxième *tranche* est donc donnée par l'intervalle entre le premier et le deuxième *breakpoint*. Dans cette tranche, l'allocation de richesse est dans les proportions de :

- $\frac{14\,033 \times 171,56 \text{ €}}{4\,389\,029,14 \text{ €}} \approx 54,85\%$ aux actionnaires *Series Seed I*,
- $\frac{8\,967 \times 220,98 \text{ €}}{4\,389\,029,14 \text{ €}} \approx 45,15\%$ aux actionnaires *Series Seed II*, et
- 0% aux porteurs des autres titres.

Pour le troisième *breakpoint* Si la valeur de l'entreprise dépasse le deuxième *breakpoint*, le privilège de liquidation de toutes les actions concernées est satisfait. Alors, étant donnée l'émission de ces actions privilégiées sans participation, toute valeur de l'entreprise au-delà de 25 447 446,82 € sera allouée uniquement aux actions ordinaires.

Ceci est le cas jusqu'à ce que au moins un des deux évènements suivants ait lieu :

- (i) Des actions privilégiées sont converties en actions ordinaires.
- (ii) Des options d'achat sont dans la monnaie.

Autrement dit, il suffit que la valeur d'une action ordinaire dépasse l'un des trois privilèges de liquidation ou l'un des deux prix d'exercice des options. Il se trouve que la plus faible valeur d'action ordinaire qui satisfait ce critère — soit 171,56 € — entraînera simultanément la conversion des 14 033 actions privilégiées *Series Seed I* et l'exercice des 3 662 options d'achats I.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Breakpoint 3} &= \text{Nombre d'actions ordinaires} \times 171,56 \text{ €} + \text{Breakpoint 2} \\ &= 50\,501 \times 171,56 \text{ €} + 25\,447\,446,82 \text{ €} \\ &= 34\,111\,398,38 \text{ €}. \end{aligned}$$

Pour l'intervalle entre le deuxième *breakpoint* et ce troisième *breakpoint*, ce qui correspond à la troisième *tranche*, 100% de la richesse est alloué aux actionnaires ordinaires.

Pour le quatrième *breakpoint* Le nombre dilué d'actions ordinaires comprend non seulement les actions ordinaires initialement émises, mais également les actions ordinaires suites aux conversions de titres et l'exercice d'options. Par conséquent, dès lors que la valeur totale de l'entreprise est supérieure à 34 111 398,38 €, le nombre dilué d'actions ordinaires passe de 50 501 à 68 196.

En tenant compte de ce fait, le quatrième *breakpoint* coïncide avec la dernière valeur de l'entreprise telle que le nombre dilué d'actions ordinaires reste à 68 196. Il s'agit donc de la valeur d'entreprise où une action ordinaire vaut 220,98 €, qui est le prix à partir duquel les actions *Series Seed II* seront converties.

En effet,

$$\begin{aligned} \text{Breakpoint 4} &= 68\,196 \times (220,98 \text{ €} - 171,56 \text{ €}) + 34\,111\,398,38 \text{ €} \\ &= 37\,481\,644,70 \text{ €}. \end{aligned}$$

L'allocation de richesse dans la quatrième *tranche* est au prorata du nombre dilué d'actions ordinaires, soit :

- $\frac{14\,033}{68\,196} \approx 20,58\%$ aux actionnaires *Series Seed I*,
- $\frac{50\,501}{68\,196} \approx 74,05\%$ aux actionnaires ordinaires, et
- $\frac{3\,662}{68\,196} \approx 5,37\%$ aux porteurs des options d'achat I.

Pour le cinquième et dernier *breakpoint* Dès lors que la valeur juste de l'entreprise dépasse 37 481 644,70 €, le nombre dilué d'actions ordinaires passe de 68 196 à 77 163. Donc, suivant le même raisonnement utilisé pour construire la quatrième *tranche*, le cinquième et dernier *breakpoint* coïncide avec la valeur d'entreprise maximale telle que le nombre dilué d'actions ordinaires reste à 77 163.

Il s'agit de la valeur de liquidation de l'entreprise où une action ordinaire vaut 285,02 €, ce qui est le prix à partir duquel la conversion des actions *Series A* et l'exercice des options auront lieu.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Breakpoint 5} &= 77\,163 \times (285,02 \text{ €} - 220,98 \text{ €}) + 37\,481\,644,70 \text{ €} \\ &= 42\,423\,163,22 \text{ €}. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'allocation de richesse dans la cinquième *tranche* est au prorata du nouveau nombre dilué d'actions ordinaires, soit :

- $\frac{14\,033}{77\,163} \approx 18,19\%$ aux actionnaires *Series Seed I*,
- $\frac{8\,967}{77\,163} \approx 11,62\%$ aux actionnaires *Series Seed II*,
- $\frac{50\,501}{77\,163} \approx 65,45\%$ aux actionnaires ordinaires, et
- $\frac{3\,662}{77\,163} \approx 4,75\%$ aux porteurs des options d'achat I.

Enfin, il est notable que l'on peut également construire la sixième et dernière *tranche* avec le dernier *breakpoint*. La dernière *tranche* correspond toujours à l'ensemble de valeurs qui dépassent le dernier *breakpoint*. Suivant l'analyse en cascade, quelle que soit la structure des fonds propres, toutes les classes de titres donnant droit aux actions participent à la valeur d'entreprise dans cette *tranche* au prorata des actions ordinaires pleinement diluées.

Avec l'exemple donné dans la [Table 2.1](#), l'allocation de richesse est dans les proportions de :

- $\frac{73\,884}{159\,122} \approx 46,43\%$ aux actionnaires *Series A*,
- $\frac{14\,033}{159\,122} \approx 8,82\%$ et $\frac{8\,967}{159\,122} \approx 5,64\%$ aux actionnaires *Series Seed I* et II respectivement,
- $\frac{50\,501}{159\,122} \approx 65,45\%$ aux actionnaires ordinaires, et
- $\frac{3\,662}{159\,122} \approx 2,30\%$ et $\frac{8\,075}{159\,122} \approx 5,07\%$ aux porteurs des options I et II respectivement.

2.3.2 Assimilation à un portefeuille d'options d'achat

La section 2.1.1 évoque le raisonnement général de plusieurs modèles de défaut répandus, dont notamment le modèle structurel de Merton (1974). Une étape essentielle du modèle de Merton est la démonstration que la valeur de l'ensemble des actions ordinaires peut s'écrire comme une option d'achat sur la valeur de l'ensemble des actifs de la société. À l'issue d'une analyse en cascade, il est possible d'étendre ce même raisonnement aux agrégats de chaque élément du passif de la société.

Notons :

- b le nombre de *breakpoints* non nul établis à partir de l'analyse en cascade ;
- $(B_i)_{i \in \{0, \dots, b\}}$ la valeur de l'ensemble des *breakpoints*, avec $B_0 = 0$;
- k la classe du titre de passif (Soit $k \in \mathcal{K}$ l'ensemble des classes) ;
- n_k le nombre de titres de la classe k ;
- $p_{k,i}$ la proportion de richesse allouée à la classe k au sein de la $i^{\text{ème}}$ tranche ;
(avec pour rappel $i \in \{1, \dots, b+1\}$)
- W_t la valeur des actifs de la société à l'instant t ;
- $C^{(K)}(W_t)$ la valeur à l'instant t d'une option d'achat de prix d'exercice K et de maturité T dont l'actif sous-jacent est W_t ; et
- $V_k(W_t)$ la valeur du titre de passif de la classe k à la instant t , donnée en fonction de W_t .

Il en découle $\forall k \in \mathcal{K}$:

$$\begin{aligned}
 n_k V_k(W_t) &= \begin{cases} p_{k,1}(W_t - B_0) & \text{si } W_t < B_1 \\ p_{k,1}(B_1 - B_0) + p_{k,2}(W_t - B_1) & \text{si } W_t < B_2 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{b-1} p_{k,i}(B_i - B_{i-1}) + p_{k,b}(W_t - B_{b-1}) & \text{si } W_t < B_b \\ \sum_{i=1}^b p_{k,i}(B_i - B_{i-1}) + p_{k,b+1}(W_t - B_b) & \text{si } W_t \geq B_b \end{cases} \\
 &= \sum_{i=1}^b p_{k,i} \left[C^{(B_{i-1})}(W_t) - C^{(B_i)}(W_t) \right] + p_{k,b+1} C^{(B_i)}(W_t) \quad \text{lorsque } t = T
 \end{aligned}$$

avec

$$C^{(K)}(W_T) = \max(W_T - K; 0).$$

Ainsi, si T correspond à l'instant de liquidation de la société, la valeur de chaque élément du passif est un portefeuille d'options d'achat dont l'actif sous-jacent est la valeur totale de la société. Les différences successives des options d'achat — $\left(C^{(B_{i-1})}(W_t) - C^{(B_i)}(W_t) \right)_{i \in \{1, \dots, b\}}$ — correspondent aux *tranches* dont la longueur d'intervalle est finie, déterminables avec une analyse en cascade de la structure de capital.

Dans le cas où $t < T$, la valeur des titres peut encore être explicitée en fonction des options d'achat avec un raisonnement d'absence d'opportunité d'arbitrage. L'emploi simpliste du modèle de [Black et Scholes](#), avec l'hypothèse que $dW_t = \mu W_t dt + \sigma W_t dz_t$ ⁸ dans un marché parfait, entraîne la relation

$$C^{(K)}(W_t) = \Phi(d_1)W_t - \Phi(d_2)Ke^{-r(T-t)},$$

où :

- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\left(\frac{W_t}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right]$ avec r le taux sans risque⁹,
- $d_2 = d_1 - \sqrt{T-t}$, et
- $\Phi(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$ avec Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Néanmoins, cette solution fermée n'intègre pas la calibration adéquate des probabilités de défaut et elle est mal adaptée à une structure complexe de capital. Par conséquent, le modèle de [Brennan et Schwartz](#) parmi d'autres, établi afin de respecter la prise en compte explicite des obligations convertibles et la subordination de dette, sera étudié dans le [chapitre 4](#).

8. dz_t correspond à l'incrément d'un mouvement Brownien standard, $\mu \in \mathbb{R}$, et $\sigma \in \mathbb{R}_+$.

9. r est supposé constant ici, mais il est possible d'étendre le modèle Black-Scholes pour $r := (r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus stochastique.

Référentiel IFRS des instruments d'une levée de fonds

3.1 Notions de valorisation

Avant d'approfondir les méthodes de valorisation des instruments de passif, il est primordial d'évoquer le cadre de valorisation mis en place par l'IASB avec les normes IFRS. En effet, les diverses normes définissent trois principales visions de valorisation à appliquer aux instruments :

- (i) la juste valeur, explicitée par l'intégralité de la norme [IFRS 13](#),
- (ii) le coût amorti, et
- (iii) le coût résiduel.

3.1.1 IFRS 13 — La juste valeur

La juste valeur des éléments de passif est définie en étant

le prix qui serait payé pour le transfert d'un passif lors d'une transaction normale entre des intervenants du marché à la date d'évaluation.

Dans le cas particulier des sociétés non cotées, où peu d'informations de marché sont disponibles, l'IASB préconise que la juste valeur soit déterminée à l'aide des hypothèses que les intervenants du marché utiliseraient pour fixer le prix du passif, y compris les hypothèses sur les risques. Il est surtout notable que cette norme explicite la prise en compte du risque de non-exécution, dont le risque de crédit, dans la juste valeur d'un passif (IFRS 13 paragraphe 42). Il s'ensuit que l'ensemble des modèles de valorisation qui seront étudiés dans ce mémoire creusent le risque de crédit de la société émettrice des passifs.

Par ailleurs, la norme établit une hiérarchie de trois niveaux selon les données d'entrée utilisées pour déterminer la juste valeur, chaque niveau ayant un degré d'approfondissement différent pour la communication. Les niveaux, en fonction des données d'entrée, sont :

- **Niveau 1**, où les données d'entrée comprennent les cours du marché non ajustés sur des marchés actifs¹ pour des passifs identiques, auxquels l'entité peut avoir accès à la date d'évaluation, (Paragraphe 76)
- **Niveau 2**, où les données d'entrée à ce niveau comprennent les données observables directement ou indirectement, autres que le cours inclus dans le **Niveau 1**, (Paragraphe 81) et

1. Les marchés actifs sont des marchés sur lesquels ont lieu des transactions concernant le passif selon une fréquence et un volume suffisants pour fournir de façon continue de l'information sur le prix. (IFRS 13 Annexe A)

- **Niveau 3**, où les données d'entrée à ce niveau sont toutes non observables (Paragraphe 86).

Les informations à communiquer pour une valorisation classée au Niveau 1 nécessitent le moins de détail tandis que celles pour une valorisation au Niveau 3 nécessitent le plus de détail. Or, il se peut que les données d'entrée utilisées pour déterminer la juste valeur soient classées à des niveaux différents dans la hiérarchie. Dans ce cas, le niveau global à retenir est le niveau le plus bas des données d'entrée jugées importantes pour la juste valeur prise dans son ensemble.

À l'heure des bilans, la juste valeur telle que définie par la norme IFRS 13 est la vision de valorisation d'éléments de passif la plus exigeante dans les normes IFRS, non seulement en termes de calcul mais également en termes des justifications à joindre. Néanmoins, il est important de souligner que pour certaines normes qui précèdent IFRS 13, dont notamment la norme IFRS 2, le terme « juste valeur » est employé avec une signification qui diffère à certains égards. Par conséquent, la définition de juste valeur dans cette sous-section est à considérer indépendamment de la notion de juste valeur évoquée dans la [section 3.3](#).

3.1.2 Coût amorti

La notion de valorisation des éléments de passif par leur coût amorti est abordée dans la section 5.4 et dans l'annexe A de la norme [IFRS 9](#). Le coût amorti d'un passif financier est donnée par sa valeur initiale de comptabilisation, majoré ou diminué de l'amortissement cumulé calculé par la méthode du **taux d'intérêt effectif**. D'après cette norme, le taux d'intérêt effectif est défini par le taux qui permet d'actualiser les décaissements ou encaissements de trésorerie futurs sur la vie prévue du passif financier de manière à obtenir exactement la valeur comptable initiale de ce passif.

Pour calculer un tel taux, la société estime les flux de trésorerie en prenant en considération toutes les modalités contractuelles du passif financier², mais elle ne doit pas tenir compte des pertes sur crédit futures. Ce calcul inclut l'intégralité des frais proportionnels payés ou reçus entre les parties au contrat, des coûts de transaction, et de toutes les autres surcotes et décotes. En particulier, les coûts de transaction sont les coûts directement imputables à l'acquisition, à l'émission ou la sortie d'un instrument financier.

3.1.3 Coût résiduel

Parmi les trois notions de valorisation, la valorisation par coût résiduel est la notion la plus simple et ne nécessite aucune production d'information. Définie dans la norme IFRS 9, cette vision s'applique à une composante de certains instruments financiers. Ainsi, le coût résiduel est applicable uniquement lorsque l'instrument se décompose en plusieurs composantes différentes.

La valeur de la composante valorisée par coût résiduel est donnée par la différence entre la valeur de l'instrument vu comme un ensemble, généralement à disposition avec un prix de transaction, et la valeur de l'autre composante (ou des autres composantes) déterminée(s) au préalable par la juste valeur ou par coût amorti. Plusieurs exemples du coût résiduel seront présentés dans la [section 3.2.2](#).

2. Par exemple, pour une obligation convertible avec une provision de call, le remboursement anticipé du nominal est à intégrer dans le calcul.

3.2 Encadrement de valorisation pour les obligations convertibles

3.2.1 Classification des composantes d'une obligation convertible

La norme IAS 32 exige l'analyse des conditions contractuelles des instruments tels qu'une obligation convertible de façon que les composantes puissent être distinguées selon les définitions d'un « passif financier » (*financial liability*) et d'un « instrument de capitaux propres » (*equity instrument*).

Les définitions suivantes sont issues du paragraphe 11 de cette norme.

Un passif financier est tout passif qui est :

- a) *une obligation contractuelle*
 - i) *de remettre à une autre entité de la trésorerie ou un autre actif financier ;*
ou
 - ii) *d'échanger des actifs financiers ou passifs financiers avec une autre entité à des conditions potentiellement défavorable à l'entité*
- b) *un contrat qui sera ou pourra être réglé en instruments de capitaux propres de l'entité elle-même et qui est*
 - i) *un instrument non dérivé pour lequel l'entité est ou pourrait être tenue de recevoir un nombre variable d'instruments de capitaux propres de l'entité elle-même ; ou*
 - ii) *un instrument dérivé qui sera ou pourra être réglé autrement que par l'échange d'un montant fixe de trésorerie ou d'un autre actif financier contre un nombre fixe d'instruments de capitaux propres de l'entité elle-même. (...)*

Un instrument de capitaux propres est tout contrat mettant en évidence un intérêt résiduel dans les actifs d'une entité après déduction de tous ses passifs.

La définition d'un instrument de capitaux propres est étendue dans le paragraphe 16 de la norme IAS 32. Un instrument de capitaux propres doit également satisfaire les deux conditions a) et b) ci-dessous :

- a) *L'instrument n'inclut aucune obligation contractuelle*
 - i) *de remettre à une autre entité de la trésorerie ou un autre actif financier ;*
ou
 - ii) *d'échanger des actifs ou passifs financiers avec une autre entité à des conditions potentiellement défavorables à l'émetteur.*
- b) *Dans le cas d'un instrument qui sera ou qui peut être réglé en instruments de capitaux propres de l'émetteur lui-même, il s'agit*
 - i) *d'un instrument non dérivé qui n'inclut pour l'émetteur aucune obligation contractuelle de livrer un nombre variable d'instruments représentatifs de ses capitaux propres ; ou*
 - ii) *d'un dérivé qui ne sera réglé qu'au moyen d'un échange, par l'émetteur, d'un montant fixe de trésorerie ou d'un autre actif financier contre un nombre fixé d'instruments de capitaux propres de l'émetteur lui-même. (...)*

Il est utile de souligner que l'option de conversion d'une obligation convertible est généralement considérée comme un dérivé, défini dans l'annexe A de la norme IFRS 9. Par conséquent, l'option de conversion doit généralement satisfaire le *b) ii)* du paragraphe 16 de la norme IAS 32 pour être classifiée comme un instrument de capitaux propres. Lorsque l'option de conversion est un dérivé mais ne permet pas cette classification, le terme de classification communément utilisé est « passif dérivé » (*derivative liability*). Pour illustration, si ni le nombre d'actions converties ni leur montant en devise pour une obligation convertible ne sont fixes, l'option de conversion est considérée un passif dérivé.

La partie obligataire d'une obligation convertible étant classifiée comme un passif financier à de rares exceptions près, l'obligation convertible dans son ensemble donne lieu à un des trois types suivants d'instruments financiers sous les normes IFRS (BDO, 2021) :

1. Un **instrument financier composé**, où l'option de conversion est classifiée comme un instrument de capitaux propres,
2. Un **passif financier hybride**, où l'option de conversion est classifiée comme un passif dérivé, ou bien
3. Un **passif financier**, où l'option de conversion, à l'instar de la partie obligataire, est classifiée comme un passif financier.

Un tel instrument est une obligation convertible dont l'option de conversion à maturité donne droit à un nombre d'actions équivalentes en valeur au prix de remboursement.

Selon les trois types de classification ci-dessus, la façon de valoriser les composantes d'une obligation convertible en accord avec les normes IFRS varie. La [Figure 3.1](#) présentée à la page suivante est un schéma visuel qui synthétise les points de classification des composantes d'une obligation convertible. À l'égard de ce schéma, il convient de préciser les points suivants d'application.

- Les questions 3 et 6 font référence à la définition d'un dérivé à l'annexe A de la norme IFRS 9. D'après cette norme, un dérivé est défini comme un instrument financier présentant chacune des trois caractéristiques suivantes :
 - i) Sa valeur varie en fonction de la variation d'un taux d'intérêt, du prix d'un instrument financier, du prix d'une marchandise, d'un cours de change, d'un indice de prix ou de taux, d'une notation ou d'un indice de crédit.
 - ii) Il ne requiert aucun investissement net initial ou qu'un investissement net initial inférieur à celui qui serait nécessaire pour d'autres types de contrats dont on pourrait attendre des comportements similaires face à l'évolution des facteurs du marché.
 - iii) Son règlement se fait à une date future.
- Pour la question 3, le paragraphe 23 de la norme IAS 32 nécessite que tout contrat imposant à l'émetteur d'acheter ses propres instruments de capitaux propres (dont le cas d'un *put*, c'est-à-dire une option de vente) soit comptabilisé en tant qu'un passif financier à hauteur de la valeur actuelle du montant du rachat.

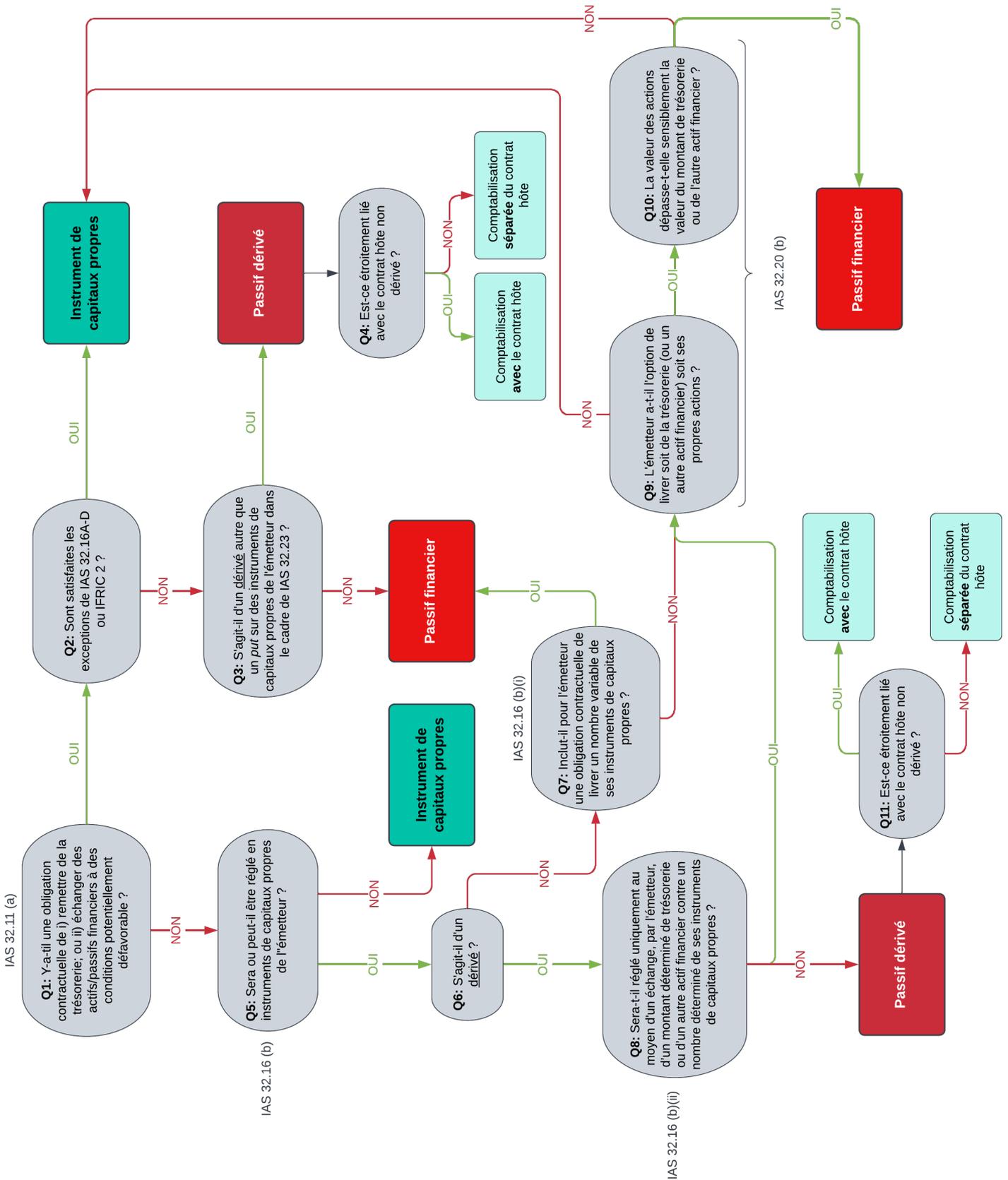


FIGURE 3.1 – Schéma de classification des composantes d'un instrument financier

Source: BDO (2021)

3.2.2 Mesure des composantes d'une obligation convertible

Les cas de classification envisageables d'une obligation convertible étant établis, il est désormais possible de développer les exigences de valorisation de l'IASB pour cette obligation dans chaque cas.

Cas général d'un instrument financier composé

Dans ce cas de figure, la **juste valeur** de la composante qui est passif financier, soit la partie obligataire, est déterminée premièrement d'après les paragraphes 31 et 32 de la norme IAS 32. La juste valeur ici correspond à la valeur actuelle de flux futurs contractuels en utilisant le taux d'actualisation qui serait appliqué à un instrument financier pareil sauf quant à l'inclusion d'une option de conversion. (IAS 32 AG31) Il est précisé que ce taux correspond au taux d'intérêt appliqué par le marché aux instruments ayant des conditions de crédit comparables et offrant pour l'essentiel les mêmes flux de trésorerie.

Par la suite, la composante qui est instrument de capitaux propres est valorisée en déduisant la juste valeur du passif financier de la juste valeur de toute l'obligation convertible comme un ensemble. La valeur de la composante *equity* est donc mesurée par le principe de **coût résiduel**. Lorsque l'obligation convertible est cotée sur un marché ou émise contre une somme monétaire, la juste valeur de l'instrument dans son ensemble est généralement le prix de transaction. (IFRS 9 B5.1.1)

Selon le paragraphe 38 de la norme IAS 32, les coûts de transaction pour l'émission d'une obligation convertible dans cette catégorie doivent être répartis entre ses deux composantes de façon proportionnelle. La juste valeur des composantes diminuée des coûts de transaction proportionnels détermine la valeur comptable à l'origine de l'obligation.

À la suite de la comptabilisation initiale de l'obligation convertible, le passif financier de celle-ci est réévalué à la fin de chaque exercice (pendant la vie de l'obligation convertible) avec la notion du **coût amorti**. Ainsi, en accord avec la définition du taux d'intérêt effectif, un nouveau taux d'actualisation est calculé de sorte que les coûts de transaction soient intégrés progressivement aux charges de l'émetteur. Toutefois, la partie qui correspond à l'instrument de capitaux propres n'est pas réévaluée comptablement.

Cas général d'un passif financier hybride

Suivant la section 4.3 de la norme IFRS 9, lorsque les caractéristiques économiques et risques d'un dérivé incorporé ne sont pas étroitement liés aux caractéristiques économiques et risques du contrat hôte, le dérivé incorporé doit être comptabilisé séparément. Ainsi, pour les obligations convertibles classifiées comme des passifs financiers hybrides, l'option de conversion (ici le dérivé incorporé) est généralement comptabilisée séparément à la partie obligataire (le contrat hôte).

Par ailleurs, il faut souligner que pour les obligations convertibles dans ce cas de figure, l'IASB exige la détermination de la **juste valeur** de l'option de conversion en premier lieu. Une fois déterminée cette valeur, le passif financier hôte (soit la partie obligataire de l'obligation convertible) est valorisé par coût résiduel, soit par la différence entre la juste valeur du dérivé incorporé et la juste valeur de tout l'instrument. (IFRS 9 B4.3.3)

À la suite de la comptabilisation initiale de l'obligation convertible, le passif financier hôte est réévalué à chaque exercice à son coût amorti. Or, contrairement au cas d'une obligation convertible qui est instrument financier composé, l'option de conversion est aussi réévaluée à chaque exercice. Ces réévaluations doivent être faites à la juste valeur par le biais du résultat net (*Fair value through profit or loss*, souvent abrégé *FVTPL*). Ainsi, les coûts de transaction attribués au passif dérivé (toujours de façon proportionnelle), ne sont plus intégrés de façon progressive par le taux d'actualisation effectif. À la place, ces coûts sont immédiatement imputés en charges dans le compte de résultat de l'exercice.

Évaluation à la juste valeur par le biais du résultat net

Selon les modalités de la section 4.3.5 de la norme IFRS 9, une obligation convertible qui est passif financier hybride (soit qui inclut un ou plusieurs dérivés incorporés) peut être comptabilisée et évaluée à la juste valeur par le biais du résultat net sans distinction des composantes. Il s'agit d'une option explicite mais irrévocable de l'émetteur pour l'instrument dans son ensemble.

Cette option pourrait réduire la complexité de comptabilisation, néanmoins, elle augmente la volatilité des montants qui figure dans le compte de résultat et dans le poste « Autres éléments du résultat global » (*Other comprehensive income* ou *OCI*) de l'entité.³ En effet, un accroissement de volatilité pour ces montants est prévisible car en choisissant cette option, la partie obligataire serait désormais valorisée à juste valeur, et donc impactée par des facteurs tels que l'évolution du taux d'intérêt effectif ou le changement du *rating* de crédit de l'émetteur.

Cas général d'un passif financier

Lorsque l'intégralité de l'obligation convertible est classifiée comme un passif financier, la valeur de comptabilisation initiale correspond à la juste valeur de tout l'instrument, ce qui correspond en règle générale au prix de transaction après intégration des frais proportionnels, coûts de transaction, surcotes et décotes le cas échéant. Postérieurement, l'instrument est réévalué à la fin de chaque exercice au coût amorti, identiquement à la partie obligataire d'un instrument financier composé.

3. Selon le 5.7.7 de la norme IFRS 9, la variation de juste valeur attribuable aux changements du risque de crédit est présentée dans les autres éléments du résultat global, tandis que le reste de la variation de juste valeur est présenté dans le compte de résultats.

3.3 Encadrement de valorisation pour les paiements fondés sur les actions

3.3.1 Généralités

La norme IFRS 2 concerne toutes les transactions dont le paiement est fondé sur des actions, qu'elles soient réalisées avec des salariés ou avec d'autres tiers. L'objectif de cette norme est de refléter dans le compte de résultat et dans le bilan l'impact financier des telles transactions. L'IASB définit formellement une transaction dont le paiement est fondé sur des actions par une transaction où l'entité reçoit des biens ou services d'un fournisseur dans le cadre d'un accord qui donne droit à l'autre partie de recevoir :

- i) soit de la trésorerie ou d'autres actifs de l'entité à hauteur de montants fondés sur le cours d'instruments de capitaux propres de l'entité,
- ii) soit des instruments de capitaux propres de l'entité,

moyennant le respect de toute condition d'acquisition de droits spécifiée entre les parties. Il s'agit également d'une transaction dont le paiement est fondé sur des actions lorsque l'entité fonctionne dans un groupe⁴ et contracte l'obligation de régler le paiement fondé en actions au nom d'une autre entité du groupe, où cette dernière reçoit les biens et services du fournisseur.

Quoi qu'il en soit, la norme IFRS 2 exige la comptabilisation des biens au moment de leur obtention et celle des services au fur et à mesure qu'elles sont reçues. En contrepartie de ces biens et services, l'entité doit comptabiliser soit un passif dans le cas i) où la transaction est dite réglée en trésorerie, soit une augmentation de ses capitaux propres dans le cas ii) où la transaction est dite réglée en instruments de capitaux propres. Dans la suite du présent mémoire, seul le dernier cas sera traité étant donné que l'ensemble des plans évoqués à la [sous-section 2.1.3](#) sont des transactions dont le paiement est fondé sur actions et qui sont réglées en instruments de capitaux propres.

En particulier, pour les transactions réglées en instruments de capitaux propres, l'évaluation des biens ou services reçus et de l'augmentation de capitaux propres qui en résulte, est stipulée être une évaluation de façon directe à la juste valeur des biens ou services reçus. Dans cette norme, la juste valeur est définie par

le montant pour lequel un actif pourrait être échangé, un passif éteint, ou un instrument de capitaux propres attribué entre des parties bien informées et consentantes dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale.

Dans les cas où l'entité à l'origine des transactions n'est pas capable d'estimer avec fidélité les biens ou services reçus, l'évaluation des biens ou services reçus comme celle de l'augmentation de capitaux propres sera une évaluation de façon indirecte, effectuée par référence à la juste valeur des instruments de capitaux propres attribués.

4. C'est-à-dire une société mère et ses filiales selon la définition à l'annexe A de la norme IFRS 10.

3.3.2 Dans le cadre de l'actionnariat salarié

Les paragraphes 11 à 13 de la norme IFRS 2 précisent l'application des principes précédents lorsque les transactions dont le paiement est fondé sur actions sont effectuées avec des membres du personnel de l'entité ou des tiers fournissant des services similaires. De manière générale, les plans de paiements fondé sur les actions attribués au membres du personnel représentent une fraction de leur rémunération d'ensemble, qui va de pair avec un salaire en trésorerie et d'autres avantages liés à l'emploi. Ainsi, l'IASB postule que l'évaluation directe des biens et services reçus en échange des composantes particulières de la rémunération d'ensemble d'un salarié est rarement envisageable.

De surcroît, l'attribution d'actions ou des options sur actions peuvent être réalisée afin de satisfaire un accord d'intéressement plutôt que la rémunération de base, notamment avec l'exemple courant des primes pour encourager plus de temps au service des membres de personnel ou encore pour récompenser leurs efforts d'amélioration de la performance de l'entité. Dans un tel cas de figure, l'entité octroie un supplément de rémunération pour obtenir des avantages supplémentaires, dont l'estimation de la juste valeur risque d'être inabordable.

Compte tenu de ces faits, la norme IFRS 2 prévoit l'estimation de la juste valeur des services reçus des membres de personnel par référence à la juste valeur des instruments de capitaux propres attribués, évalués à la date d'attribution, soit la date à laquelle l'accord de paiement fondés sur des actions est accepté entre les deux parties. L'évaluation à la juste valeur devrait prendre en compte des prix de marché lorsqu'ils sont disponibles ainsi que les termes et conditions spécifiques à l'attribution des instruments de capitaux propres.

À défaut des prix de marché, l'entité doit utiliser une technique d'évaluation qui

est cohérente avec les méthodologies d'évaluation généralement acceptées pour la détermination du prix d'instruments financiers,

et qui intègre

tous les facteurs et hypothèses que prendraient en considération des intervenants du marché bien informés et consentants pour la fixation du prix

selon le paragraphe 17 de la norme. Par exemple, si un plan d'attribution gratuite des actions à un salarié comprend des restrictions de transfert après l'acquisition des actions, ce facteur doit être pris en compte relativement à son impact sur le prix de marché de l'action.

Quand aux options sur des actions attribués à des membres du personnel, des prix de marché ne sont fréquemment pas disponible dans la mesure où les options attribuées sont soumises à des termes et conditions non applicables aux options cotées. Ainsi, il est précisé à l'annexe B de la norme IFRS 2 que la juste valeur des options attribuées en absence d'options cotées est à estimer avec l'application d'un modèle d'évaluation des options. Afin de respecter le paragraphe 6 de cette annexe, tout modèle d'évaluation d'options doit prendre en compte, au minimum, l'ensemble des facteurs suivants :

- (a) le prix d'exercice de l'option,
- (b) la durée de vie de l'option,
- (c) le prix actuel des actions sous-jacentes,
- (d) la volatilité attendue du prix de l'action,

- (e) les dividendes attendus sur les actions le cas échéant, et
- (f) le taux d'intérêt sans risque pour la durée de vie de l'option.

Tout autre facteur, à l'exception de conditions d'acquisition des droits, que prendrait en compte un intervenant du marché bien informé et consentant pour fixer le prix des options attribués doit également être intégré dans l'évaluation de juste valeur.

3.4 Problématique pour les sociétés non cotées

La [section 3.3](#) précédente met en évidence l'importance de la juste valeur des instruments de capitaux propres dans la norme IFRS 2 pour l'évaluation des plans de paiement fondé sur les actions attribués à des membres de personnel. Or, dans la [section 3.2](#), il est établi que la valorisation des obligations convertibles influence directement sur la valeur des instruments de capitaux propres de l'entité. Il s'ensuit que lorsque l'entité émet simultanément des obligations convertibles et des plans de paiement fondé sur des actions, ce qui se produit avec une fréquence non négligeable dans le secteur non coté, une valorisation conformément aux normes IFRS et IAS nécessite une modélisation financière sophistiquée.

Étant donnée l'absence des éléments de marché pour déterminer la juste valeur des instruments de capitaux propres, le modèle d'évaluation des instruments devrait incorporer non seulement les facteurs évoqués aux paragraphes B6-B7 de la norme IFRS 2, mais également les facteurs qui seraient pris en considération par des intervenants de marché pour établir le prix d'une obligation convertible et de ses composantes lors d'une transaction normale à la date d'évaluation. Un tel facteur d'un poids décisif dans l'établissement du prix des obligations convertibles est le risque de crédit de l'entité. À cela s'ajoute une structure de capitaux propres potentiellement complexe en cas de l'émission d'actions privilégiées par l'entité.

L'étude d'un modèle financier qui puisse répondre à l'ensemble de ces contraintes fait l'objet du [chapitre 4](#) qui suit.

Valorisation par modèle de structure de capital

4.1 Choix de modèle

Afin de tenir compte du risque de crédit de la société à l'origine de la levée de fonds, l'application soit d'un modèle à intensité soit d'un modèle structurel de défaut (abordés à la [sous-section 2.1.1](#)) est presque incontournable. Néanmoins, les modèles à intensité, sans possibilité de valorisation simultanée des instruments de passif, sont mal adaptés à la valorisation exigée par les normes IFRS et IAS dans le cas particulier d'une société non cotée. Ainsi, seuls les modèles structurels de défaut seront considérés pour répondre à cette problématique.

L'objectif de ce chapitre est d'étendre les modèles structurels de capital adaptés aux spécificités des obligations convertibles dans l'éventualité d'une structure de capital plus complexe, qui comprend les instruments typiques d'une levée de fonds pour des sociétés non cotées. L'extension des modèles sera basée sur l'analyse en cascade du passif de la société.

4.1.1 Évolution des modèles existants

À la suite de la publication du modèle de [Merton](#), de nombreux modèles ayant la même vision structurelle du risque de crédit ont été développés avec l'intérêt d'intégrer la valorisation des obligations convertibles. Un des premiers modèles du genre est celui de [Ingersoll Jr \(1977\)](#), qui établit une formule de forme fermée pour le prix d'obligations convertibles simples¹ dans le cadre du modèle de [Black et Scholes](#). Le raisonnement dans ce modèle est presque identique à celui évoqué à la [sous-section 2.3.2](#), où l'analyse en cascade de la structure de capital permet de valoriser tout élément financier du passif, dont les obligations convertibles.

Une autre approche remarquable de modélisation, toujours dans le cadre de [Black et Scholes](#) mais dépendante des méthodes d'évaluation numériques, a été menée par [Brennan et Schwartz \(1977, 1980\)](#). La deuxième version de leur modèle, à l'instar du modèle structurel de [Black et Cox](#) (détaillé à la [section 2.1.1](#)), permet la possibilité de défaut avant la maturité des obligations convertibles tout en introduisant la possibilité de tenir compte de plusieurs facteurs de décision, tels que la conversion prématurée ou l'exercice des provisions de *call*. Une telle modélisation a été possible sans faire recours à la simulation de Monte-Carlo grâce à la méthode des différences finies.

1. On fait référence ici aux obligations convertibles dont la conversion ne peut avoir lieu avant la maturité et pour lesquelles aucune provision de remboursement anticipé n'est accordée.

Toutefois, le modèle de Brennan et Schwartz, ainsi que les autres modèles structurels de défaut fondés sur le cadre de Black et Scholes, exhibe deux principaux points de faiblesse. Le premier inconvénient est la tendance vers un taux nul des *spreads* de crédit pour des courtes maturités. Il s'agit d'un point faible de la construction mathématique du modèle qui découle du manque d'un temps d'arrêt de défaut imprévisible. D'autre part, le deuxième inconvénient est une capacité de calibration inadéquate. De nombreuses études, telles que les études de Lyden et Saraniti (2001) et d'Eom et al. (2004), ont démontré des écarts non négligeables entre les *spreads* de crédit observés sur le marché et ceux générés par une modélisation structurelle de défaut. En particulier, Eom et al. constatent une sous-estimation des *spreads* pour les obligations de faible risque de défaut. De ce fait, un passage général des modèles structurels aux modèles à intensité de défaut s'est aperçu aux années 1995-2010.

En revanche, des recherches plus récentes suggèrent que l'insuffisance documentée des modèles structurels de défaut est surtout attribuable à l'hypothèse que l'évolution de la valeur de la société est purement un processus de diffusion.² En effet, Lipton et Sepp (2009), Fang et Oosterlee (2009b), et Dao et Jeanblanc (2012), parmi d'autres, corroborent des prix bien adaptés au marché, générés par une modélisation structurelle lorsque celle-ci comprend des sauts et/ou une volatilité non constante pour la valeur de la société.

Par conséquent, le modèle de défaut par structure de capital retenu dans ce mémoire intègre la possibilité de sauts imprévisibles dans l'évolution de valeur des actifs de la société. Étant donné le contexte des sociétés non cotées, les modèles structurels avec une volatilité locale ou stochastique n'ont pas été abordés en raison du manque de données de marché nécessaires à leur calibration.

2. Formellement, ce sont les processus de Markov fort à trajectoires continues ; néanmoins, dans la littérature des mathématiques financières, ce terme comprend également les processus de Markov à trajectoires presque sûrement continues afin d'inclure les mouvements browniens.

4.2 Notions mathématiques préalables à la modélisation

La modélisation de [Ballotta et Kyriakou \(2015\)](#), sur laquelle repose fortement le modèle de valorisation de ce mémoire, exploite de nombreuses propriétés des transformées de Fourier et des processus affines. Ainsi, afin de faciliter la compréhension du contenu restant du mémoire, ces propriétés sont illustrées ici.

4.2.1 La transformation de Fourier

L'objectif de cette sous-section est de démontrer la façon dont la densité d'une variable aléatoire continue peut être approchée numériquement à l'aide des algorithmes de *Fast Fourier Transform* (abrégié *FFT*) lorsque seule la fonction caractéristique de la variable aléatoire est connue. Ceci fera une partie intégrale de la calibration du modèle de valorisation au [section 5.1](#). L'ensemble des définitions et des autres propriétés présentées dans cette sous-section est extrait de l'ouvrage de [Sneddon \(1995\)](#).

Transformée de Fourier continue

En analyse, la transformation de Fourier est un analogue de la théorie des séries de Fourier pour les fonctions non périodiques.

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

une fonction intégrable, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

La transformation de Fourier associe à f une autre fonction \hat{f} appelée la transformée de Fourier de f . Il existe plusieurs conventions de la définition pour la transformée de Fourier, selon le cas de son application.

Dans le cadre du mémoire présent, il convient de décrire la transformée de Fourier avec la définition suivante :

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \alpha &\longmapsto \hat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i\alpha x} dx. \end{aligned}$$

La transformation sera notée par l'opérateur \mathcal{F} , de sorte que $\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}\{f\} = \hat{f}$. Si f correspond à la densité de probabilité d'une variable aléatoire X , cette définition implique que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f\}(\alpha) &= \mathbb{E}(e^{i\alpha X}) \\ &= \varphi_X(\alpha), \end{aligned}$$

où φ_X est la fonction caractéristique de X .

Par ailleurs, la transformation de Fourier inverse sera notée $\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \mapsto \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} = f$, avec

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Ainsi, $f = \mathcal{F}^{-1}\{\varphi_X\}$.

La proposition suivante sera également utile à la [sous-section 4.3.2](#) et à la [section 4.4](#) dans l'approfondissement du modèle de valorisation.

Proposition 1

Propriétés de la transformation de Fourier

Soient f et g des fonctions intégrables, définies sur \mathbb{R}^n .

Notons $\hat{f} = \mathcal{F}\{f\}$ et $\hat{g} = \mathcal{F}\{g\}$.

Alors, les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. $\mathcal{F}\{z_1 f + z_2 g\} = z_1 \hat{f} + z_2 \hat{g}, \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.
2. $\mathcal{F}\{f * g\} = \hat{f}\hat{g}$, où $f * g$ correspond à la convolution de f et de g .

En effet,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t).$$

3. $\mathcal{F}^2\{f\} = \mathcal{F}\{\hat{f}\} = \mathcal{P}\{f\}$, où \mathcal{P} est l'opérateur de parité de sorte que

$$\mathcal{P}\{f\}(x) = f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Transformée de Fourier discrète

La transformée de Fourier discrète désigne généralement une application unidimensionnelle de nombres complexes. En effet, la transformée de Fourier discrète d'une famille $(z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ est la famille $(Z_0, Z_1, \dots, Z_{N-1})$ où

$$Z_k = \sum_{n=0}^{N-1} z_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Or, il est possible d'étendre cette application à un objet complexe de $d \in \mathbb{N}^*$ dimensions. En particulier, la transformée de Fourier discrète en deux dimensions, appliquée aux matrices complexes, est utilisée à la [section 4.4](#).

Soient $(z_{p,q})_{\substack{p \in \{0, \dots, N-1\} \\ q \in \{0, \dots, N-1\}}}$ une matrice carrée complexe. Alors $(Z_{j,\ell})_{\substack{j \in \{0, \dots, N-1\} \\ \ell \in \{0, \dots, N-1\}}}$ est sa transformée de Fourier discrète si et seulement si

$$Z_{j,\ell} = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} z_{p,q} e^{-i\frac{2\pi}{N}(jp+\ell q)} \quad \forall (j, \ell, p, q) \in \{0, \dots, N-1\}^4.$$

De façon équivalente, $(z_{p,q})_{\substack{p \in \{0, \dots, N-1\} \\ q \in \{0, \dots, N-1\}}}$ est l'inverse de la transformée de Fourier discrète de $(Z_{j,\ell})_{\substack{j \in \{0, \dots, N-1\} \\ \ell \in \{0, \dots, N-1\}}}$ si et seulement si

$$z_{p,q} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} Z_{j,\ell} e^{i\frac{2\pi}{N}(jp+\ell q)} \quad \forall (j, \ell, p, q) \in \{0, \dots, N-1\}^4.$$

La transformée de Fourier discrète, quelle que soit la dimension de son argument, est calculable de façon efficiente avec l'algorithme de *FFT*, disponible sur la plupart des logiciels.

Approximation d'une densité de probabilité

Malgré la différence de forme entre la transformée de Fourier continue et la transformée discrète, cette dernière peut être utilisée pour estimer l'intégrale qui définit la transformée continue. On choisit d'illustrer cette propriété dans un cas unidimensionnel.

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 2, dont la densité sera estimée uniquement à partir de la fonction caractéristique de X et la transformée de Fourier discrète. En effet, il s'agit d'estimer

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Pour ce faire, il faut d'abord définir le nombre de valeurs possibles dans l'approximation de f_X , qui sera noté N . Le choix de N correspond en même temps au nombre de sous-intervalles qui diviseront les bornes d'intégration. Ainsi, plus N est élevé, plus l'approximation sera précise. Lorsque l'algorithme de *Fast Fourier Transform* est encodé en *Radix-2*, comme pour la plupart des logiciels statistiques, il faut $N = 2^p$ avec p un entier naturel pour un calcul efficace.

Alors, il est possible de considérer que

$$\forall (x, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x \in \left(x_0 + j(\Delta x) \right)_{j \in \{0, \dots, N-1\}}, \\ \alpha \in \left(\alpha_0 + k(\Delta \alpha) \right)_{k \in \{0, \dots, N-1\}}, \end{cases}$$

avec les notations $x_k = x_0 + k(\Delta x)$ et $\alpha_k = \alpha_0 + k(\Delta \alpha)$, $\forall k \in \{0, \dots, N-1\}$. La suite $(x_j)_{j \in \{0, \dots, N-1\}}$ correspond aux points pour lesquels la discrétisation de f_X est calculée et la suite $(\alpha_k)_{k \in \{0, \dots, N-1\}}$ définit une subdivision de $[\alpha_0; \alpha_{N-1}] \subset \mathbb{R}$, sur laquelle sera approchée l'intégrale de φ_X .

D'une part, le choix de x_0 et (Δx) devrait refléter la loi de X . Un tel choix est

$$\begin{cases} x_0 := m_1 - \beta \sqrt{m_2}, \\ (\Delta x) := \frac{2\beta}{N} \sqrt{m_2}, \end{cases}$$

où m_1 et m_2 sont les cumulants d'ordre 1 et 2 respectivement de X et $\beta \in \mathbb{R}_+$ est de choix libre. Les cumulants sont calculables explicitement à partir de la fonction caractéristique φ_X et caractérisent la loi de la variable aléatoire. En particulier, les cumulants d'ordre 1 et 2 d'une variable aléatoire correspondent toujours à l'espérance et la variance de la variable.

Ainsi, la discrétisation proposée correspond à l'évaluation de f_X aux points qui divisent l'intervalle $[\mathbb{E}(X) - \beta \sqrt{\mathbb{V}(X)}; \mathbb{E}(X) + \beta \sqrt{\mathbb{V}(X)}]$ en $N + 1$ sous-intervalles de taille homogène.

D'autre part, les valeurs discrètes de α doivent être choisies de sorte que la valeur de φ_X soit négligeable en dehors de l'intervalle $[\alpha_0; \alpha_{N-1}]$. De ce fait, il convient de choisir $[\alpha_0, \alpha_{N-1}]$ un intervalle presque symétrique, avec

$$\alpha_0 = -\frac{N}{2} (\Delta \alpha).$$

Le pas $(\Delta\alpha)$ peut donc être défini de sorte que $|\varphi_X|$ sera inférieure à un seuil de tolérance $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ dehors l'intervalle $[\alpha_0; \alpha_{N-1}] = \left[-\frac{N}{2}(\Delta\alpha); \left(\frac{N}{2} - 1\right)(\Delta\alpha)\right]$. C'est-à-dire

$$\left| \varphi_X \left(\left[\frac{N}{2} - 1 \right] (\Delta\alpha) \right) \right| \leq \varepsilon.$$

Enfin, pour que la discrétisation de x et α soit adaptée à la transformée de Fourier discrète, il faut satisfaire l'égalité

$$(\Delta x) (\Delta\alpha) = \frac{2\pi}{N},$$

comme démontré par [Lord, Fang, Bervoets, et Oosterlee \(2008\)](#). Dans un contexte physique, il s'agit d'une relation dite de Nyquist. Ainsi, il est possible d'utiliser

$$(\Delta\alpha) = \frac{2\pi}{N(\Delta x)} = \frac{\pi}{\beta\sqrt{m_2}},$$

avec $\beta = \sup \left\{ b \in \mathbb{R}_+^* : \left| \varphi_X \left(\frac{\pi}{b\sqrt{m_2}} \left[\frac{N}{2} - 1 \right] \right) \right| \leq \varepsilon \right\}$ choisi en fonction de ε et N .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\alpha_{N-1}} \varphi_X(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha && \text{avec troncature par rapport à } (\alpha_k)_{k \in \{0, \dots, N-1\}} \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} w_k \varphi_X(\alpha_k) e^{-i\alpha_k x} (\Delta\alpha) && \text{avec discrétisation par rapport à } (\alpha_k)_{k \in \{0, \dots, N-1\}}, \end{aligned}$$

où $w_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbf{1}_{\{0, N-1\}}(k)}$ correspond aux poids de discrétisation d'une intégrale pour la méthode des trapèzes.

En évaluant cette approximation aux valeurs $(x_j)_{j \in \{0, \dots, N-1\}}$,

$$f_X(x_j) \approx \frac{(\Delta\alpha)}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} w_k \varphi_X(\alpha_k) e^{-i\alpha_k x_j}, \quad \forall j \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Or, en raison de la relation de Nyquist,

$$\begin{aligned} \alpha_k x_j &= -\frac{N}{2} (\Delta\alpha) x_j + k (\Delta\alpha) x_0 + k j (\Delta\alpha) (\Delta x) \\ &= -\frac{N}{2} (\Delta\alpha) x_j + k (\Delta\alpha) x_0 + k j \left(\frac{2\pi}{N} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_X(x_j) &\approx \frac{(\Delta\alpha)}{2\pi} e^{i\frac{N}{2}[(\Delta\alpha)x_j]} \sum_{k=0}^{N-1} w_k e^{ikx_0(\Delta\alpha)} \varphi_X(\alpha_k) e^{-i\frac{2\pi}{N}jk} \\ &= \frac{(\Delta\alpha)}{2\pi} e^{i\frac{N}{2}[(\Delta\alpha)x_j]} \text{FFT}_j \left[w_k e^{ikx_0(\Delta\alpha)} \varphi_X(\alpha_k) \right], \end{aligned}$$

où $\text{FFT}_j(y_k)$ désigne le $j^{\text{ème}}$ élément de la transformée de Fourier discrète de $(y_k)_{k \in \{0, \dots, N-1\}}$.

Les figures 4.1 et 4.2 sur cette page illustrent l'approximation de f_X selon les choix de N et ε .

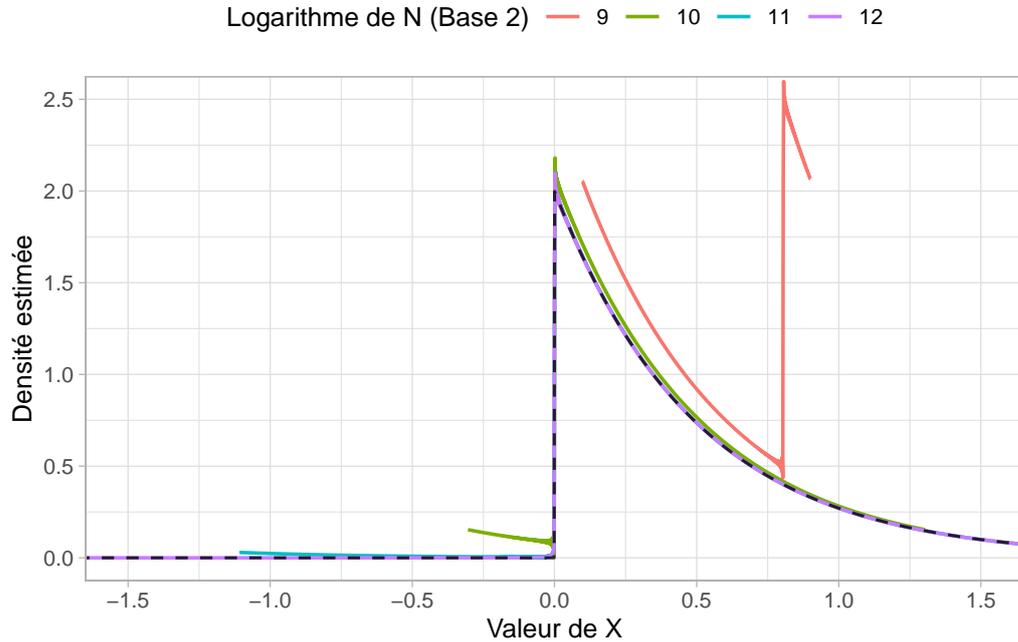


FIGURE 4.1 – Estimation d'une densité exponentielle en fonction de N

Dans la Figure 4.1 ci-dessus, ε a été fixé à 10^{-3} et la densité théorique est indiquée par la courbe noire pointillée. Ainsi, seule la dimension N détermine la valeur de β qui est optimale, générant une estimation \tilde{f}_X de f_X sur une étendue croissante en fonction de N . Il est remarquable que pour N trop petit par rapport à ε , le β optimal résultant est trop faible pour une bonne estimation de la densité, comme on peut apercevoir dans la Figure 4.1 lorsque $\log_2(N) < 11$.

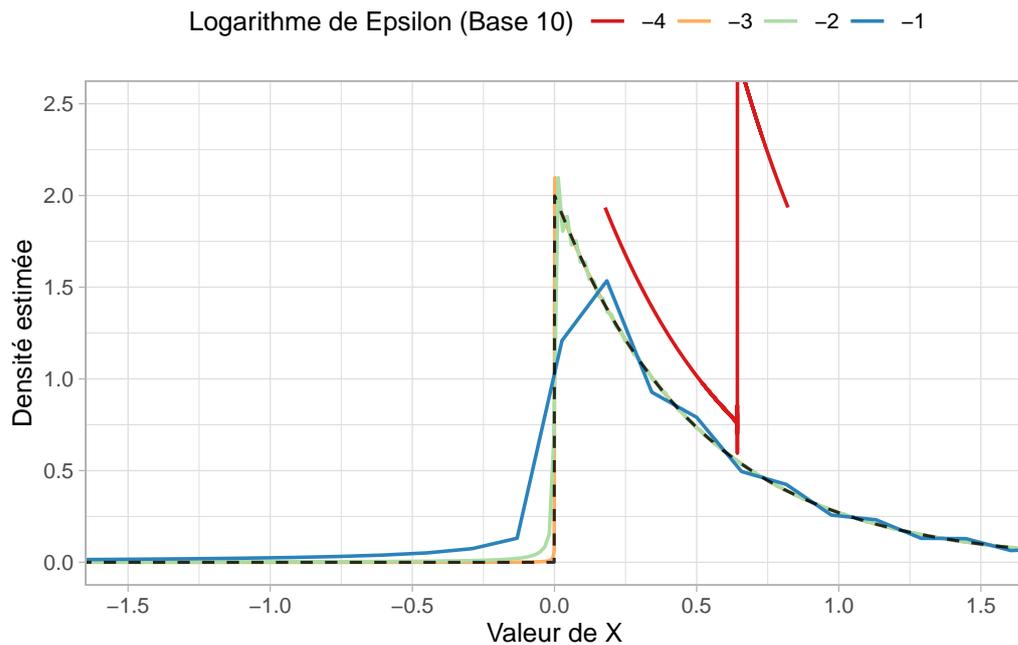


FIGURE 4.2 – Estimation d'une densité exponentielle en fonction de ε

Dans la [Figure 4.2](#) sur la page précédente, N a été fixé à 2^{12} . Pour ε trop petit par rapport à N , comme pour le cas symétrique déjà commenté, la valeur optimale de β génère une étendue insuffisante pour approcher la densité. Inversement, lorsque la tolérance ε est trop grande par rapport à N , une valeur très importante de β est obtenue et implique des pas (Δx) qui ne sont pas suffisamment fins pour approcher la fonction de densité de façon précise.

4.2.2 Les processus affines

Cette sous-section a pour objectif la présentation des processus affines dont les propriétés permettent d'explicitier la fonctions caractéristiques à la [section 4.3.1](#) et au [section 5.1](#).

L'ensemble des définitions et propositions présentées est tiré de l'ouvrage de [Filipovic \(2009\)](#).

Définition

Soient :

- $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^d$ un espace fermé non vide, avec $d \in \mathbb{N}^*$;
- $Z = \left(Z(t) \right)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{R}^d$ un mouvement brownien standard de dimension d adapté à une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$;
- $b : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue ;
- $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ une application matricielle telle que

$$\begin{aligned} a : \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{R}^{d \times d} \\ x &\mapsto \sigma(x)\sigma(x)^\top \end{aligned}$$

est une application continue ; et

- $X = \left(X(t) \right)_{t \in \mathbb{R}_+} \in \mathbb{D}$ l'unique solution à l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dZ(t) \\ X(t) = x \in \mathbb{D} \end{cases}$$

quelque soit $t \in \mathbb{R}_+$.

Alors, le processus X est dit **affine** si la fonction caractéristique de $X(T)$ conditionnellement à la tribu \mathcal{F}_t est l'exponentiel d'une fonction affine de $X(t)$, quelque soit $t \leq T$.

En d'autres termes,

$$\exists \phi(t, u) : \mathbb{R}_+ \times i\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \text{ et } \exists \psi(t, u) : \mathbb{R}_+ \times i\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$$

dérivables conjointement par rapport à t telles que $\forall T \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E} \left[e^{u^\top X(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{\phi(T-t, u) + \psi(T-t, u)^\top X(t)} \quad \forall t \leq T, \forall u \in i\mathbb{R}^d.$$

Propriétés

Avec cette définition d'un processus affine, il est possible d'expliciter les caractéristiques utiles d'un tel processus.

Proposition 2

Forme d'un processus affine

Si le processus X est affine, alors sa dérive $b(X)$ et sa matrice de diffusion $a(X)$ sont également affine de X .

En effet, $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$a(X(t)) = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^d X_i(t) \boldsymbol{\alpha}_i \text{ et}$$

$$b(X(t)) = b + \sum_{i=1}^d X_i(t) \beta_i$$

où $X(t) = (X_1(t), \dots, X_d(t))^\top$.

De surcroît, les fonctions ϕ et $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_d)^\top$ doivent résoudre le système d'équations de Riccati suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, u) = \frac{1}{2} \psi(t, u)^\top \mathbf{a} \psi(t, u) + b^\top \psi(t, u) \\ \phi(0, u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \psi_i(t, u) = \frac{1}{2} \psi(t, u)^\top \boldsymbol{\alpha}_i + \beta_i^\top \psi(t, u), \forall i \in \{1, \dots, d\} \\ \psi(0, u) = u. \end{cases}$$

Dans un contexte financier, l'affinité du processus de taux sans risque, $r(t)$, permet de simplifier l'actualisation. Un modèle de taux courts est dit affine si le modèle est de la forme

$$r(t) = c + \gamma^\top X(t), \forall t \in \mathbb{R}_+$$

pour $c \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}^d$ et X un processus affine.

Par exemple, dans le [Modèle de Vasicek](#),

- X est solution de
$$\begin{cases} dX(t) = (\kappa \mu_r - \kappa X(t)) dt + \sigma_r dZ(t), \\ X(0) = r(0) \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
- $c = 0$, et
- $\gamma = 1$.

Ainsi, la [Proposition 3](#) sur la page suivante est applicable à la [section 4.3.1](#).

Proposition 3
Fonction caractéristique avec actualisation dans un modèle affine de taux sans risque

Soient :

- $\tau \in \mathbb{R}_+$;
- X un processus affine, de la forme précisée dans la Proposition 2 de ce chapitre ; et
- $r(t)$ le taux sans risque à l'instant t tel que

$$r(t) = c + \gamma^\top X(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Si $\mathbb{E} \left[e^{-\int_0^\tau r(s) ds} \right] < \infty$, alors la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, u) = \frac{1}{2} \psi(t, u)^\top \mathbf{a} \psi(t, u) + b^\top \psi(t, u) - c \\ \phi(0, u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \psi_i(t, u) = \frac{1}{2} \psi(t, u)^\top \alpha_i + \beta_i^\top \psi(t, u) - \gamma, \quad \forall i \in \{1, \dots, d\} \\ \psi(0, u) = u. \end{cases}$$

existe et est unique pour $u = 0$ et $t \in [0, \tau]$.

Ainsi, $\forall t \leq T \leq \tau, \forall u \in i\mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} e^{u^\top X(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{\phi(T-t, u) + \psi(T-t, u)^\top X(t)}.$$

4.3 Modélisation avec un processus mixte saut-diffusion

Dans cette section est approfondie une extension de l'article de recherche de [Ballotta et Kyriakou \(2015\)](#), qui réunit notamment les nouveautés suivantes :

- l'inclusion de dette *senior* aux obligations convertibles, d'actions privilégiées et d'options sur actions dans la structure de capital de la société émettrice ; et
- une proposition de valorisation scindée pour les composantes d'une obligation convertible.

4.3.1 Formulation du modèle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q}, \mathbb{F})$ un espace de probabilité filtré, avec \mathbb{Q} la mesure de probabilité risque-neutre et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une filtration. Il sera présumé que toute variable aléatoire évoquée par la suite appartient à cet espace filtré.

Modèle du taux sans risque

Dans le cadre du mémoire présent, le taux court sans risque à un instant $t \in \mathbb{R}_+$, noté ici par $r(t)$, est supposé évoluer selon le modèle de [Vasicek \(1977\)](#). La valeur de $r(t)$ correspond au taux d'intérêt théorique d'une obligation zéro-coupon de nominal 1 et de maturité T lorsque $T \rightarrow t^+$.

Modèle de Vasicek

Dynamique du taux sans risque

Selon le modèle de Vasicek du taux sans risque, $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$dr(t) = \kappa [\mu_r - r(t)] dt + \sigma_r dZ_t^r \quad (4.1)$$

où :

- κ , μ_r , et σ_r sont des constantes réelles strictement positives ; et
- $Z^r = (Z_t^r)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard sous la mesure \mathbb{Q} et adapté à une filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ telle que $\mathcal{G}_t \subsetneq \mathcal{F}_t$.

Ce modèle a été choisi surtout en raison de sa forme affine, qui permet l'utilisation des propriétés évoquées à la [sous-section 4.2.2](#) pour la couple des facteurs de risque.

Par ailleurs, grâce à la forme affine du modèle de Vasicek, il est possible d'explicitier le prix d'une obligation zéro-coupon. Notons $P(t, T)$ le prix d'une telle obligation de maturité $T \geq t$ et de nominal 1 à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$. Alors,

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid \mathcal{G}_t \right) \\ &= e^{-A_2(T-t)r(t) + A_1(T-t)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

avec
$$\begin{cases} A_2 : \tau \mapsto \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau}) \text{ et} \\ A_1 : \tau \mapsto \left(A_2(\tau) - \tau \right) \left(\mu_r - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} \right) - \frac{\sigma_r^2}{4\kappa} A_2(\tau)^2. \end{cases}$$

Modèle de la valeur de la société

Ce modèle repose sur l'hypothèse que la valeur des actifs à un instant $t \in \mathbb{R}_+$, notée pour toute la suite par $W(t)$, est une variable aléatoire de même distribution que l'exponentiel d'un processus de diffusion avec des sauts aléatoires.

En effet, nous définissons

$$\begin{aligned} W(t) &= \exp^{Y(t)} \\ &= \exp \left(\tilde{Y}(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} X_k - \lambda \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^X - 1]t \right) \\ &= \exp \left(\ln [W(0)] + \int_0^t \left(r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) ds + \sigma Z_t^W + \sum_{k=1}^{N(t)} X_k - \lambda \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^X - 1]t \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

où :

- $N = (N(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité $\lambda \in \mathbb{R}_+$;
- $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à une variable X dont la fonction caractéristique est $\varphi_X : u \mapsto \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{iuX})$;
- $r(s)$ est le **taux sans risque** à l'instant s ;
- σ est une constante réelle strictement positive ; et
- $Z^W = (Z_t^W)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard sous la mesure \mathbb{Q} et adapté à la filtration \mathbb{G} .

Les facteurs aléatoires N , Z^W , et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont supposés mutuellement indépendants.

De surcroît, le coefficient de corrélation de Pearson entre les processus Z^W et Z^r est constant et égal à $\rho \in [-1, 1]$. En d'autres termes,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [Z_t^W Z_t^r] = \rho t.$$

Pour chaque t tel que $N(t) > \lim_{u \rightarrow t^-} N(u)$, ce qui traduit l'occurrence d'un saut du processus de Poisson à l'instant t , la valeur de la société satisfait

$$W(t) = W(t^-) e^{X_{N(t)}}.$$

Ainsi, les sauts du processus N induisent des chocs proportionnels à la valeur de la société. D'autre part, la valeur de la société entre les sauts de N est donnée par

$$W(t) = W(0) \exp \left(\int_0^t \left(r(s) - \lambda [\varphi_X(-i) - 1] - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) ds + \sigma Z_t^W \right),$$

ce qui correspond exactement à un mouvement brownien géométrique. Cette combinaison d'un processus de diffusion avec des chocs imprévisibles caractérise un processus dit mixte saut-diffusion, aussi appelé processus de diffusion à sauts.

Il est également à noter que l'équation 4.3 peut être ré-exprimée sous forme différentielle. En effet, la valeur des actifs de la société dans ce modèle est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dW(t) = W(t^-) \left(r(t) - \lambda \left[\varphi_X(-i) - 1 \right] \right) dt + \sigma W(t^-) dZ_t^W + W(t^-) (e^X - 1) dN(t). \quad (4.4)$$

Lorsque X est issue d'une loi normale, la solution de cette équation est équivalente au processus de diffusion à sauts introduit par Merton (1976).

Il est aussi commun de choisir X issue d'un mélange de lois exponentielles dans le scénario où la probabilité (ou l'ampleur) d'un choc négatif diffère significativement de la probabilité (ou l'ampleur respectivement) d'un choc positif. Un tel choix est présenté par Kou (2002), où une probabilité p_x et des intensités η_1 et η_2 sont définies de sorte que X sera de loi $\text{Exp}(\eta_1)$ avec probabilité p_x et $-X$ sera de loi $\text{Exp}(\eta_2)$ avec probabilité $1 - p_x$. S'il en est ainsi,

$$\varphi_X(u) = \frac{p_x \eta_1}{\eta_1 - iu} + \frac{(1 - p_x) \eta_2}{\eta_2 + iu}.$$

Dans tous les cas, les termes de dérive et de diffusion de la valeur de la société sont des fonctions linéaires de W . De ce fait, W est un processus affine.

Par ailleurs, il est utile de remarquer que le terme $\lambda \left[\varphi_X(-i) - 1 \right]$ dans la dérive de W est égal à l'espérance du montant d'un choc généré par le processus de Poisson. La soustraction de ce terme de la dérive permet donc de maintenir la propriété de martingalité en absence d'opportunité d'arbitrage, où

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} W(T) \mid \mathcal{F}_t \right] = W_t, \quad \forall (t, T) \in \mathbb{R}_+^2 : t < T.$$

Fonction caractéristique des facteurs aléatoires

Conformément à l'équation 4.3, on définit :

- Y par le processus du logarithme de valeur de la société ; et
- \tilde{Y} par le mouvement brownien qui est inclus dans Y .

Alors, en négligeant les sauts du processus de Poisson, la dynamique des facteurs de risque est donnée par

$$\begin{aligned} dr(t) &= \kappa(\mu_r - r(t))dt + \sigma_r dZ_t^{(1)}, \text{ et} \\ d\tilde{Y}(t) &= \left(r(t) - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma \left(\rho dZ_t^{(1)} + \sqrt{1 - \rho^2} dZ_t^{(2)}\right), \end{aligned}$$

où $Z_t^{(1)}$ et $Z_t^{(2)}$ sont deux mouvements browniens indépendants.

En utilisant les notations de la Proposition 2,

$$b = \begin{pmatrix} \kappa\mu_r \\ -\frac{\sigma^2}{2} \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} -\kappa \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \beta_2 = 0.$$

La matrice de diffusion \mathbf{a} correspond dans le cas de notre modélisation à

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & \sigma_r\sigma\rho \\ \sigma_r\sigma\rho & \sigma^2 \end{pmatrix},$$

tandis que les coefficients matriciels α_1 et α_2 sont nuls.

La première étape consiste en la vérification de la compréhension de la méthode par la mise en oeuvre des calculs de Ballotta et Kyriakou. L'objectif est alors de calculer

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^T r(s)ds + iu_1 r(T) + iu_2 \tilde{Y}(T) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

La Proposition 3 justifie l'existence des fonctions ψ_1 , ψ_2 et ϕ telles que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds + iu_1 r(T) + iu_2 \tilde{Y}(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = e^{\phi(T-t, u_1, u_2) + \psi_1(T-t, u_1, u_2)r(t) + iu_2 \tilde{Y}(t)},$$

où les fonctions ψ_1 , ψ_2 et ϕ vérifient le système d'équations de Riccati suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, u) = \frac{1}{2} \psi(t, u)^\top \mathbf{a} \psi(t, u) + b^\top \psi(t, u) - 0, \\ \phi(0, u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(t, u) = \beta_1^\top \psi(t, u) - 1, \\ \frac{\partial}{\partial t} \psi_2(t, u) = 0, \\ \psi(0, u) = u. \end{cases}$$

On en déduit d'abord que $\psi_2(t, u_2) = u_2$. Il s'ensuit que

$$\frac{\partial \psi_1(t, u)}{\partial t} = -\kappa \psi_1(t, u) + u_2 - 1.$$

Un travail d'intégration rend

$$\psi_1(t, u_1, u_2) = u_1 e^{-\kappa t} + (u_2 - 1) \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa}.$$

Par conséquent, il est possible de passer au calcul de la dérivée partielle de ϕ , avec

$$\psi(t, u)^\top \mathbf{a}\psi(t, u) = \sigma_r^2 \psi_1^2 + 2\sigma_r \sigma \rho \psi_1 \psi_2 + \sigma^2 \psi_2.$$

Ainsi,

$$\frac{\partial \phi(t, u)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma_r^2 \psi_1^2 + \psi_1 (\sigma_r \sigma \rho u_2 + \kappa \mu_r) + \frac{1}{2} \sigma^2 u_2 (u_2 - 1).$$

En intégrant entre 0 et t ,

$$\phi(t, u_1, u_2) = \frac{1}{2} \sigma_r^2 \int_0^t \psi_1^2(s, u_1, u_2) ds + (\sigma_r \sigma \rho u_2 + \kappa \mu_r) \int_0^t \psi_1(s, u_1, u_2) ds + \frac{1}{2} \sigma^2 u_2 (u_2 - 1) t.$$

Pour se convaincre, la deuxième intégrale vaut :

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi_1(s, u_1, u_2) ds &= u_1 \int_0^t e^{-\kappa s} ds + \frac{u_2 - 1}{\kappa} \int_0^t (1 - e^{-\kappa s}) ds, \\ &= u_1 \left[-\frac{e^{-\kappa s}}{\kappa} \right]_0^t + \frac{u_2 - 1}{\kappa} \left[s + \frac{e^{-\kappa s}}{\kappa} \right]_0^t, \\ &= u_1 \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} + \frac{u_2 - 1}{\kappa^2} (t\kappa + e^{-\kappa t} - 1), \end{aligned}$$

ce qui correspond au deuxième terme de la fonction ψ_0 donnée par Ballotta et Kyriakou lorsque $(u_1, u_2) \in (i\mathbb{R})^2$.

Ainsi, $\forall (t, T) \in \mathbb{R}_+^2 : t < T$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds + iu_1 r(T) + iu_2 \tilde{Y}(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{\psi_0(T-t, u_1, u_2) + \psi_1(T-t, u_1, u_2) r(t) + iu_2 \tilde{Y}(t)}, \quad (4.5)$$

avec la définition des applications $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^2) \rightarrow \mathbb{C}$ qui suivent :

$$\begin{aligned} &— \psi_1 : (t, u_1, u_2) \mapsto iu_1 e^{-\kappa t} + (iu_2 - 1) A_2(t), \text{ et} \\ &— \psi_0 : (t, u_1, u_2) \mapsto \frac{\sigma_r^2}{2} \left[\frac{(iu_1)^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) + iu_1 (iu_2 - 1) A_2(t)^2 + \frac{(iu_2 - 1)^2}{2\kappa^3} (2\kappa t - 3 + \right. \\ &\quad \left. 4e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) \right] + (iu_2 \rho \sigma \sigma_r + \kappa \mu_r) \left[iu_1 A_2(t) + \frac{iu_2 - 1}{\kappa} (t - A_2(t)) \right] + \\ &\quad \frac{\sigma^2}{2} (iu_2) (iu_2 - 1) t. \end{aligned}$$

En raison de l'indépendance de la variable X avec les processus \tilde{Y} et r , il est possible d'inclure les sauts dans la fonction caractéristique précédente. Concrètement,

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds + iu_1 r(T) + iu_2 Y(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds + iu_1 r(T) + iu_2 \tilde{Y}(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{iu_2 \left(\sum_{k=1}^{N(T)} X_k - \lambda T [\varphi_X(-i) - 1] \right)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{\psi_0(T-t, u_1, u_2) + \psi_1(T-t, u_1, u_2)r(t) + iu_2 Y(t)} e^{-iu_2 \lambda (T-t) (\varphi_X(-i) - 1)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{iu_2 \left(\sum_{k=N(t)}^{N(T)} X_k \right)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{\psi_0(T-t, u_1, u_2) + \psi_1(T-t, u_1, u_2)r(t) + iu_2 Y(t) + \psi_2(T-t, u_2)}.
 \end{aligned}$$

en définissant $\psi_2 : (t, u) \mapsto \lambda t [\varphi_X(u) - 1 - iu(\varphi_X(-i) - 1)]$.

Cette définition résulte de l'égalité

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{iu_2 \left(\sum_{k=N(t)}^{N(T)} X_k \right)} \mid \mathcal{F}_t \right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{iu_2 \left(\sum_{k=1}^{N(T)-N(t)} X_k \right)} \right] \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(N(T) - N(t) = n) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{iu_2 \left(\sum_{k=1}^{N(T)-N(t)} X_k \right)} \mid N(T) - N(t) = n \right] \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(N(T) - N(t) = n) \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{iu_2 X} \right] \right)^n \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\lambda [T-t])^n e^{-\lambda(T-t)}}{n!} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{iu_2 X} \right] \right)^n \\
 &= e^{-\lambda(T-t)} e^{\lambda(T-t)\varphi_X(u_2)}.
 \end{aligned}$$

Remarque

Fonction caractéristique des facteurs aléatoires

En effet, l'expression suivante de la fonction caractéristique qui intègre l'actualisation sera un élément intégral à la valorisation dans ce modèle.

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds + iu_1 r(T) + iu_2 Y(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{\psi_0(T-t, u_1, u_2) + \psi_1(T-t, u_1, u_2)r(t) + iu_2 Y(t) + \psi_2(T-t, u_2)} \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Spécificités à l'obligation convertible

Soit une obligation convertible en actions ordinaires de valeur nominale F et de maturité T_{CB} . Pour la suite, le raisonnement sera effectué avec le temps restant jusqu'à la maturité de l'obligation, $\tau := T_{CB} - t$, pour un instant $t \in \mathbb{R}_+$ donné.

Malgré une valorisation en temps continu, il est supposé dans ce modèle que l'ensemble de dates de décision possibles des parties à l'obligation convertible correspond aux points $(\tau_k^{CB})_{0 \leq k \leq n_{CB}}$ d'une subdivision de l'intervalle $[0, T_{CB}]$. Plus précisément, on fera l'hypothèse que

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n_{CB}\}, \quad \tau_k^{CB} = T_{CB} \left[1 - k(\Delta\tau_{CB}) \right], \quad \text{avec } (\Delta\tau_{CB}) = \frac{T_{CB}}{n_{CB}}.$$

Le choix de n_{CB} doit être tel qu'il existe un élément de la subdivision pour toute date de paiement de coupon ou de dividende.

Pour la facilité de notation, soient les ensembles $I_{CB}, J_{CB} \subset \{0, 1, \dots, n_{CB}\}$ tels que :

- $\forall j \in J_{CB}, \tau_j^{CB}$ correspond à une date de paiement de coupon de l'obligation convertible, et
- $\forall i \in I_{CB}, \tau_i^{CB}$ correspond à une date de paiement de dividende.

Notons de plus,

- $C_{\tau_k}^{CB}$ le paiement total des coupons à l'ensemble des porteurs de l'obligation convertible à la date τ_k^{CB} , et
- $D_{\tau_k}^{CB}$ le paiement total des dividendes à l'ensemble des porteurs d'actions ordinaires à la date τ_k^{CB} .

Autrement dit,

$$\begin{cases} C_{\tau_k}^{CB} > 0 \text{ si } k \in J_{CB} \\ C_{\tau_k}^{CB} = 0 \text{ si } k \notin J_{CB} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D_{\tau_k}^{CB} > 0 \text{ si } k \in I_{CB} \\ D_{\tau_k}^{CB} = 0 \text{ si } k \notin I_{CB} \end{cases}.$$

Ainsi, ce modèle ne nécessite pas d'hypothèse sur la régularité des versements de coupon ou de distribution de dividende.

Par ailleurs, les obligations convertibles incluent généralement une provision permettant le remboursement anticipé par l'émetteur de la valeur nominale, comme indiqué dans la [sous-section 2.2.2](#). L'existence d'une fonction déterministe $K : [0, T_{CB}] \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui décrit le montant contractuel de ce remboursement anticipé est admise dans ce modèle. Si le marché financier était sans aucune imperfection, la stratégie optimale théorique de l'émetteur serait d'exercer une telle provision à l'instant $t \in [0, T_{CB}]$ dès que la valeur de conversion atteint le prix $K(t)$. (Ingersoll, 1977) Quoi qu'il en soit, les recherches empiriques d'Ingersoll et d'autres auteurs aux années 1990 témoignent d'une stratégie différente, où l'exercice du remboursement anticipé est observé lorsque la valeur de conversion excède le prix stipulé au contrat.

Il s'avère que le délai entre le remboursement anticipé observé et le moment théorique du remboursement est en grande partie expliqué par une période de notice du *call* et par une marge de sécurité. Cela signifie que l'émetteur attend de notifier son choix de remboursement anticipé jusqu'à ce que la valeur de conversion dépasse suffisamment le prix donné par la fonction K pour que la valeur de conversion à l'échéance de la période de notice soit toujours supérieure au prix de *call* avec une probabilité acceptable pour l'émetteur.

Asquith et Mullins Jr (1991) ont également mis en évidence que des émetteurs retardent le remboursement anticipé des obligations convertibles pour des raisons fiscales, surtout si le moment théoriquement optimal de ce remboursement est proche d'une distribution de dividendes dont le coût net d'impôts est supérieur au coût net d'impôts des coupons.

Par conséquent, ce modèle admet l'hypothèse qu'il existe $\nu \in [0, 1[$ une marge de sécurité qui résume le comportement à l'égard du remboursement anticipé. En d'autres termes, l'émetteur exerce la provision de *call* aussitôt que la valeur de conversion surpasse le prix $(1 + \nu)K(t)$. Il convient donc de noter

- $\tau^c \in [0, T_{CB}[$ le temps d'arrêt qui correspond à l'instant aléatoire où la provision de *call* de l'obligation convertible est exercée ; et
- s_c la période de notice, soit le délai de temps entre le préavis d'exercice de la provision et l'exercice effectif de la provision.

4.3.2 Intégration de l'analyse en cascade

Hypothèses de structure de capital

Considérons que la structure de capital de la société comprend un nombre m_B d'obligations classiques (sans conversion) de valeur nominale F_B et de maturité $T \geq T_{CB}$. De façon analogue à la section 4.3.1, l'ensemble de dates de décision et de paiements discrète concernant l'obligation classique est donné par $(\tau_k)_{0 \leq k \leq n}$, de sorte que

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \tau_k = T \left[1 - k(\Delta\tau) \right], \quad \text{avec } (\Delta\tau) = \frac{T}{n}.$$

La subdivision $(\tau_k)_{0 \leq k \leq n}$ doit non seulement inclure toute date de coupon des obligations classiques, mais également toute date de paiement discrète pertinente aux obligations convertibles. De ce fait, n est choisi de manière à obtenir $(\tau_k^{CB})_{0 \leq k \leq n_{CB}} \subset (\tau_k)_{0 \leq k \leq n}$. On choisit également de noter :

- $k^* \in \{0, 1, \dots, n\}$ tel que $\tau_{k^*} = \tau_0^{CB} = T_{CB}$;
- $I, J \subset \{0, 1, \dots, n\}$ l'équivalent des ensembles I_{CB}, J_{CB} , désormais adaptés à la subdivision $(\tau_k)_{0 \leq k \leq n}$;
- $J_B \subset \{0, 1, \dots, n\}$ l'ensemble tel que $\forall j \in J_B, \tau_j$ correspond à une date de coupon de l'obligation classique ;
- $C_{\tau_k}^B$ et C_{τ_k} le paiement total des coupons à l'ensemble des porteurs de l'obligation classique et à l'ensemble des porteurs de l'obligation convertible respectivement à la date τ_k ;
- D_{τ_k} le paiement total des dividendes à l'ensemble des porteurs d'actions ordinaires à la date τ_k ; et
- $\tilde{B}(t)$ le prix d'une obligation classique à l'instant $t \in [0; T]$.

Il est supposé que les m_B obligations classiques sont de *seniority* plus importante que les obligations convertibles. Il convient aussi de noter m_{CB} le nombre d'obligations convertibles avec les caractéristiques décrites à la section 4.3.1. Ainsi, $c_{\tau_k}^B := \frac{C_{\tau_k}^B}{m_B}$ et $c_{\tau_k} := \frac{C_{\tau_k}}{m_{CB}}$ correspondent aux montants de coupon d'une obligation classique et convertible respectivement à la date τ_k .

Par ailleurs, on suppose que la structure de capital inclut un nombre m_P d'actions privilégiées, toutes de même classe, convertibles en actions.³ Le privilège de liquidité de l'ensemble des actions privilégiées sera noté L , de telle façon que $\ell_P := \frac{L}{m_P}$ correspond au privilège de liquidité par action privilégiée. Chaque action privilégiée peut être convertie en $\beta \in \mathbb{N}^*$ nouvelles actions ordinaires à n'importe quel moment. Le nombre d'actions ordinaires de la société sans dilution est donnée par m_A .

Enfin, nous ferons l'hypothèse que m_C options d'achat ayant l'action ordinaire comme sous-jacente sont incluses dans la structure de capital. Chaque option d'achat a un prix d'exercice égal à K , une parité 1 : 1 en cas d'exercice, et une maturité égale à T_{CB} .

Fonctions des flux de récompense — $H_{(k)}$

Notons $H_{(k)}^x$ la fonction des flux de récompense du contrat (soit la fonction des *payoffs*) à l'instant τ_k pour un porteur du titre x . Plus précisément, nous choisissons la notation telle que

- $H_{(k)}^B$ décrit les flux réels pour un porteur de l'obligation classique,
- $H_{(k)}^{CB}$ décrit les flux réels pour un porteur de l'obligation convertible,
- $H_{(k)}^P$ décrit les flux réels pour un actionnaire privilégié,
- $H_{(k)}^A$ décrit les flux réels pour un actionnaire ordinaire, et
- $H_{(k)}^C$ décrit les flux réels pour un porteur de l'option d'achat sur actions ordinaires.

Cette fonction sera définie avec les arguments $r(\tau_k)$ et $Y(\tau_k)$.

Pour simplifier la suite, on choisit de noter

- $v_1 = \min\left(K; \frac{1}{\beta}\ell_P; F + c_{\tau_{k^*}}\right)$ la première valeur critique d'une action ordinaire par rapport à la conversion des autres titres ;
- $v_3 = \max\left(K; \frac{1}{\beta}\ell_P; F + c_{\tau_{k^*}}\right)$ la troisième valeur critique d'une action ordinaire ;
- v_2 la deuxième valeur critique de manière que $v_1 \leq v_2 \leq v_3$; et
- x_i de manière que $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $x_i = \begin{cases} CB & \text{si } v_i = F + c_{\tau_{k^*}}, \\ P & \text{si } v_i = \frac{1}{\beta}\ell_P, \text{ et} \\ C & \text{si } v_i = K. \end{cases}$

Il convient de faire d'abord une analyse en cascade à la maturité $T_{CB} = \tau_{k^*}$ de l'obligation convertible afin d'explicitier les fonctions $H_{(k^*)}^x$.

1. Le premier *breakpoint* B_1 est donné par $B_1 = m_B \tilde{B}(\tau_{k^*})$, soit la valeur totale de la dette *senior* à l'instant τ_{k^*} comme le remboursement de cette dette est prioritaire. La détermination du prix $\tilde{B}(\tau_{k^*})$ sera détaillée ultérieurement.
2. Le deuxième *breakpoint* B_2 est donné par $B_2 = B_1 + mF + C_{\tau_{k^*}}$, ce qui correspond à la valeur totale de dette de la société.
3. $B_3 = B_2 + L$.

Une fois que l'intégralité de la dette à l'instant τ_{k^*} est couverte, la prochaine priorité est la couverture du privilège de liquidité des actions privilégiées.

3. L'analyse en cascade permet d'adapter cette hypothèse à plusieurs classes d'actions privilégiées, le cas échéant.

$$4. B_4 = B_3 + m_A v_1.$$

Il s'agit de la valeur de la société telle que l'action ordinaire atteint la valeur v_1 , ce qui entraîne la conversion des titres de la classe x_1 .

$$5. B_5 = B_4 + (m_A + m_{x_1})(v_2 - v_1)$$

À ce *breakpoint*, l'action ordinaire atteint la valeur v_2 , induisant la conversion de la classe x_2 des titres.

$$6. B_6 = B_5 + (m_A + m_{x_1} + \bar{m}_{x_2})(v_3 - v_2).$$

À partir de ce *breakpoint*, tous les actionnaires jouissent de la richesse supplémentaire de la société au prorata du nombre d'actions ordinaires pleinement dilué.

Notons $m = m_A + m_C + m_{CB} + m_P$. Si par exemple, $K < F + c_{\tau_{k^*}} < \frac{1}{\beta} \ell_P$, alors,

$$\begin{aligned}
 H_{(k^*)}^B(r(T_{CB}), Y(T_{CB})) &= \begin{cases} \tilde{B}(T_{CB}) & \text{si } e^{Y(T_{CB})} \geq m_B \tilde{B}(T_{CB}) ; \\ \frac{1}{m_B} e^{Y(T_{CB})} & \text{si } e^{Y(T_{CB})} < m_B \tilde{B}(T_{CB}) \end{cases} ; \\
 H_{(k^*)}^{CB}(r(T_{CB}), Y(T_{CB})) &= \begin{cases} \frac{1}{\beta} \ell_P + \frac{m_{CB}}{m} (e^{Y(T_{CB})} - B_6) & \text{si } e^{Y(T_{CB})} \geq B_6 \\ v_2 + \frac{m_{CB}}{m_A + m_C + m_{CB}} (e^{Y(T_{CB})} - B_5) & \text{si } B_5 \leq e^{Y(T_{CB})} < B_6 \\ F + c_{\tau_{k^*}} & \text{si } B_2 \leq e^{Y(T_{CB})} < B_5 ; \\ \frac{1}{m_{CB}} (e^{Y(T_{CB})} - B_1) & \text{si } B_1 \leq e^{Y(T_{CB})} < B_2 \\ 0 & \text{si } e^{Y(T_{CB})} < B_1 \end{cases} ; \\
 H_{(k^*)}^P(r(T_{CB}), Y(T_{CB})) &= \begin{cases} \frac{1}{\beta} \ell_P + \frac{m_P}{m} (e^{Y(T_{CB})} - B_6) & \text{si } e^{Y(T_{CB})} \geq B_6 \\ \frac{1}{\beta} \ell_P & \text{si } B_3 \leq e^{Y(T_{CB})} < B_6 ; \\ \frac{1}{m_P} (e^{Y(T_{CB})} - B_2) & \text{si } B_2 \leq e^{Y(T_{CB})} < B_3 \\ 0 & \text{si } e^{Y(T_{CB})} < B_2 \end{cases} ; \\
 H_{(k^*)}^A(r(T_{CB}), Y(T_{CB})) &= \begin{cases} \frac{1}{\beta} \ell_P + \frac{m_A}{m} (e^{Y(T_{CB})} - B_6) & \text{si } e^{Y(T_{CB})} \geq B_6 \\ v_2 + \frac{m_A}{m_A + m_C + m_{CB}} (e^{Y(T_{CB})} - B_5) & \text{si } B_5 \leq e^{Y(T_{CB})} < B_6 \\ K + \frac{m_A}{m_A + m_C} (e^{Y(T_{CB})} - B_4) & \text{si } B_4 \leq e^{Y(T_{CB})} < B_5 ; \\ \frac{1}{m_A} (e^{Y(T_{CB})} - B_3) & \text{si } B_3 \leq e^{Y(T_{CB})} < B_4 \\ 0 & \text{si } e^{Y(T_{CB})} < B_3 \end{cases} ; \\
 \text{et } H_{(k^*)}^C(r(T_{CB}), Y(T_{CB})) &= \begin{cases} \frac{1}{\beta} \ell_P - K + \frac{m_C}{m} (e^{Y(T_{CB})} - B_6) & \text{si } e^{Y(T_{CB})} \geq B_6 \\ v_2 - K + \frac{m_C}{m_A + m_C + m_{CB}} (e^{Y(T_{CB})} - B_5) & \text{si } B_5 \leq e^{Y(T_{CB})} < B_6 \\ \frac{m_C}{m_A + m_C} (e^{Y(T_{CB})} - B_4) & \text{si } B_4 \leq e^{Y(T_{CB})} < B_5 \\ 0 & \text{si } e^{Y(T_{CB})} < B_4 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Ainsi, en suivant une analyse en cascade, il est possible de préciser la valeur de conversion d'un titre de classe x en fonction de la valeur de la société. Nous notons $\gamma_x[r(\tau_k), Y(\tau_k)]$ une telle fonction.

Il sera utile de distinguer cette valeur de conversion de la valeur de l'ensemble du titre pour les obligations convertibles en particulier. On notera donc que, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$H_{(k)}^{CB} [r(\tau_k), Y(\tau_k)] = \gamma_{CB} [r(\tau_k), Y(\tau_k)] + \tilde{B}_{CB} [r(\tau_k), Y(\tau_k)]$$

où \tilde{B}_{CB} est assimilable à la partie obligataire de l'obligation convertible. Dans le cas de l'exemple sur la page précédente,

$$\tilde{B}_C [r(\tau_{k^*}), Y(\tau_{k^*})] = \begin{cases} F + c_{\tau_{k^*}} & \text{si } e^{Y(\tau_{k^*})} \geq B_2, \\ \frac{1}{m_{CB}} (e^{Y(\tau_{k^*})} - B_1) & \text{si } B_1 \leq e^{Y(\tau_{k^*})} < B_2, \\ 0 & \text{si } e^{Y(\tau_{k^*})} < B_1, \end{cases}$$

$$\text{et } \gamma_{CB} [r(\tau_{k^*}), Y(\tau_{k^*})] = \begin{cases} v_3 - v_2 + \frac{m_{CB}}{m} (e^{Y(\tau_{k^*})} - B_6) & \text{si } e^{Y(\tau_{k^*})} \geq B_6 \\ \frac{m_{CB}}{m_A + m_C + m_{CB}} (e^{Y(\tau_{k^*})} - B_5) & \text{si } B_5 \leq e^{Y(\tau_{k^*})} < B_6 \\ 0 & \text{si } e^{Y(\tau_{k^*})} < B_5. \end{cases}$$

Ainsi, il convient de noter

$$\begin{aligned} - H_{(k)}^{CB} [r(\tau_k), Y(\tau_k)] &= \gamma_{CB} [r(\tau_k), Y(\tau_k)] \text{ et} \\ - H_{(k)}^{CB} [r(\tau_k), Y(\tau_k)] &= \tilde{B}_C [r(\tau_k), Y(\tau_k)] \end{aligned}$$

par la suite.

D'autre part, notons $CC(\tau_k)$ le coupon couru de l'obligation convertible à un instant τ_k . Si la provision de *call* est exercée au moment $\tau_k < T_{CB} - s^c$, alors, en tenant compte des caractéristiques explicitées à la [section 4.3.1](#), la valeur de l'obligation convertible est donnée par

$$\begin{aligned} & Q_{(k)}(r(\tau_k), Y(\tau_k)) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_{\tau_k}^{\tau_k + s^c} r(s) ds} \max \left(\gamma_{CB} [r(\tau_k + s^c), Y(\tau_k + s^c)], K(\tau_k) + CC(\tau_k + s^c) \right) \right]. \end{aligned}$$

Comme pour $H_{(k)}^{CB}$, il est utile de décomposer cette valeur selon les deux composantes de l'obligation convertible. En effet, nous proposons,

$$Q_{(k)}(r(\tau_k), Y(\tau_k)) = Q_{(k)}^C(r(\tau_k), Y(\tau_k)) + Q_{(k)}^B(r(\tau_k), Y(\tau_k))$$

où

$$\begin{aligned} - Q_{(k)}^B(r(\tau_k), Y(\tau_k)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_{\tau_k}^{\tau_k + s^c} r(s) ds} (K(\tau_k) + CC(\tau_k + s^c)) \right] \text{ et} \\ - Q_{(k)}^C(r(\tau_k), Y(\tau_k)) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_{\tau_k}^{\tau_k + s^c} r(s) ds} \left(\gamma_{CB} [r(\tau_k + s^c), Y(\tau_k + s^c)] - K(\tau_k) - CC(\tau_k + s^c) \right)^+ \right]. \end{aligned}$$

Il est également possible de définir des fonctions $G_{(k)}^x$, qui correspondent à la valeur en absence d'opportunité d'arbitrage du titre x à l'instant τ_k . Il s'agit d'une espérance des flux de la date τ_k actualisés au taux sans risque jusqu'à la date τ_{k+1} . Avec ces fonctions $G_{(k)}$ et $Q_{(k)}$, la valeur de l'obligation convertible pour $\tau_k < T_{CB}$, soit pour $k > k^*$, peut être explicitée.

Valorisation de l'obligation convertible

Par linéarité de l'espérance, la fonction $G_{(k)}^{CB}$ peut être décomposée en fonctions $G_{(k)}^{CB}$ et $G_{(k)}^{CB}$ qui correspondent à la valeur de continuation de l'option de conversion et de la partie obligataire respectivement. Ainsi, sauf où précisé, la valeur de chaque composante de l'obligation convertible satisfait les égalités qui suivent en remplaçant $Q_{(k)}$ et $G_{(k)}^{CB}$ par leur équivalent qui concerne seulement la composante.

1. Aucun de paiement de coupon ni de dividende

Ceci correspond à $k \notin (I \cup J \cup J_B)$. S'il en est ainsi,

$$H_{(k)}^{CB}(r(\tau_k), Y(\tau_k)) = \begin{cases} Q_{(k)}(r(\tau_k), Y(\tau_k)) & \text{si } \gamma_{CB}[r(\tau_k), Y(\tau_k)] \geq (1 + \nu)K(\tau_k), \\ G_{(k)}^{CB}(r(\tau_k), Y(\tau_k)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La valeur de l'obligation convertible correspond au prix précédent actualisé sauf en cas de remboursement anticipé, qui change la valeur des flux futurs attendu.

2. Paiement de coupon sans paiement dividende

Ceci correspond à $k \in J \setminus (I \cup J_B)$ si aucun coupon de la dette *senior* n'est versé au même instant τ_k .

En notant τ_k^+ l'instant immédiatement avant le paiement discrète,

$$H_{(k)}^{CB}(r(\tau_k), Y(\tau_k^+)) = \begin{cases} Q_{(k)}(r(\tau_k), \ln[e^{Y(\tau_k^+)} - C_{\tau_k}]) + c_{\tau_k} & \text{si } \gamma_{CB}[r(\tau_k), Y(\tau_k^+)] \geq (1 + \nu)K(\tau_k), \\ G_{(k)}^{CB}(r(\tau_k), \ln[e^{Y(\tau_k^+)} - C_{\tau_k}]) + c_{\tau_k} & \text{si } e^{Y(\tau_k^+)} \geq C_{\tau_k} \text{ et} \\ & \gamma_{CB}[r(\tau_k), Y(\tau_k^+)] < (1 + \nu)K(\tau_k), \\ \frac{1}{m_{CB}} e^{Y(\tau_k^+)} & \text{si } e^{Y(\tau_k^+)} < C_{\tau_k}. \end{cases}$$

On suppose que le coupon est reçu même si l'émetteur annonce l'exercice du remboursement anticipé. Si la valeur de la société ne suffit pour payer les coupons, le défaut est observé et la valeur de la société.

Si $k \in (J \cap J_B) \setminus I$, c'est-à-dire si un coupon pour l'obligation classique doit être versé au même instant, le paiement d'intérêt de la dette *senior* est prioritaire aux autres paiements.

En effet,

$$H_{(k)}^{CB}(r(\tau_k), Y(\tau_k^+)) = \begin{cases} Q_{(k)}(r(\tau_k), \ln[e^{Y(\tau_k^+)} - C_{\tau_k} - C_{\tau_k}^B]) + c_{\tau_k} & \text{si } \gamma_{CB}[r(\tau_k), Y(\tau_k^+)] \geq (1 + \nu)K(\tau_k), \\ G_{(k)}^{CB}(r(\tau_k), \ln[e^{Y(\tau_k^+)} - C_{\tau_k} - C_{\tau_k}^B]) + c_{\tau_k} & \text{si } e^{Y(\tau_k^+)} \geq C_{\tau_k}^B + C_{\tau_k} \text{ et} \\ & \gamma_{CB}[r(\tau_k), Y(\tau_k^+)] < (1 + \nu)K(\tau_k), \\ \frac{1}{m_{CB}} e^{Y(\tau_k^+)} & \text{si } C_{\tau_k}^B < e^{Y(\tau_k^+)} < C_{\tau_k}^B + C_{\tau_k}, \\ 0 & \text{si } e^{Y(\tau_k^+)} < C_{\tau_k}^B. \end{cases}$$

Si un coupon est payé seulement pour l'obligation classique (i.e. $k \in J_B \setminus (I \cup J)$), alors

$$H_{(k)}^{CB} \left(r(\tau_k), Y(\tau_k) \right) = \begin{cases} Q_{(k)} \left(r(\tau_k), Y(\tau_k) \right) & \text{si } \gamma_{CB} [r(\tau_k), Y(\tau_k)] \geq (1+\nu)K(\tau_k), \\ G_{(k)}^{CB} \left(r(\tau_k), Y(\tau_k) \right) & \text{si } e^{Y(\tau_k^+)} \geq C_{\tau_k}^B \text{ et} \\ & \gamma_{CB} [r(\tau_k), Y(\tau_k^+)] < (1+\nu)K(\tau_k), \\ 0 & \text{si } e^{Y(\tau_k)} < C_{\tau_k}^B. \end{cases}$$

3. Paiement de dividende sans paiement de coupon

Ceci correspond au cas $k \in I \setminus (J \cup J_B)$. Les porteurs des obligations convertibles pourraient convertir volontairement leurs dans ce cas de figure, avec

$$H_{(k)}^{CB} \left(r(\tau_k), Y(\tau_k^+) \right) = \max \left(G_{(k)}^{CB} \left(r(\tau_k), \ln \left[e^{Y(\tau_k^+)} - D_{\tau_k} \mathbf{1}_{\{Y(\tau_k^+) > \ln D_{\tau_k}\}} \right] \right); \gamma_{CB} \left[r(\tau_k), Y(\tau_k^+) \right] \right).$$

Nous proposons que la valeur des composantes de l'obligation convertible soit donné par

$$\begin{aligned} - H_{(k)}^{CB} \left[r(\tau_k), Y(\tau_k^+) \right] &= G_{(k)}^{CB} \left(r(\tau_k), \ln \left[e^{Y(\tau_k^+)} - D_{\tau_k} \mathbf{1}_{\{Y(\tau_k^+) > \ln D_{\tau_k}\}} \right] \right) \text{ et} \\ - H_{(k)}^{CB} \left[r(\tau_k), Y(\tau_k^+) \right] &= G_{(k)}^{CB} \left(r(\tau_k), \ln \left[e^{Y(\tau_k^+)} - D_{\tau_k} \mathbf{1}_{\{Y(\tau_k^+) > \ln D_{\tau_k}\}} \right] \right) + \\ &\quad \left(\gamma_{CB} \left(r(\tau_k), Y(\tau_k^+) \right) - G_{(k)}^{CB} \left(r(\tau_k), \ln \left[e^{Y(\tau_k^+)} - D_{\tau_k} \mathbf{1}_{\{Y(\tau_k^+) > \ln D_{\tau_k}\}} \right] \right) \right)^+ \end{aligned}$$

dans ce cas.

Par ailleurs, l'hypothèse que $(J \cup J_B) \cap I = \emptyset$ sera admis. Autrement dit, le paiement simultané de coupons et de dividendes n'est pas envisagé avec ce modèle.

Valorisation de l'obligation classique

Étant donné l'absence d'une provision de *call*, seule la fonction $G_{(k)}^B$ permet de définir la valeur de l'obligation classique à toute date τ_k pour $k \in \{k^*, k^* + 1, \dots, n\}$. En effet :

1. Lorsque aucun paiement de coupon sur la dette *senior* n'est versé, soit $\forall k \notin J_B$,

$$H_{(k)}^B \left(r(\tau_k), Y(\tau_k) \right) = G_{(k)}^B \left(r(\tau_k), Y(\tau_k) \right).$$

2. En cas de paiement de coupon, indépendamment des dividendes ou des coupons de l'obligation convertible, soit $\forall k \in J_B$,

$$H_{(k)}^B \left(r(\tau_k), Y(\tau_k^+) \right) = \begin{cases} G_{(k)}^B \left(r(\tau_k), \ln \left[e^{Y(\tau_k^+)} - C_{\tau_k}^B \right] \right) + c_{\tau_k}^B & \text{si } Y(\tau_k^+) \geq \ln C_{\tau_k}^B, \\ \frac{1}{m_B} e^{Y(\tau_k^+)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Valorisation des actions et des options sur actions

De façon analogue aux obligations classiques, la valeur des actions (privilegiées et ordinaires) et des options sur actions peuvent être explicitées à toute date τ_k pour $k \in \{k^*, k^* + 1, \dots, n\}$ étant donnée la valeur de continuation $G_{(k)}^x$.

1. En absence des dividendes et des coupons, soit $\forall k \notin (I \cup J \cup J_B)$,

$$H_{(k)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k)) = G_{(k)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k)), \quad \text{pour } x \in \{P, A, C\}.$$

2. En cas de paiement des coupons sans versement de dividendes, soit $\forall k \in (J \cup J_B) \setminus I$,

$$H_{(k)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k)) = \begin{cases} G_{(k)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k)) & \text{si } Y(\tau_k^+) \geq \ln(C_{\tau_k}^B + C_{\tau_k}), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $x \in \{P, A, C\}$.

3. En cas de versement de dividende sans coupon, soit $\forall k \in I \setminus (J \cup J_B)$,

$$H_{(k)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k^+)) = \max \left(G_{(k)}^x \left(r(\tau_k), \ln \left[e^{Y(\tau_k^+) - D_{\tau_k}} \mathbf{1}_{\{Y(\tau_k^+) > \ln D_{\tau_k}\}} \right] \right); \gamma_x \left[r(\tau_k), Y(\tau_k^+) \right] \right),$$

pour $x \in \{P, A, C\}$.

Les fonctions γ_x sont déterminables à l'issu d'une analyse en cascade des éléments de passif, comme pour la fonction $\gamma_{CB} \left[r(\tau_{k^*}), Y(\tau_{k^*}) \right]$ explicitée [précédemment](#).

4.3.3 Explication de la méthode de résolution

L'objet de cette sous-section est d'illustrer la façon théorique dont la valorisation des titres est déterminée dans ce modèle. La [section 4.4](#) précisera par la suite les démarches numériques de la résolution expliquée ici.

En premier lieu, il convient de définir formellement la fonction $G_{(k)}^x$ qui décrit la valeur de continuation des titres, où le porteur des titres ne prend pas de décision qui change les flux futurs. Soit E l'ensemble des classes dans le modèle. Alors, $\forall x \in E$ et $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$G_{(k+1)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k^+)) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} r(s) ds \right) H_{(k)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k^+)) \mid \mathcal{F}_{\tau_{k+1}} \right].$$

Il est possible de sortir l'intégrale stochastique de l'espérance avec un changement de numéraire au prix $B(t, \tau_k)$ à l'instant $t \in [\tau_{k+1}, \tau_k]$ d'une obligation zéro-coupon de maturité. Notons \mathbb{P}_n^* la mesure de probabilité qui résulte de ce changement de numéraire.

Alors, $\forall x \in E$ et $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,

$$G_{(k+1)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k^+)) = e^{A_1(\Delta\tau) - A_2(\Delta\tau)r(\tau_{k+1})} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n^*} \left[H_{(k)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k^+)) \mid \mathcal{F}_{\tau_{k+1}} \right]. \quad (4.7)$$

L'espérance dans l'équation 4.7 peut être réécrite sous forme d'une convolution dans \mathbb{R}^2 . Pour ce faire, définissons les fonctions suivantes :

— $\ell_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\ell_k\left(Y(\tau_k^+)\right) = Y(\tau_k) \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, où plus précisément,

$$\ell_k(y) = \begin{cases} y & \text{si } k \notin (I \cup J \cup J_B), \\ \ln(e^y - C_{\tau_k}) & \text{si } k \in J \setminus (I \cup J_B), \\ \ln(e^y - C_{\tau_k}^B) & \text{si } k \in J_B \setminus (I \cup J), \\ \ln(e^y - C_{\tau_k} - C_{\tau_k}^B) & \text{si } k \in (J \cap J_B) \setminus I, \\ \ln(e^y - D_{\tau_k} \mathbf{1}_{\{y > \ln D_{\tau_k}\}}) & \text{si } k \in I \setminus (J \cup J_B), \end{cases}$$

— $g_k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g_k(y_r, y) \longmapsto \ell_k(y) - A_1(\Delta\tau) + A_2(\Delta\tau)y_r$; et

— $g_{r,k} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $g_{r,k}(y_r) = y_r e^{-\kappa(\Delta\tau)}$.

Ces fonctions permettent la définition des variables aléatoires

— $Z_{r,k} := r(\tau_k) - g_{r,k+1}(r(\tau_{k+1}))$ et

— $Z_k := Y(\tau_k^+) - g_{k+1}(r(\tau_{k+1}), Y(\tau_{k+1}^+))$.

Notons $f_{(k)}$ et $f_{(k)}^*$ la densité conditionnelle du couple $(r(\tau_k), Y(\tau_k^+))$ et du couple $(Z_{r,k}, Z_k)$ respectivement sous \mathbb{P}_n^* par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{\tau_{k+1}}$.

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n^*} \left[H_{(k)}^x(r(\tau_k), Y(\tau_k^+)) \mid \mathcal{F}_{\tau_{k+1}} \right] &= \int_{\mathbb{R}^2} H_{(k)}^x(r, y) f_{(k)}(r, y) d(r, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} H_{(k)}^x \left[g_{r,k+1}(r(\tau_{k+1})) + z_r, g_{k+1}(r(\tau_{k+1}), Y(\tau_{k+1}^+)) + z \right] f_{(k)}^*(z_r, z) d(z_r, z). \end{aligned}$$

Pour toute la suite, l'intégrale ci-dessus sera notée par la fonction $\tilde{G}_{(k+1)}^x$ lorsqu'elle est évaluée au point $(g_{r,k+1}(r(\tau_{k+1})) + z_r, g_{k+1}(r(\tau_{k+1}), Y(\tau_{k+1}^+)) + z)$. Son calcul est explicité à la sous-section 4.4.2.

Par ailleurs, la densité $f_{(k)}^*$ qui définit la fonction $\tilde{G}_{(k+1)}^x$ est déterminée par la transformée de Fourier inverse de la fonction caractéristique de $(Z_{r,k}, Z_k)$. Il est utile de noter que cette fonction caractéristique ne dépend pas des facteurs aléatoires $(r(t), Y(t))$. En effet,

$$\begin{aligned} \varphi_{(Z_{r,k}, Z_k) \mid \mathcal{F}_{\tau_{k+1}}}(u_1, u_2) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n^*} \left[e^{iu_1 Z_{r,k} + iu_2 Z_k} \mid \mathcal{F}_{\tau_{k+1}} \right] \\ &= e^{-A_1(\Delta\tau) + A_2(\Delta\tau)r(\tau_{k+1})} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} r(s) ds + iu_1 Z_{r,k} + iu_2 Z_k} \mid \mathcal{F}_{\tau_{k+1}} \right] \\ &= \exp \left((iu_2 - 1)A_1(\Delta\tau) + r(\tau_{k+1})(A_2(\Delta\tau) - iu_1 e^{-\kappa(\Delta\tau)} - iu_2 A_2(\Delta\tau)) - iu_2 Y(\tau_{k+1}) \right) \times \\ &\quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} r(s) ds + iu_1 r(\tau_k) + iu_2 Y(\tau_k^+)} \mid \mathcal{F}_{\tau_{k+1}} \right] \text{ avec la définition de } (Z_{r,k}, Z_k), \\ &= e^{\psi_0(\Delta\tau, u_1, u_2) + (iu_2 - 1)A_1(\Delta\tau) + \psi_2(\Delta\tau, u_2)} \quad \text{par l'équation 4.6.} \end{aligned}$$

Cette fonction caractéristique est identique quelque soit la valeur de k et peut donc être calculée une seule fois.

Il est possible d'expliciter la valeur de $Q_{(k)}$ de façon similaire. Soit \mathbb{P}_c^* la mesure de probabilité qui résulte du changement de numéraire au prix $B(t, \tau_k + s^c)$ pour $t \in [\tau_k, \tau_k + s^c]$.

Alors,

$$\begin{aligned} & Q_{(k)}(r(\tau_k), Y(\tau_k)) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_{\tau_k}^{\tau_k+s^c} r(s)ds} \max \left(\gamma_{CB} [r(\tau_k + s^c), Y(\tau_k + s^c)]; K(\tau_k) + CC(\tau_k + s^c) \right) \mid \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &= e^{A_1(s^c) - A_2(s^c)r(\tau_k)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_c^*} \left[\max \left(\gamma_{CB} [r(\tau_k + s^c), Y(\tau_k + s^c)]; K(\tau_k) + CC(\tau_k + s^c) \right) \right]. \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, il convient de définir

- $h_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction telle que $h_k(r, y) = \max \left(\gamma_{CB}(r, y); K(\tau_k) + CC(\tau_k + s^c) \right)$,⁴
- $g_k^c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $g_k^c(y_r, y) = \ell_k(y) - A_1(s^c) + A_2(s^c)y_r$,
- $g_{r,k}^c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g_{r,k}^c(y_r) = y_r e^{-\kappa(s^c)}$,
- $Z_{r,k}^c$ une variable aléatoire telle que $Z_{r,k}^c = r(\tau_k + s^c) - g_{r,k}^c(r(\tau_k))$, et
- Z_k^c une variable aléatoire telle que $Z_k^c := Y(\tau_k + s^c) - g_k^c(r(\tau_k), Y(\tau_k))$.

Avec ces définitions, notons $f_{(r(\tau_k+s^c), Y(\tau_k+s^c))}^*$ et f_c^* la densité de $(r(\tau_k + s^c), Y(\tau_k + s^c))$ et celle de $(Z_{r,k}^c, Z_k^c)$ respectivement sous la mesure \mathbb{P}_c^* conditionnellement à \mathcal{F}_{τ_k} . Il est donc possible d'écrire

$$\begin{aligned} Q_{(k)}(r(\tau_k), Y(\tau_k)) &= e^{A_1(s^c) - A_2(s^c)r(\tau_k)} \int_{\mathbb{R}} h_k(r, y) f_{(r(\tau_k+s^c), Y(\tau_k+s^c))}^* dy \\ &= e^{A_1(s^c) - A_2(s^c)r(\tau_k)} \int_{\mathbb{R}} h_k \left(g_{r,k}^c[r(\tau_k)] + z_r, g_k^c[r(\tau_k), Y(\tau_k)] + z \right) f_c^*(z_r, z) d(z_r, z). \end{aligned}$$

Cette intégrale sera notée par l'évaluation de la fonction $\tilde{Q}_{(k)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au point $g_k^c[r(\tau_k), Y(\tau_k)]$, avec son calcul qui est équivalent à celui de la fonction $\tilde{G}_{(k)}$. La fonction caractéristique qui permet le calcul de cette intégrale peut être déterminée de la même façon que la fonction caractéristique de $(Z_{r,k}, Z_k)$. Concrètement,

$$\begin{aligned} \varphi_{(Z_{r,k}^c, Z_k^c) \mid \mathcal{F}_{\tau_k}}(u_1, u_2) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_c^*} \left[e^{i(u_1 Z_{r,k}^c + u_2 Z_k^c)} \mid \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &= e^{-A_1(s^c) + A_2(s^c)r(\tau_k)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_{\tau_k}^{\tau_k+s^c} r(s)ds + iu_1 Z_{r,k}^c + iu_2 Z_k^c} \mid \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &= \exp \left((iu_2 - 1)A_1(s^c) + r(\tau_k) \left(A_2(s^c) - iu_1 e^{-\kappa s^c} - iu_2 A_2(s^c) \right) - iu_2 Y(\tau_k) \right) \times \\ &\quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_{\tau_k}^{\tau_k+s^c} r(s)ds + iu_1 r(\tau_k + s^c) + iu_2 Y(\tau_k + s^c)} \mid \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \\ &= e^{\psi_0(s^c, u_1, u_2) + (iu_2 - 1)A_1(s^c) + \psi_2(s^c, u_2)}. \end{aligned}$$

4. On peut également définir des fonctions h_k^C et h_k^B analogues aux fonctions $Q_{(k)}^C$ et $Q_{(k)}^B$ respectivement pour les composantes de l'obligation convertible.

Résumé de la méthode

Avec l'ensemble des éléments décrits, la méthode de valorisation du modèle peut être récapitulée.

1. La fonction de flux $H_{(k)}^B$ de l'obligation classique est initialisée avec $k = 0$, c'est-à-dire à la maturité de l'obligation, et le prix $\tilde{B}(\tau_k^*)$ peut être calculé de façon itérative, où

$$H_{(k)}^B \implies G_{(k+1)}^B \implies H_{(k+1)}^B.$$

En absence d'opportunité d'arbitrage, $G_{(k^*)}^B(r(\tau_{k^*}), Y(\tau_{k^*})) = \tilde{B}(\tau_k^*)$.

2. À la maturité de l'obligation convertible, $\tau_{k^*} = T_{CB}$, la fonction $H_{(k)}^x$ est initialisée pour l'ensemble des titres.
3. Les valeurs $H_{(k)}^x$ et $G_{(k)}^x$ sont calculées par itération jusqu'à l'obtention de $G_{(n)}^x$, qui correspond au prix à la date initiale $\tau_n = 0$.

4.4 Résolution numérique par itération

Dans cette sous-section seront détaillées les démarches numériques qui permettent d'obtenir des résultats chiffrés pour les expressions de la section précédente. Les démarches développées étant identiques pour chaque classe x de titre, nous choisissons d'alléger la notation avec l'omission des indices supérieures correspondantes à la classe.

4.4.1 Étape 0 — La préparation des grilles de calcul

1. Un $N = 2^z$ pour $z \in \mathbb{N}$ est choisi pour définir la dimension des valeurs possibles de $r(t)$ et de $Y(t)$ postérieurement à la discrétisation.

Ceci permet le calcul efficace de la transformée de Fourier discrète avec l'algorithme de *Fast Fourier Transform*.

2. Le schéma de discrétisation de ce modèle revient à considérer que,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} r(t) \in \left(r_0 + p(\Delta r) \right)_{p \in \{0, \dots, N-1\}} \\ Y(t) \in \left(Y_0 + q(\Delta Y) \right)_{q \in \{0, \dots, N-1\}} \end{cases}$$

où les paramètres Y_0 , r_0 , (ΔY) et (Δr) sont choisis en fonction de la loi de $(Z_{r,k}, Z_k)$ et en fonction d'une constante personnalisée $\alpha \in \mathbb{R}_+$.⁵

Les notations $r_q = r_0 + q(\Delta r)$ et $Y_q = Y_0 + q(\Delta Y)$, $\forall q \in \{0, \dots, N-1\}$ seront utilisées pour la discrétisation des processus r et Y respectivement.

À cela s'ajoute les définitions

$$\begin{cases} r_0 & := m_{r,1} - \alpha \sqrt{m_{r,2}} \\ Y_0 & := m_1 - \alpha \sqrt{m_2 + \sqrt{m_4}} \\ (\Delta r) & := \frac{2\alpha}{N} \sqrt{m_{r,2}} \\ (\Delta Y) & := \frac{2\alpha}{N} \sqrt{m_2 + \sqrt{m_4}} \end{cases}$$

où m_i et $m_{r,i}$ (pour $i \in \{1, 2, 4\}$) sont les cumulants d'ordre i des variables aléatoire Z_k et $Z_{r,k}$ respectivement.⁶ Il convient de noter que les cumulants déterminent entièrement les moments d'une variable aléatoire et inversement.

Ainsi,

$$\begin{aligned} - m_1 &= - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3} \left(2\kappa(\Delta\tau) - 3 + 4e^{-\kappa(\Delta\tau)} - e^{-2\kappa(\Delta\tau)} \right) + \left(\mu_r - \frac{\rho}{\kappa} \sigma \sigma_r \right) \left[(\Delta\tau) - A_2(\Delta\tau) \right] - \\ &\quad \frac{\sigma^2}{2} (\Delta\tau) + A_1(\Delta\tau) - \lambda(\Delta\tau) \left[\frac{p_x}{\eta_1} - \frac{(1-p_x)}{\eta_2} - (\varphi_x(-i) - 1) \right]; \\ - m_2 &= \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^3} \left(2\kappa(\Delta\tau) - 3 + 4e^{-\kappa(\Delta\tau)} - e^{-2\kappa(\Delta\tau)} \right) + \frac{2}{\kappa} \rho \sigma \sigma_r \left[(\Delta\tau) - A_2(\Delta\tau) \right] + \\ &\quad \sigma^2 (\Delta\tau) + 2\lambda(\Delta\tau) \left[\frac{p_x}{\eta_1} + \frac{(1-p_x)}{\eta_2} \right]; \\ - m_4 &= 4! \lambda(\Delta\tau) \left[\frac{p_x}{\eta_1^4} + \frac{(1-p_x)}{\eta_2^4} \right]; \end{aligned}$$

5. Plus α est grand, plus la grille de la fonction φ est fine (et donc moins la grille de (r, Y) est fine)

6. k_n est le cumulante d'ordre n d'une variable aléatoire $Z \iff k_n = i^{-n} \frac{d^n}{(dt)^n} \Big|_{t=0} [\ln \varphi_Z(t)]$
en notant $\varphi_Z(t) = \mathbb{E}(e^{itZ})$

- $m_{r,1} = A_2(\Delta\tau) \left[\kappa\mu_r - A_2(\Delta\tau) \frac{\sigma_r^2}{2} \right]$; et
- $m_{r,2} = \frac{\sigma_r^2}{2\kappa} \left(1 - e^{-2\kappa(\Delta\tau)} \right)$.

3. Soient les notations φ et φ^* pour les fonctions

$$\begin{aligned} \varphi & : \left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^2 \right) \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \left(\Delta\tau, u_1, u_2 \right) \longmapsto \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n^*} \left[e^{iu_1 Z_{r,k} + iu_2 Z_k} \mid \mathcal{F}_{\tau_{k+1}} \right] \text{ et} \\ \varphi^* & : \left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^2 \right) \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \left(\Delta\tau, u_1, u_2 \right) \longmapsto \varphi \left(\Delta\tau, -u_1, -u_2 \right) \end{aligned}$$

en référence à la [sous-section 4.3.3](#) précédente.

Dans ce modèle, il convient de définir la discrétisation de φ^* par la matrice carrée de $\mathbb{C}^{N \times N}$ des éléments $\varphi_{j,\ell} := \varphi^* \left(\Delta\tau, u_1^{(j)}, u_2^{(\ell)} \right)$, où

- $u_1^{(j)} = \left(j - \frac{N}{2} \right) (\Delta u_1)$, $\forall j \in \{0, \dots, N-1\}$ et
- $u_2^{(\ell)} = \left(\ell - \frac{N}{2} \right) (\Delta u_2)$, $\forall \ell \in \{0, \dots, N-1\}$.

Les pas de discrétisation (Δu_1) et (Δu_2) satisfont le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \left| \varphi_{0,0} \right| = \left| \varphi \left(\Delta\tau, \frac{N}{2}(\Delta u_1), \frac{N}{2}(\Delta u_2) \right) \right| \leq \varepsilon \\ N(\Delta u_1)(\Delta r) = N(\Delta u_2)(\Delta Y) = 2\pi \end{cases}.$$

La première équation ci-dessus permet de contrôler la précision de la grille de φ^* avec un choix libre de $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. La deuxième équation quant à elle caractérise une relation de Nyquist qui sera nécessaire pour l'utilisation de l'algorithme *FFT*. ([Lord et al., 2008](#))

De nombreuses approches pour résoudre ce système sont possibles. En particulier, pour reproduire la méthode de résolution de ce mémoire, il suffit de poser $(\Delta u_1) \leftarrow \frac{2\pi}{(\Delta r)N}$ et $(\Delta u_2) \leftarrow \frac{2\pi}{(\Delta Y)N}$ et subséquemment choisir la valeur maximale de α telle que $|\varphi_{0,0}| \leq \varepsilon$, par exemple, à l'aide d'une boucle sur α .

Cependant, lorsque N est suffisamment grand, il convient de restreindre le choix de α en dessous de cette valeur maximale afin de contrôler l'étendue des valeurs $(Y_q)_{q \in \{0, \dots, N-1\}}$.

4. La valeur finale de α est utilisée pour recalculer la grille $(r_p, Y_q)_{\substack{p \in \{0, \dots, N-1\} \\ q \in \{0, \dots, N-1\}}}$ et la grille

$$\left(u_1^{(j)}, u_2^{(\ell)} \right)_{\substack{j \in \{0, \dots, N-1\} \\ \ell \in \{0, \dots, N-1\}}}.$$

Après cela, la matrice $(\varphi_{j,\ell})_{\substack{j \in \{0, \dots, N-1\} \\ \ell \in \{0, \dots, N-1\}}}$ est calculée avec la définition de φ .

4.4.2 Étape 1 — Calcul de $\tilde{G}_{(k+1)}$ sur une grille uniforme

L'algorithme de calcul est initialisé à la maturité de l'obligation convertible, soit avec $k = 0$. Dans cette étape, l'objectif est de calculer

$$\tilde{G}_{(k+1)}(r_p, Y_q) = \int_{\mathbb{R}^2} H_{(k)}(r_p + z_r, Y_q + z) f_{(k)}^*(z_r, z) d(z_r, z) \quad \forall (p, q) \in \{0, \dots, N-1\}^2,$$

où $f_{(k)}^*(z_r, z) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(u_1 z_r + u_2 z)} \varphi(\Delta\tau, u_1, u_2) d(u_1, u_2).$$

Il est possible de faire ce calcul en exploitant la périodicité de la transformée de Fourier et l'application de la transformée de Fourier à un produit de convolution.

Soit g l'application telle que $g(z_r, z) = f_{(k)}^*(-z_r, -z) \quad \forall (z_r, z) \in \mathbb{R}^2$.

Alors,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{(k+1)}(r_p, Y_q) &= \int_{\mathbb{R}^2} H_{(k)}(r_p + z_r, Y_q + z) g(-z_r, -z) d(z_r, z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} H_{(k)}(x_r, x) g(r_p - x_r, Y_q - x) d(x_r, x) \quad \text{par changement de variables} \\ &= (H_{(k)} * g)(r_p, Y_q), \end{aligned}$$

où $(H_{(k)} * g)$ dénote le produit de convolution des fonctions $H_{(k)}$ et g .

Par propriété de la transformée de Fourier, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{G}_{(k+1)}\} &= \mathcal{F}\{(H_{(k)} * g)\} \\ &= \mathcal{F}\{H_{(k)}\} \mathcal{F}\{g\} \\ &= \mathcal{F}\{H_{(k)}\} \mathcal{F}^3\{f_{(k)}^*\} \\ &= \mathcal{F}\{H_{(k)}\} \mathcal{F}^2\{\varphi\} \\ &= \mathcal{F}\{H_{(k)}\} \varphi^* \\ \implies \tilde{G}_{(k+1)} &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{H_{(k)}\} \varphi^*\}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

1. L'estimation numérique de cette fonction nécessite une estimation discrète de la fonction $\mathcal{F}\{H_{(k)}\}$ au préalable. En vertu de la définition de l'opérateur \mathcal{F} de la [sous-section 4.2.1](#),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{H_{(k)}\} &: \quad \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_r u_1 + x u_2)} H_{(k)}(x_r, x) d(x_r, x). \end{aligned}$$

Lorsque cette intégrale est tronquée et discrétisée par rapport à la grille $(r_p, Y_q)_{\substack{p \in \{0, \dots, N-1\}, \\ q \in \{0, \dots, N-1\}}}$,

$$\mathcal{F}\{H_{(k)}\}(u_1, u_2) \approx \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} e^{i(r_p u_1 + Y_q u_2)} H_{(k)}(r_p, Y_q) (\Delta r) (\Delta Y).$$

Ainsi, il est possible de calculer une estimation discrète de la fonction $\mathcal{F}\{H_{(k)}\}$ en évaluant l'approximation précédente aux valeurs $(u_1, u_2) \in \left\{ \left(u_1^{(j)}, u_2^{(\ell)} \right) \mid (j, \ell) \in \{0, \dots, N-1\}^2 \right\}$.

Notons

$$D_{(k)}^{j,\ell} := (\Delta r)(\Delta Y) \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} e^{i[u_1^{(j)} r_p + u_2^{(\ell)} Y_q]} H_{(k)}(r_p, Y_q), \quad (4.9)$$

les éléments d'une telle estimation avec $(j, \ell) \in \{0, \dots, N-1\}^2$.

L'égalité suivante est obtenue avec la relation de Nyquist,

$$\begin{aligned} u_1^{(j)} r_p + u_2^{(\ell)} Y_q &= u_1^{(j)} r_0 + u_2^{(\ell)} Y_0 + u_1^{(j)} (\Delta r) p + u_2^{(\ell)} (\Delta Y) q \\ &= u_1^{(j)} r_0 + u_2^{(\ell)} Y_0 + (\Delta u_1)(\Delta r) p \left(j - \frac{N}{2} \right) + (\Delta u_2)(\Delta Y) \left(\ell - \frac{N}{2} \right) \\ &= u_1^{(j)} r_0 + u_2^{(\ell)} Y_0 + \frac{2\pi}{N} (jp + \ell q) - \pi(p + q). \end{aligned}$$

Cette égalité permet d'exprimer $D_{(k)}^{j,\ell}$ explicitement en fonction de l'algorithme *FFT*. La substitution de l'expression trouvée ci-dessus dans l'équation 4.9 implique que

$$D_{(k)}^{j,\ell} = (\Delta r)(\Delta Y) e^{i[u_1^{(j)} r_0 + u_2^{(\ell)} Y_0]} \text{FFT}_{j,\ell}^{-1} \left[(-1)^{p+q} H_{(k)}(r_p, Y_q) \right],$$

où $\text{FFT}_{j,\ell}^{-1}(x_{p,q})$ correspond à l'élément d'indice (j, ℓ) de l'inverse de la transformée de Fourier discrète à deux dimensions de la matrice $(x_{p,q})_{\substack{p \in \{0, \dots, N-1\} \\ q \in \{0, \dots, N-1\}}}$.

2. Il est désormais possible d'estimer la surface $\tilde{G}_{(k+1)}$ sur la grille $(r_p, Y_q)_{\substack{p \in \{0, \dots, N-1\} \\ q \in \{0, \dots, N-1\}}}$.

Par voie de conséquence de l'équation 4.8,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{(k+1)} &: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (y_r, y) &\longmapsto \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(u_1 y_r + u_2 y)} \left(\mathcal{F}\{H_{(k)}\} \circ \varphi^* \right) (u_1, u_2) d(u_1, u_2). \end{aligned}$$

De surcroît, la troncature et discrétisation de l'intégrale par rapport à la grille

$(u_1^{(j)}, u_2^{(\ell)})_{\substack{j \in \{0, \dots, N-1\} \\ \ell \in \{0, \dots, N-1\}}}$ permet d'établir l'approximation

$$\tilde{G}_{(k+1)}(y_r, y) \approx \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} w_{j,\ell} e^{-i[u_1^{(j)} y_r + u_2^{(\ell)} y]} D_{(k)}^{j,\ell} \varphi_{j,\ell}(\Delta u_1)(\Delta u_2),$$

en définissant des poids $(w_{j,\ell})_{\substack{j \in \{0, \dots, N-1\} \\ \ell \in \{0, \dots, N-1\}}}$.

Ces poids correspondent à une discrétisation d'une intégrale bivariée selon la méthode des trapèzes lorsque

$$w_{j,\ell} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\mathbf{1}_{\{0, N-1\}}(j)} \left(\frac{1}{2} \right)^{\mathbf{1}_{\{0, N-1\}}(\ell)} \quad \forall (j, \ell) \in \{0, \dots, N-1\}^2,$$

ce qui est conseillé par [Ballotta et Kyriakou](#) pour réduire l'erreur de l'approximation de $\tilde{G}_{(k+1)}$.

En évaluant l'approximation précédente de $\tilde{G}_{(k+1)}$ uniquement aux valeurs $(y_r, y) \in \{(r_p, Y_q) \mid (p, q) \in \{0, \dots, N-1\}^2\}$, il est possible d'obtenir l'estimation discrète suivante :

$$\tilde{G}_{(k+1)}(r_p, Y_q) \approx (\Delta u_1)(\Delta u_2) \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} w_{j,\ell} e^{-i[u_1^{(j)} r_p + u_2^{(\ell)} Y_q]} D_{(k)}^{j,\ell} \varphi_{j,\ell}.$$

Or, toujours en raison de la relation de Nyquist, l'exposant de la constante e satisfait l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} u_1^{(j)} r_p + u_2^{(\ell)} Y_q &= -\frac{N}{2} [(\Delta u_1) r_p + (\Delta u_2) Y_q] + j(\Delta u_1) r_p + \ell(\Delta u_2) Y_q \\ &= -\frac{N}{2} [(\Delta u_1) r_p + (\Delta u_2) Y_q] + j(\Delta u_1) r_0 + \ell(\Delta u_2) Y_0 + \frac{2\pi}{N} (jp + \ell q). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'approximation discrète de $\tilde{G}_{(k+1)}$, notée $\left(\tilde{G}_{(k+1)}^{j,\ell}\right)_{\substack{j \in \{0, \dots, N-1\} \\ \ell \in \{0, \dots, N-1\}}}$, est donnée par

$$\tilde{G}_{(k+1)}^{p,q} = \frac{(\Delta u_1)(\Delta u_2)}{4\pi^2} e^{i\frac{N}{2}[(\Delta u_1)r_p + (\Delta u_2)Y_q]} \text{FFT}_{p,q} \left[w_{j,\ell} e^{-i[j(\Delta u_1)r_0 + \ell(\Delta u_2)Y_0]} D_{(k)}^{j,\ell} \varphi_{j,\ell} \right] \quad (4.10)$$

où $\text{FFT}_{p,q}(x_{j,\ell})$ correspond à l'élément d'indice (p, q) de la transformée de Fourier discrète à deux dimensions de la matrice $(x_{j,\ell})_{\substack{j \in \{0, \dots, N-1\} \\ \ell \in \{0, \dots, N-1\}}}$.

4.4.3 Étape 2 — Calcul de $G_{(k)}$ sur une grille uniforme

Pour rappel, l'objectif de cette étape est l'estimation de la surface

$$G_{(k)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(y_r, y) \longmapsto e^{A_1(\Delta\tau) - A_2(\Delta\tau)y_r} \tilde{G}_{(k+1)}(g_{r,k+1}(y_r), g_{k+1}(y_r, y))$$

avec les fonctions $g_{r,k+1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_{k+1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que définies dans la [sous-section 4.3.3](#).

1. Il faut d'abord tenir compte du fait que $\left(\tilde{G}_{(k+1)}^{p,q}\right)_{\substack{p \in \{0, \dots, N-1\} \\ q \in \{0, \dots, N-1\}}}$ de l'équation 4.10 n'est pas une matrice réelle par suite des écarts sur la partie imaginaire, générés par l'approximation des intégrales.

Pour transformer $\left(\tilde{G}_{(k+1)}^{p,q}\right)_{\substack{p \in \{0, \dots, N-1\} \\ q \in \{0, \dots, N-1\}}}$ en une surface réelle, le retraitement

$$\tilde{G}_{(k+1)}^{j,\ell} \longleftarrow \left| \tilde{G}_{(k+1)}^{j,\ell} \right| \quad \forall (j, \ell) \in \{0, \dots, N-1\}^2.$$

est appliqué.

2. L'obtention des valeurs $\tilde{G}_{(k+1)}(g_{r,k+1}(r_p), g_{k+1}(r_p, Y_q))$ à partir de la surface $\left(\tilde{G}_{(k+1)}^{p,q}\right)_{\substack{p \in \{0, \dots, N-1\} \\ q \in \{0, \dots, N-1\}}}$ reprend les démarches proposées par [Ballotta et Kyriakou \(2015\)](#).

De ce fait,

- Pour tous les éléments $(r_p, Y_q) \in (r_p, Y_q)_{\substack{p \in \{0, \dots, N-1\} \\ q \in \{0, \dots, N-1\}}}$ tels que

$$(g_{r,k+1}(r_p), g_{k+1}(r_p, Y_q)) \in [r_0, r_{N-1}] \times [Y_0, Y_{N-1}],$$

$\tilde{G}_{(k+1)}(g_{r,k+1}(r_p), g_{k+1}(r_p, Y_q))$ est calculé par interpolation cubique de la surface $\left(\tilde{G}_{(k+1)}^{p,q}\right)_{\substack{p \in \{0, \dots, N-1\} \\ q \in \{0, \dots, N-1\}}}$; et

- Dans le cas complémentaire, $\tilde{G}_{(k+1)}(g_{r,k+1}(r_p), g_{k+1}(r_p, Y_q))$ est calculé par l'extrapolation linéaire de $\left(\tilde{G}_{(k+1)}^{p,q}\right)_{q \in \{0, \dots, N-1\}}$ (pour p fixe) en fonction de la valeur de la firme $\left(e^{Y_q}\right)_{q \in \{0, \dots, N-1\}}$.

4.4.4 Étape 3 — Calcul de $Q_{(k+1)}$ sur une grille uniforme

L'objectif de cette sous-section est le calcul de la fonction

$$\begin{aligned} Q_{(k)}(r(\tau_k), Y(\tau_k)) &= e^{A_1(s^c) - A_2(s^c)r(\tau_k)} \int_{\mathbb{R}} h_k \left(g_{r,k}^c[r(\tau_k)] + z_r, g_k^c[r(\tau_k), Y(\tau_k)] + z \right) f_c^*(z_r, z) d(z_r, z) \\ &= e^{A_1(s^c) - A_2(s^c)r(\tau_k)} \tilde{Q}_{(k)} \left(g_{r,k}^c[r(\tau_k)], g_k^c[r(\tau_k), Y(\tau_k)] \right) \end{aligned}$$

pour $(r(\tau_k), Y(\tau_k)) \in (r_p, Y_q)_{\substack{p \in \{0, \dots, N-1\} \\ q \in \{0, \dots, N-1\}}}$.

L'estimation de $Q_{(k)}$ nécessite d'abord la détermination de la fonction $\tilde{Q}_{(k)}$. Il convient donc de chercher dans une première étape une approximation de $\tilde{Q}_{(k)}$ sur la grille uniforme $(r_p, Y_q)_{\substack{p \in \{0, \dots, N-1\} \\ q \in \{0, \dots, N-1\}}}$.

La démarche pour estimer de $\tilde{Q}_{(k)}$ est parfaitement équivalente à celle pour la fonction $\tilde{G}_{(k)}$ détaillée à la [sous-section 4.4.2](#). En effet, par propriété de la transformée de Fourier,

$$\tilde{Q}_{(k)} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \mathcal{F} \{ h_k \} \varphi_c^* \right\}$$

en définissant

$$\begin{aligned} \varphi_c &: (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^2) \longrightarrow \mathbb{C} \\ (s^c, u_1, u_2) &\longmapsto \mathbb{E}_{\mathbb{P}_c^*} \left[e^{i(u_1 Z_{r,k}^c + u_2 Z_k^c)} \mid \mathcal{F}_{\tau_k} \right] \text{ et} \\ \varphi_c^* &: (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}^2) \longrightarrow \mathbb{C} \\ (s^c, u_1, u_2) &\longmapsto \varphi_c(s^c, -u_1, -u_2), \end{aligned}$$

avec les mêmes notations de la [sous-section 4.3.3](#).

Application numérique du modèle de valorisation

5.1 Calibration des paramètres de modélisation

5.1.1 Pour le taux sans risque

La modélisation risque-neutre de Vasicek (1977) du taux sans risque, supposée à la section 4.3, intègre l'utilisation de trois paramètres : μ_r , κ , et σ_r . La calibration de ces paramètres dans le mémoire présent reprend la méthodologie de Halgašová et al. (2014). Il s'agit de minimiser les écarts entre la courbe des taux observée sur le marché et la courbe de taux théorique qui est générée par le modèle, avec plusieurs dates d'observation pour comparer les courbes.

Notons :

- $R(t, T)$ le taux de rendement actuariel d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut de maturité à la date T et de nominal 1, observé sur le marché à l'instant t ;
- $(t_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ l'ensemble des dates d'observation du marché ;
- $(T_j)_{j \in \{0, \dots, m\}}$ l'ensemble des maturités en durée observées d'obligations zéro-coupon sans risque ;
- $(t_i + T_j)_{j \in \{0, \dots, m\}}$ l'ensemble des dates de maturité correspondant à une date d'observation t_i donnée ;
- $a = \kappa\mu_r$ et $b = -\kappa$ de sorte que

$$dr(t) = [a - br(t)]dt + \sigma_r dZ_t^r;$$

- $\hat{R}(t, T)$ le taux d'intérêt sans risque pour la maturité à la date T prédit par le modèle de Vasicek à l'instant t ; et
- $\hat{P}(t, T)$ le prix théorique, établi par le modèle, d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut de maturité T et de nominal 1, qui satisfait donc la relation

$$\hat{P}(t, T) = e^{-\hat{R}(t, T)(T-t)} \tag{5.1}$$

avec la convention d'intérêts composés continûment.

Alors, le modèle du taux sans risque est considéré calibré au marché lorsque le minimum de la fonction

$$L = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m T_j^2 \left[\hat{R}(t_i, t_i + T_j) - R(t_i, t_i + T_j) \right]^2$$

est atteinte par rapport aux arguments $(a, b, \sigma_r, \mathbf{r})$, où $\mathbf{r} = (r(t_1), \dots, r(t_n))^\top$.

Premièrement, le prix $\hat{P}(t, T)$ peut être exprimé explicitement en fonction du taux court, avec l'égalité

$$\begin{aligned} \ln P(t, T) &= A_2(T) \left(\mu_r - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} - r(t) \right) - T \left(\mu_r - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} \right) - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (1 - e^{-\kappa T})^2 \\ &= c_0(T)r(t) + a c_1(T) + \sigma_r^2 c_2(T) \end{aligned}$$

en notant

$$\begin{aligned} - c_0(T) &= \frac{1 - e^{bT}}{b}, \\ - c_1(T) &= \frac{1}{b} [c_0(T) + T], \text{ et} \\ - c_2(T) &= \frac{1}{2b} \left[c_1(T) + \frac{(1 - e^{bT})^2}{2b^2} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, en raison de la relation 5.1,

$$L(a, b, \sigma^2, \mathbf{r}) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left[\ln \hat{P}(t_i, t_i + T_j) - T_j R(t_i, t_i + T_j) \right]^2.$$

Cette expression illustre que la fonction L à minimiser est quadratique et convexe par rapport à ses arguments. En particulier, ces conditions permettent la détermination directe d'un système d'équations pour la valeur optimale de b .

Par la suite, en supposant fixée la valeur de b , la détermination des valeurs optimales de $(a, \sigma^2, \mathbf{r})$ est équivalente à la résolution de ce système linéaire avec $n + 2$ équations et inconnues. Sous forme matricielle, le système est donné par

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} - \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \sum_j (c_1(T_j)^2) & \sum_j (c_1(T_j)c_2(T_j)) \\ \sum_j (c_2(T_j)^2) & \sum_j (c_1(T_j)c_2(T_j)) \end{pmatrix}, \\ - \mathbf{B} = \mathbf{C}^\top &= \begin{pmatrix} \sum_j (c_1(T_j)c_0(T_j)) & \dots & \sum_j (c_1(T_j)c_0(T_j)) \\ \sum_j (c_2(T_j)c_0(T_j)) & \dots & \sum_j (c_2(T_j)c_0(T_j)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{— } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \sum_j (c_0(T_j)^2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_j (c_0(T_j)^2) & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_j (c_0(T_j)^2) \end{pmatrix} \text{ une matrice diagonale,}$$

$$\text{— } x = (a, \sigma_r^2)^\top,$$

$$\text{— } u = \left(-\sum_{i,j} T_j R(t_i, t_i + T_j) c_1(T_j), -\sum_{i,j} T_j R(t_i, t_i + T_j) c_2(T_j) \right)^\top, \text{ et}$$

$$\text{— } v = \left(-\sum_j T_j R(t_1, t_1 + T_j) c_0(T_j), \dots, -\sum_j T_j R(t_n, t_n + T_j) c_0(T_j) \right)^\top.$$

Or, la forme diagonale de la matrice \mathbf{D} permet de réduire le système de $n + 2$ équations à deux équations. En effet, \mathbf{D} étant facilement inversible,

$$\mathbf{r} = \mathbf{D}^{-1}(v - \mathbf{C}x).$$

Ainsi,

$$\mathbf{A}x + \mathbf{B}r = u \iff (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})x = u - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}v.$$

5.1.2 Pour le processus des actifs de la société

L'objectif de cette section est d'utiliser la [Proposition 2 du chapitre précédent](#) pour déterminer une probabilité de défaut $\mathbb{Q}(W(t) > K)$ à tout instant t avec $K \in \mathbb{R}_+$.

Pour ce faire, il convient de déterminer la fonction caractéristique des facteurs de risque sans actualisation

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{iu_1 r(t) + iu_2 Y(t)} \right],$$

en passant par l'étape intermédiaire avec \tilde{Y} . Les paramètres \mathbf{a} , $\boldsymbol{\alpha}$, b et β ne changent pas par rapport à précédemment. Le système d'équation relatif à l'espérance sans l'actualisation devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, u) = \frac{1}{2} \psi(t, u)^\top \mathbf{a} \psi(t, u) + b^\top \psi(t, u), \\ \phi(0, u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(t, u) = -\kappa \psi_1(t, u_1, u_2) + \psi_2(t, u_2), \\ \frac{\partial}{\partial t} \psi_2(t, u) = 0, \\ \psi(0, u) = u. \end{cases}$$

Comme précédemment $\psi_2(t, u_2) = u_2$, ce qui entraîne

$$\psi_1(t, u_1, u_2) = u_1 e^{-\kappa t} + u_2 \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa}.$$

De même, on retrouve la fonction

$$\phi(t, u_1, u_2) = \frac{1}{2}\sigma_r^2 \int_0^t \psi_1^2(s, u_1, u_2)ds + (\sigma_r\sigma\rho u_2 + \kappa\mu_r) \int_0^t \psi_1(s, u_1, u_2)ds + \frac{1}{2}\sigma^2 u_2(u_2 - 1)t,$$

avec la nouvelle forme de ψ_1 . La première intégrale vaut :

$$\int_0^t \psi_1^2(s, u_1, u_2)ds = \left(u_1 - \frac{u_2}{\kappa}\right)^2 \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} + \frac{2u_2}{\kappa}(u_1 - u_2) \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} + \frac{tu_2^2}{\kappa},$$

et la seconde est donnée par $\int_0^t \psi_1(s, u_1, u_2)ds = u_1 \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} + \frac{u_2}{\kappa^2}(t\kappa - 1 + e^{-\kappa t})$.

À l'issu des calculs pour la fonction ϕ , il est donc possible d'écrire que

$$\mathbb{E} \left[e^{iu_1 r(t) + iu_2 \tilde{Y}(t)} \right] = \exp \left(\phi(t, iu_1, iu_2) + \psi_1(t, iu_1, iu_2)r(0) + \psi_2(t, iu_2)\tilde{Y}(0) \right),$$

avec :

$$\begin{aligned} \phi(t, iu_1, iu_2) &= \frac{\sigma_r^2}{2} \left(\left(iu_1 - \frac{iu_2}{\kappa} \right)^2 \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa} + \frac{2iu_2}{\kappa}(iu_1 - iu_2) \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} + \frac{t(iu_2)^2}{\kappa} \right) \\ &\quad + (\sigma_r\sigma\rho iu_2 + \kappa\mu_r) \left(iu_1 \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} + \frac{iu_2}{\kappa^2}(t\kappa - 1 + e^{-\kappa t}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 iu_2(iu_2 - 1)t, \end{aligned}$$

$$\psi_1(t, iu_1, iu_2) = iu_1 e^{-\kappa t} + iu_2 \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa},$$

$$\psi_2(t, iu_2) = iu_2.$$

De surcroît, le passage de \tilde{Y} à Y se fait comme dans la [équation 4.6](#). En effet

$$\mathbb{E}[e^{iu_1 r(t) + iu_2 Y(t)}] = \exp \left(\phi(t, iu_1, iu_2) + \psi_1(t, iu_1, iu_2)r_0 + \psi_2(t, iu_2)Y_0 + \psi_3(t, iu_2) \right),$$

avec $\psi_3(t, iu_2) = \lambda t(\varphi_X(u_2) - 1 - iu_2(\varphi_X(-i) - 1))$.

Finalement, en prenant $u_1 = 0$, la transformée de Fourier de Y est déterminée :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{iu_2 Y(t)}] &= \exp \left(\phi(t, 0, iu_2) + \psi_1(t, 0, iu_2)r(0) + \psi_2(t, iu_2)Y(0) + \psi_3(t, iu_2) \right) \\ &= \int e^{iu_2 y} f_{Y(t)}(y)dy. \end{aligned}$$

Lorsque le défaut avant la maturité est négligé

En supposant que le temps de défaut τ est défini comme dans le [modèle de Merton](#), il est possible d'écrire pour chaque maturité t que $\mathbb{Q}(\tau > t) = \mathbb{Q}(W(t) > K)$ lorsque K définit le seuil de défaut de la société, ici supposé invariant quelle que soit la maturité. Or, dans les modèles à intensité, il a été démontré à la [section 2.1.1](#) que $\mathbb{Q}(\tau > t) = \exp(-\lambda_{(t)}t)$ si pour une maturité t donnée, $\lambda_{(t)}$ correspond à la différence entre le taux de rendement risqué et le taux sans risque. Une fonction telle que $t \mapsto \lambda_{(t)}$ est équivalente à une courbe de *spread*, et les estimations de marché de telles courbes sont accessibles pour un *rating* de crédit donné de l'émetteur.

Ainsi, la diffusion de Y peut être calibrée par rapport à la courbe de *spread* qui correspond au *rating* de crédit de l'émetteur supposé, avec la recherche des paramètres de diffusion tels que

$$\mathbb{Q}(W(t) > K) = \mathbb{Q}(Y(t) > \ln K) = \int_{\ln K}^{+\infty} f_{Y(t)}(s) ds = \exp(-\lambda_{(t)}t),$$

pour l'ensemble des points $(t, \lambda_{(t)})$ de la courbe de *spread*. L'algorithme *FFT* peut donc être exploité pour récupérer la densité de $Y(t)$, tel que démontré à la [section 4.2.1](#).

Une telle calibration est bien adaptée aux exigences des normes IFRS sur la juste valeur étant donné que le choix des paramètres découle des hypothèses de marché.

Lorsque le défaut avant la maturité est pris en compte

Une deuxième approche de calibration a été abordée, où le temps de défaut τ est défini comme dans le [modèle de Black et Cox](#). Plus précisément, cette approche consiste à définir

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : W(t) \leq RW(0)\},$$

où la variable R représente un taux de recouvrement déterministe et fixe au moment où le défaut est déclenché. Comme dans le modèle de Merton, le seuil de défaut, $RW(0)$, ne varie pas avec le temps jusqu'à la maturité de dette.

En suivant la méthodologie décrite par [Fang, Jönsson, Oosterlee, et Schoutens \(2009\)](#), il est toujours possible d'estimer la probabilité d'absence de défaut $\mathbb{Q}(\tau > t) = \mathbb{Q}\left(\min_{0 \leq s \leq t} Y(s) > \ln[RW(0)]\right)$ à partir de la transformée de Fourier de Y ($u \mapsto \mathbb{E}[e^{iuY(t)}]$), même lorsque Y est un processus mixte saut-diffusion. Un résumé de cette approche est présenté à l'[annexe A](#).

Ces deux visions du défaut seront comparées plus en détail dans la [section 5.4](#)

5.2 Présentation des données

Considérons la structure de capital à valoriser qui se représente dans la table ci-dessous.

| Classe d'obligations | Nombre d'obligations | Nominal |
|-------------------------------|----------------------|--------------------------|
| <i>Senior</i> sans conversion | 200 | 40,00 |
| <i>Junior</i> convertible | 200 | 35,00 |
| Classes d'actions | Nombre d'actions | Privilège de liquidation |
| Series A | 875 | 50,00 |
| Ordinaire | 725 | — |
| Instruments dilutifs | Nombre d'options | Prix d'exercice |
| Options de souscription | 500 | 30,00 |
| TOTAL | 2 500 | — |

TABLE 5.1 – Structure de capital

La structure de capital étudiée présente également les spécificités suivantes :

- Les obligations *senior* ont une maturité de 6 ans par rapport à la date d'évaluation et sont assorties d'un coupon annuel de 4% de la valeur nominale.
- Les obligations convertibles ont une maturité de 5 ans par rapport à la date d'évaluation et sont assorties d'un coupon semestriel de 5% de la valeur nominale. Chaque obligation est convertible en une action ordinaire et l'émetteur de l'obligation dispose du droit de remboursement anticipé au prix de 45,00€ jusqu'à la maturité, étant donné le respect d'une période de préavis d'un mois.
- Chaque action privilégiée de type *Series A* est convertible en deux actions ordinaires.
- Aucun versement de dividende n'est prévu pour les porteurs d'actions ordinaires pendant la vie des obligations.
- La maturité des options sur les actions ordinaires est 5 ans par rapport à la date d'évaluation. Chaque option en cas d'exercice permet l'achat d'une nouvelle action ordinaire.

Pour l'ensemble des valorisations qui suivent, les paramètres de Vasicek ont été calibrés avec les valeurs $\mu_r = 4,50\%$; $\sigma_r = 11,94\%$; $\kappa = 0,76$ et $r(0) = 2,60\%$.

5.3 Cohérence du modèle

Dans un premier temps, nous vérifions la cohérence des résultats du modèle lorsque la structure de capital est simplifiée pour considérer uniquement des obligations convertibles et des actions ordinaires. La [Table 5.2](#) ci-dessous est obtenu en considérant $W(0) = 100$; $r(0) = \mu_r = 4\%$; $\kappa = 0,858$; $\sigma_r = 0,047$; et $\rho = 0,2$ pour les facteurs aléatoires. L'obligation convertible dans cette table est de maturité 5 ans, de nominal $F = 40$, remboursable en anticipation au prix $K = 50$, et paye des coupons semestriels de montant $c = 1$. La valeur de la société dans cet exemple est composée d'une telle obligation convertible et de quatre actions ordinaires.

| Classe de titre | Prix estimé | Prix de référence |
|---|--------------|-------------------|
| Obligation convertible (ensemble) | 42,190 | 42,085 |
| Action ordinaire | 14,448 | — |
| Valorisation de la société estimée | 99,98 | — |

Prix estimés avec $N = 2^8$ et $n = 1250$; prix de référence de la Table 5 de [Ballotta et Kyriakou](#)

TABLE 5.2 – Comparaison empirique avec [Ballotta et Kyriakou](#)

Les résultats du modèle correspondent approximativement à ceux de [Ballotta et Kyriakou \(2015\)](#). L'écart de prix diminue de façon polynomiale lorsque N est augmenté, et il est donc supposé que cet écart peut être assimilé à l'erreur de discrétisation dans le modèle. Avec ces évidences, il est possible de valider les estimations de prix des titres qui résultent du modèle pour des paramètres de la firme donnés.

5.4 Calibration des paramètres à une courbe de *spread* donnée

Afin de valoriser les titres de la [Table 5.1](#), il est d'abord nécessaire de déterminer les paramètres de modélisation pour la valeur de la société qui représente au mieux son profil de risque. Pour ce faire, une courbe de *spread* avec le *rating* BBB du secteur industriel a été utilisée comme référence. Les valeurs de *spread* par rapport aux taux sans risque calculés par le modèle de Vasicek se résument dans la [Table 5.3](#) sur la page suivante.

Le taux sans risque du modèle de Vasicek pour une maturité t est donné par $\frac{1}{P(0,t)}$, où $P(0,t)$ correspond au prix d'une obligation zéro-coupon telle que précisé à l'équation [4.2](#).

| Temps jusqu'à maturité | Taux sans risque Vasicek | Taux risqué BBB | Spread BBB observé |
|------------------------|--------------------------|-----------------|--------------------|
| 0,458 | 2,857% | 2,972% | 0,115% |
| 0,707 | 2,949% | 2,942% | -0,007% |
| 0,956 | 3,019% | 3,021% | 0,002% |
| 1,474 | 3,115% | 3,297% | 0,182% |
| 1,973 | 3,169% | 3,555% | 0,385% |
| 2,471 | 3,201% | 3,754% | 0,553% |
| 2,970 | 3,221% | 3,897% | 0,677% |
| 3,967 | 3,241% | 4,066% | 0,825% |
| 4,964 | 3,250% | 4,163% | 0,914% |
| 5,003 | 3,250% | 4,167% | 0,917% |
| 6,000 | 3,254% | 4,259% | 1,005% |
| 7,000 | 3,256% | 4,365% | 1,109% |
| 8,000 | 3,258% | 4,458% | 1,200% |
| 9,000 | 3,259% | 4,467% | 1,209% |

TABLE 5.3 – Taux de *spread* observés : Cas central

Les paramètres de σ , λ , p_x , η_1 , η_2 , et ρ ont été choisis par optimisation numérique pour minimiser l'écart moyen absolu entre les probabilités de défaut du modèle et les probabilités de défaut impliquées par la courbe de *spread* BBB.

5.4.1 Lorsque le défaut avant maturité est négligé

Lorsque la définition du temps aléatoire de défaut est assimilable au modèle de Merton, les paramètres optimaux trouvés sont les suivants :

| Paramètre | Valeur de calibration | Signification |
|-----------|-----------------------|--|
| σ | 20,64% | Volatilité du mouvement brownien associé à la valeur de la société |
| λ | 3,50 | Intensité de Poisson pour la fréquence des sauts aléatoires |
| p_x | 100,00% | Probabilité qu'un saut aléatoire soit positif |
| η_1 | 16,01 | Inverse de l'espérance d'un saut positif |
| η_2 | 28,38 | Inverse de l'espérance d'un saut négatif |
| ρ | -0,8621 | Coefficient de corrélation entre les mouvements browniens associés au taux court et à la valeur de société |

TABLE 5.4 – Paramètres calibrés avec le défaut de Merton : Cas central

Il est remarquable que dans ce jeu de paramètres, l'ensemble des sauts aléatoires à la valeur de firme sont des chocs positifs dont l'espérance est égale à $\frac{1}{\eta_1} \approx 6,25\%$, avec le paramètre λ qui indique en moyenne trois chocs de ce type par an. La Figure 5.1 sur la page suivante illustre l'adéquation des paramètres à la courbe de *spread* de la Table 5.3.

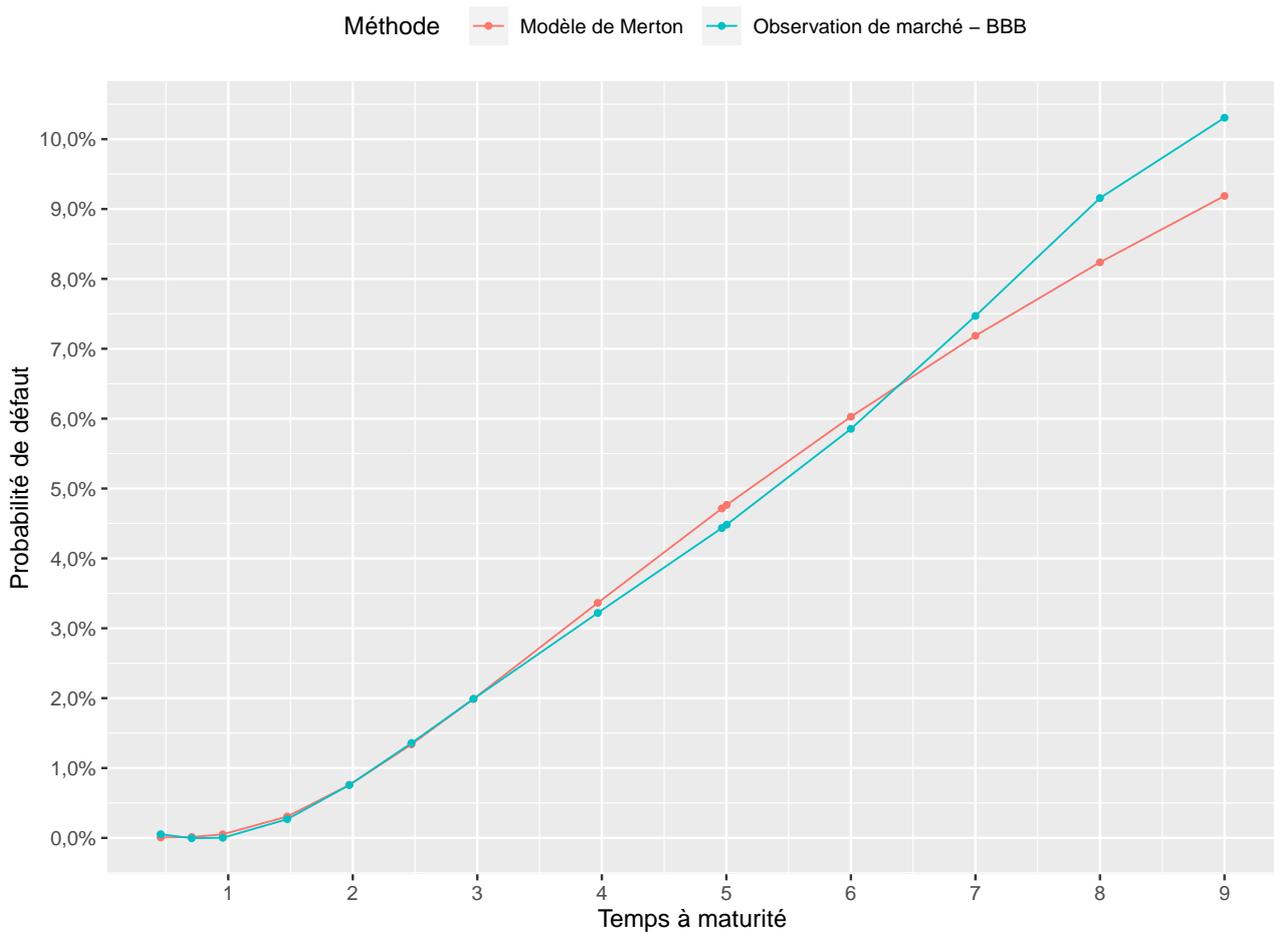


FIGURE 5.1 – Comparaison des probabilités de défaut dans le modèle de Merton

L'écart moyen absolu entre les deux courbes s'élève à 0,0067, ce qui suggère une bonne adaptation à la courbe de *spread* BBB. Ceci se compare à l'écart moyen absolu de 0,0098 dans une modélisation de type Black-Scholes, où les sauts aléatoires sont exclus. La Figure 5.2 sur la page suivante illustre l'efficacité de l'inclusion des sauts imprévisibles dans la modélisation de la valeur de la société. Cette inclusion se révèle surtout efficace pour des longues maturités, où le modèle Black-Scholes sous-estime le risque de défaut.

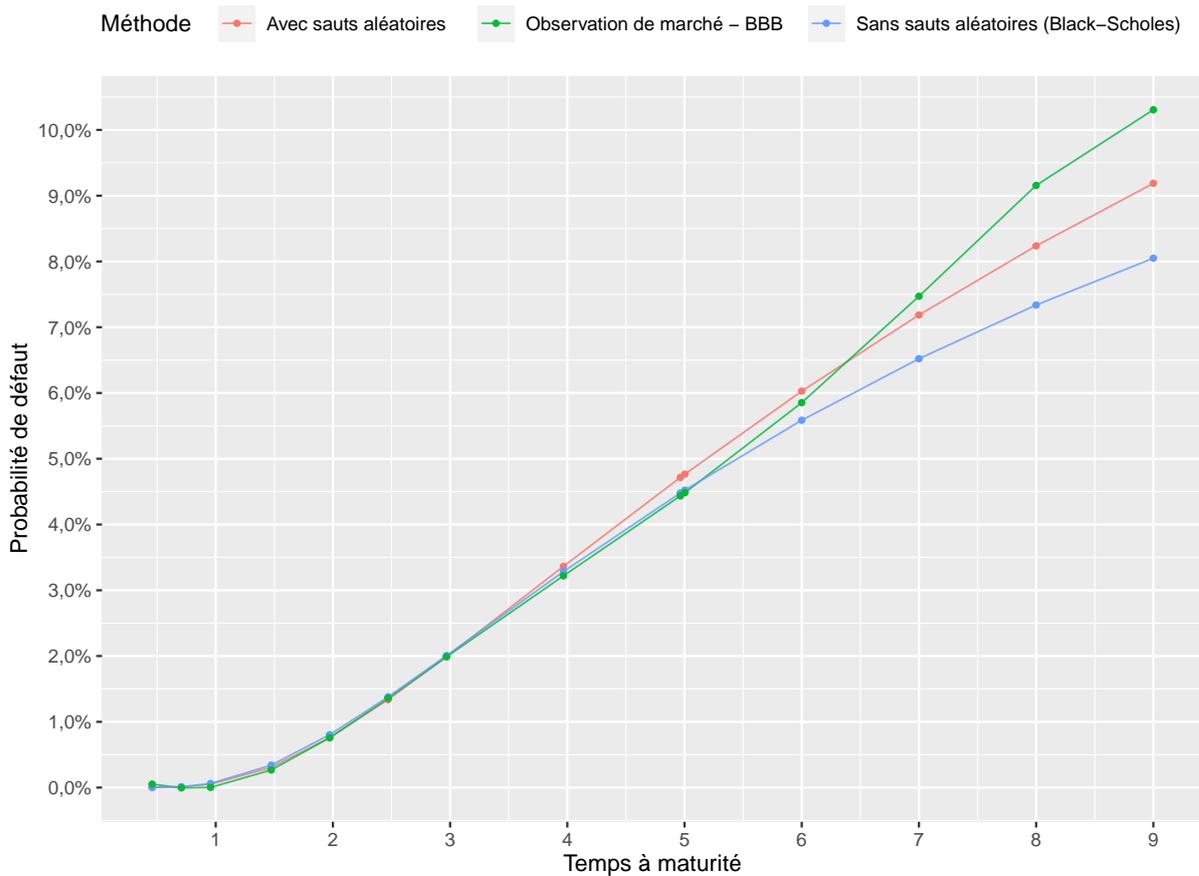


FIGURE 5.2 – Comparaison avec le modèle Black-Scholes : Défaut de type Merton

5.4.2 Lorsque le défaut avant maturité est pris en compte

Par ailleurs, lorsque la définition du temps aléatoire de défaut est cette fois-ci assimilable au modèle de Black et Cox, les paramètres optimaux de modélisation évoluent de façon manifeste. La [Table 5.5](#) ci-dessous résume le jeu de paramètres optimal avec les deux définitions du défaut.

| Paramètre | Valeur avec défaut possible avant maturité | Valeur avec défaut uniquement à maturité |
|-----------|--|--|
| σ | 8,10% | 20,64% |
| λ | 0,03 | 3,50 |
| p_x | 49,99% | 100,00% |
| η_1 | 5,00 | 16,01 |
| η_2 | 5,00 | 28,38 |
| ρ | 0,7996 | -0,8621 |

TABLE 5.5 – Paramètres calibrés avec le défaut de Black-Cox : Cas central

En tenant compte de la valeur de la société non seulement au moment de remboursement de dette, mais à tout instant jusqu'à ce remboursement, la volatilité du mouvement brownien (σ) et la fréquence des sauts (λ) sont nettement réduites pour obtenir à peu près les mêmes probabilités de défaut.

Néanmoins, l'ampleur des sauts aléatoires est notamment plus important lorsque le défaut est défini comme dans le modèle Black et Cox. L'espérance d'un choc positif et négatif est désormais $\frac{1}{\eta_1} = \frac{1}{\eta_2} = 20\%$ contre 6,25% et 3,52% précédemment, et la probabilité des chocs négatifs grimpe de 0% à presque 50%.

La Figure 5.3 suivante compare les probabilités de défaut avec les deux jeux de paramètres par rapport aux probabilités déduites de la courbe BBB.

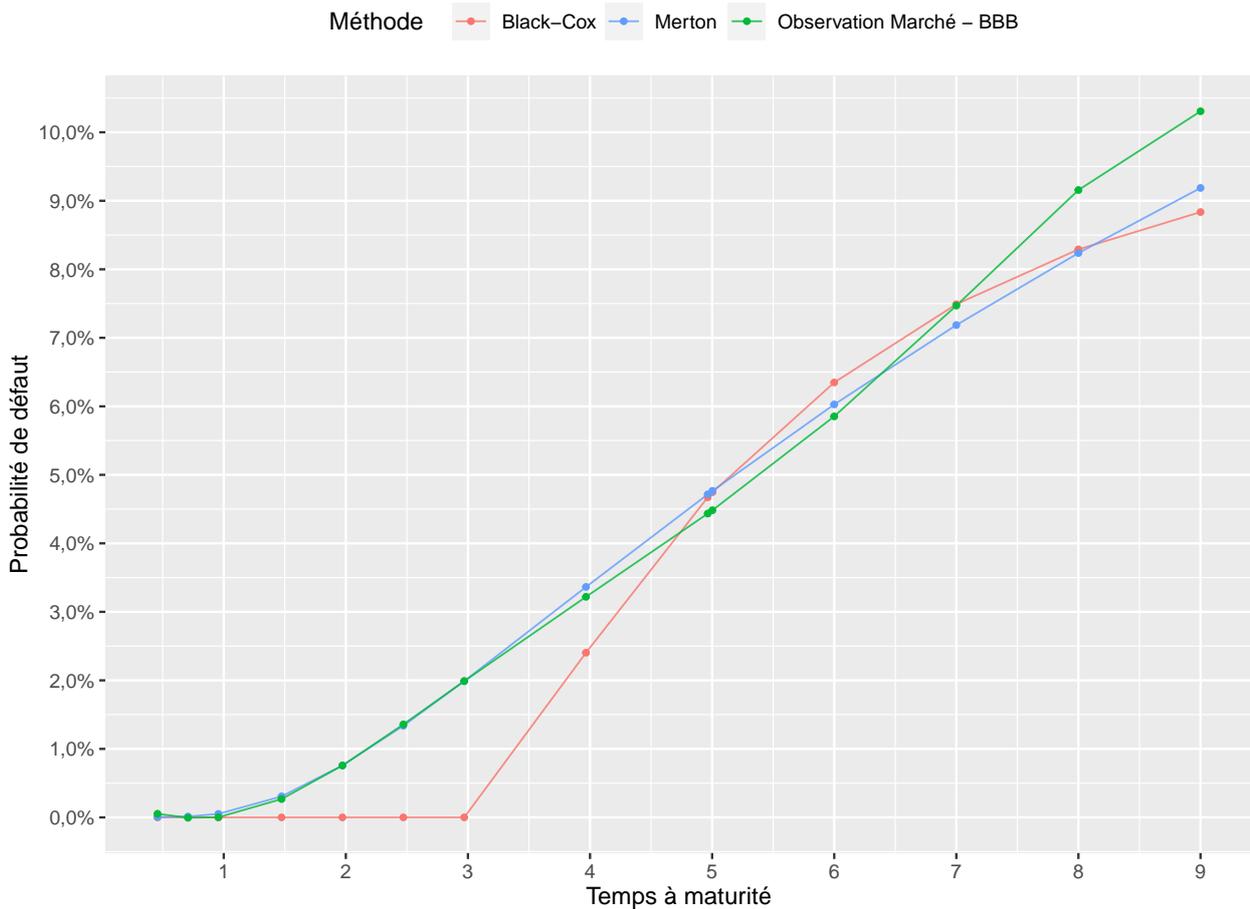


FIGURE 5.3 – Comparaison des probabilités de défaut : Cas central

Il est possible d'apercevoir que l'ajustement de la courbe des probabilités est moins précis lorsque le défaut est de type Black-Cox par rapport à une définition du défaut de Merton, surtout pour les courtes maturités de 5 ans ou moins. En effet, l'écart absolu moyen s'élève à 0,0257, ce qui implique que les probabilités sont approximativement 4 fois plus écartés lorsque le défaut peut arriver avant la maturité.

Cependant, cela n'empêche pas que l'inclusion des sauts aléatoires permet une meilleure adéquation des probabilités de défaut comparée à la calibration dans le modèle Black-Scholes. La Figure 5.4 sur la page suivante met en évidence l'importance des sauts aléatoires pour mieux calibrer les paramètres de la société à la courbe de *spread*.

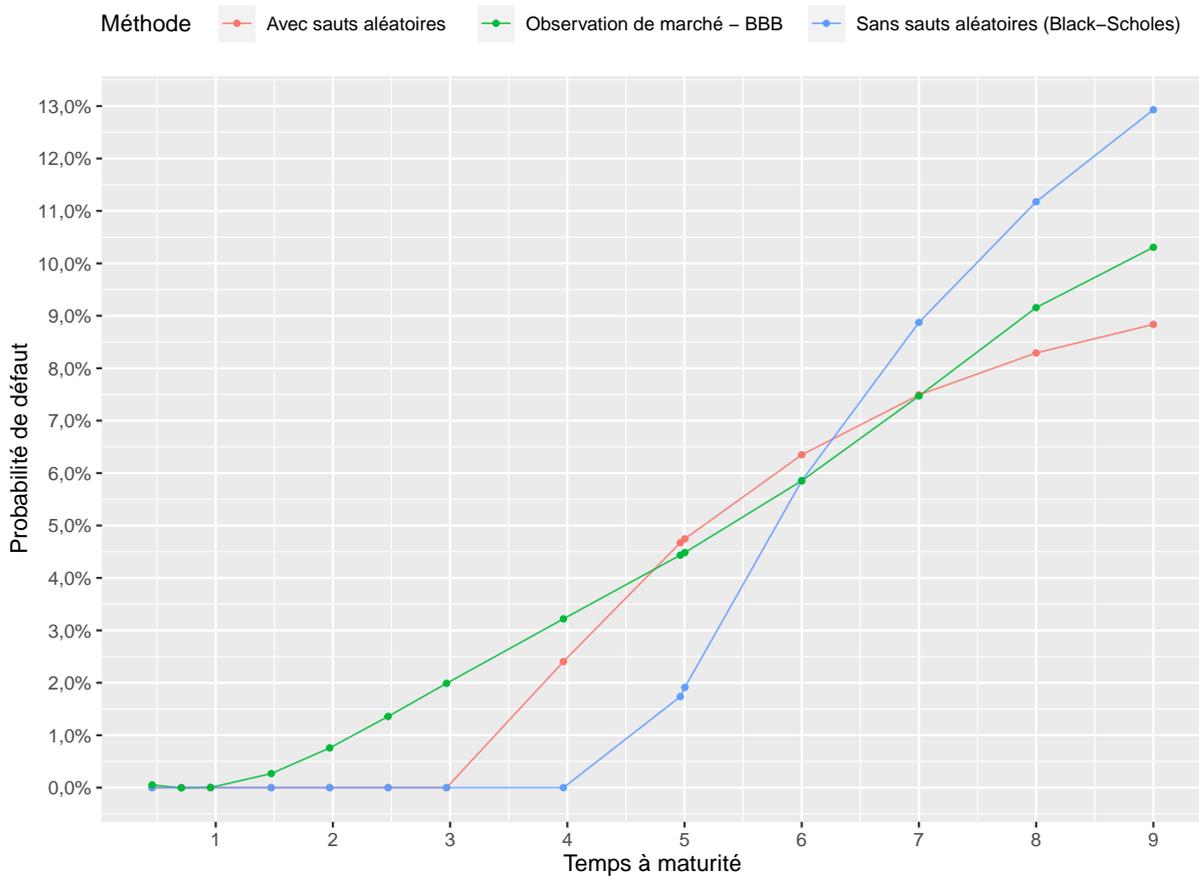


FIGURE 5.4 – Comparaison avec le modèle Black-Scholes : Défaut de type Black-Cox

Lorsque seuls les paramètres σ et ρ sont libres pour reproduire les probabilités de défaut de la courbe de *spread* BBB, l'écart absolu moyen est augmenté de 76% à 0,0452. Ceci suggère que l'inclusion des sauts aléatoires dans la modélisation de la valeur de la firme est d'une importance nette si le défaut avant la maturité des dettes devrait être intégré.

5.4.3 Comparaison des prix des titres

Malgré les deux jeux de paramètres très différents de la [Table 5.5](#), les paramètres représentent un même profil de risque pour une société avec une unique valeur totale connue à la date d'évaluation des titres. Ainsi, la [Table 5.6](#) sur la page suivante met en parallèle la valorisation des titres de la société selon le jeu de paramètres utilisé.

En calculant la juste valeur des titres dans les deux approches de calibration, le prix des obligations *senior* reste relativement stable quelle que soit la définition du défaut utilisé. Cependant, le prix de l'obligation convertible augmente de 4,68% et inversement le prix de l'action privilégiée diminue de 4,45% dans le modèle où le défaut avant maturité possible. Il semblerait que cette variation de prix est conséquence de la sous-estimation des probabilités de défaut aperçue dans le [Figure 5.3](#) pour les maturités inférieures à 5 ans.

| Classe de titre | Prix estimé | |
|--|-----------------------|--------------------------|
| | Défaut de type Merton | Défaut de type Black Cox |
| Obligation <i>senior</i> | 47,87 | 47,83 |
| Obligation convertible (Partie obligataire) | 49,97 | 52,31 |
| Obligation convertible (Option de conversion) | 0 | 0 |
| Action <i>Series A</i> | 11,92 | 11,39 |
| Action ordinaire | 0 | 0 |
| Options de souscription | 0 | 0 |
| Valorisation de la société estimée | 29 996,75 | 29 996,82 |

Prix estimés avec $N = 2^7$; $n = 1500$ et $W(0) = 30\,000$

TABLE 5.6 – Juste valeur des titres : Cas central

Si la maturité des obligations *senior* est augmentée, de 6 ans à 10 ans, et celle des obligations convertibles de 5 ans à 9 ans, les prix observés pour les deux approches de calibration sont presque identiques lorsque les obligations ne versent pas de coupon.

| Classe de titre | Prix estimé | |
|--|-----------------------|--------------------------|
| | Défaut de type Merton | Défaut de type Black Cox |
| Obligation <i>senior</i> | 39,91 | 39,87 |
| Obligation convertible (Partie obligataire) | 34,92 | 34,88 |
| Obligation convertible (Option de conversion) | 0 | 0 |
| Action <i>Series A</i> | 17,18 | 17,20 |
| Action ordinaire | 0 | 0 |
| Options de souscription | 0 | 0 |
| Valorisation de la société estimée | 29 996,75 | 29 996,82 |

Prix estimés avec $N = 2^7$; $n = 2500$; $W(0) = 30\,000$; $T = 10$; $T_{CB} = 9$ et sans coupons

TABLE 5.7 – Similitude des prix au long terme : Cas central

Ainsi, il sera supposé par la suite que les deux définitions du temps de défaut mènent à la même valorisation des titres. Il est raisonnable que tout écart de prix observé est lié à la calibration moins adéquate à la courbe de *spread* pour le modèle de type Black et Cox. Par conséquent, le choix de négliger ou d'intégrer le défaut avant la maturité des obligations peut se faire selon les connaissances a priori des paramètres de la valeur de la société.

5.5 Sensibilité au *rating* de crédit

L'impact d'une dégradation du crédit a également été étudié pour juger la fiabilité du modèle. Nous considérons donc une baisse du *rating* de BBB à B, avec les nouvelles valeurs de *spread* qui sont présentées dans la [Table 5.8](#) ci-dessous.

| Temps jusqu'à maturité | Taux sans risque Vasicek | Taux risqué B | <i>Spread</i> B observé |
|------------------------|--------------------------|---------------|-------------------------|
| 0,458 | 2,857% | 3,831% | 0,974% |
| 0,707 | 2,949% | 3,945% | 0,996% |
| 0,956 | 3,019% | 4,155% | 1,136% |
| 1,474 | 3,115% | 4,663% | 1,548% |
| 1,973 | 3,169% | 5,098% | 1,929% |
| 2,471 | 3,201% | 5,434% | 2,233% |
| 2,970 | 3,221% | 5,678% | 2,457% |
| 3,967 | 3,241% | 5,955% | 2,714% |
| 4,964 | 3,250% | 6,070% | 2,820% |
| 5,003 | 3,250% | 6,072% | 2,823% |
| 6,000 | 3,254% | 6,122% | 2,868% |
| 7,000 | 3,256% | 6,163% | 2,907% |
| 8,000 | 3,258% | 6,201% | 2,943% |
| 9,000 | 3,259% | 6,199% | 2,940% |

TABLE 5.8 – Taux de *spread* observés : Dégradation du crédit

La dégradation du crédit peut être visualisée avec l'augmentation des probabilités de défaut dans la [Figure 5.5](#) suivante.

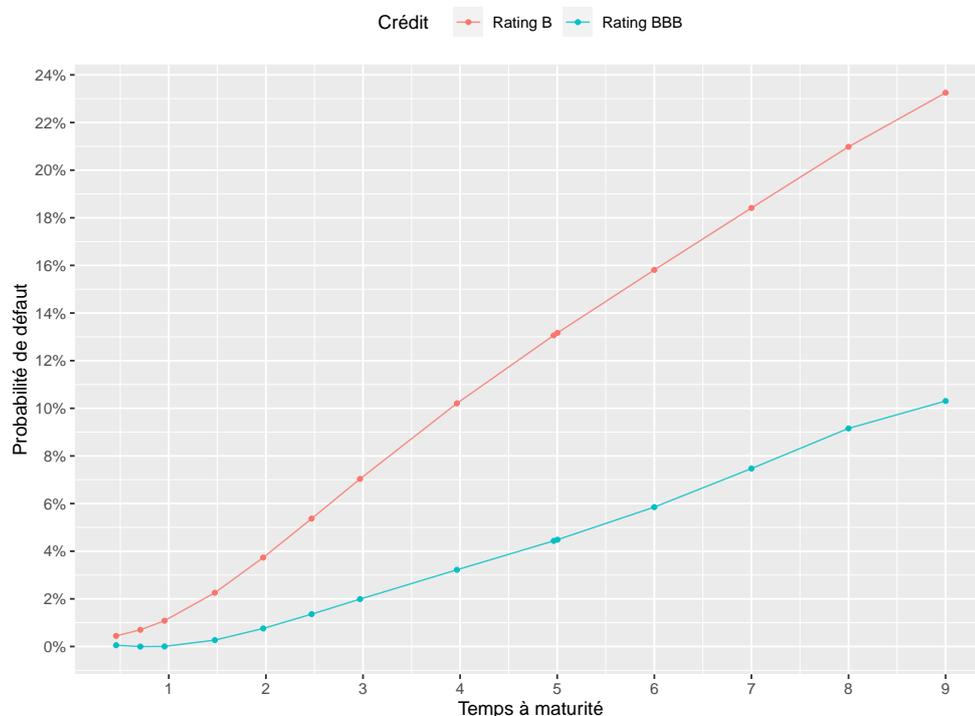


FIGURE 5.5 – Défaut avec une dégradation de crédit

L'impact de la baisse du *rating* de crédit sur les paramètres optimaux de calibration est représenté dans la [Table 5.9](#) ci-dessous.

| Paramètre | Défaut de type Black-Cox | | Défaut de type Merton | |
|-----------|--------------------------|----------|-----------------------|----------|
| | Rating BBB | Rating B | Rating BBB | Rating B |
| σ | 8,10% | 10,41% | 20,64% | 29,77% |
| λ | 0,03 | 0,04 | 3,50 | 4,05 |
| p_x | 49,99% | 49,91% | 100,00% | 77,74% |
| η_1 | 5,00 | 5,00 | 16,01 | 16,04 |
| η_2 | 5,00 | 4,95 | 28,38 | 28,19 |
| ρ | 0,7996 | 0,7996 | -0,8621 | -0,9949 |

TABLE 5.9 – Paramètres calibrés avant et après la dégradation de crédit

Pour les deux approches de calibration, la variation des paramètres optimaux pour le risque de défaut accru est similaire. Nous observons une augmentation de la volatilité du mouvement brownien associé à la valeur de la société, une augmentation de la fréquence des sauts, dont les sauts négatifs deviennent plus probables et plus importants en ampleur.

La [Figure 5.6](#) ci-dessous illustre l'adaptation des nouveaux jeux de paramètres à la courbe de *spread* de rating B.

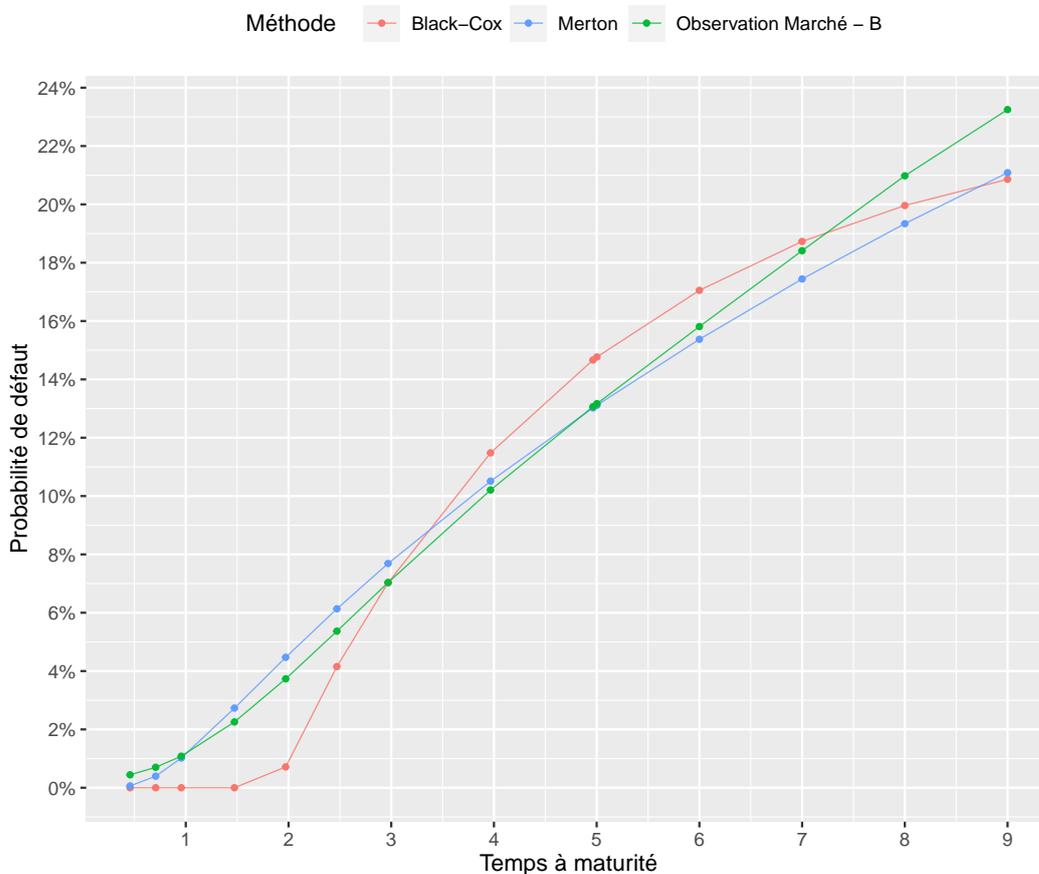


FIGURE 5.6 – Comparaison des probabilités de défaut : Dégradation de crédit

Enfin, les prix calculés par le modèle après le changement de *rating* de crédit se trouvent dans la [Table 5.10](#) ci-dessous.

| Classe de titre | Défaut de type Black-Cox | | Défaut de type Merton | |
|--|--------------------------|------------------|-----------------------|------------------|
| | Rating BBB | Rating B | Rating BBB | Rating B |
| Obligation <i>senior</i> | 47,83 | 47,85 | 47,87 | 47,88 |
| Obligation convertible (Partie obligataire) | 52,31 | 52,22 | 49,97 | 48,44 |
| Obligation convertible (Option de conversion) | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Action <i>Series A</i> | 11,39 | 11,41 | 11,92 | 12,27 |
| Action ordinaire | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Options de souscription | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Valorisation de la société estimée | 29 996,75 | 29 996,75 | 29 996,82 | 29 996,82 |

Prix estimés avec $N = 2^7$; $n = 1500$ et $W(0) = 30\,000$

TABLE 5.10 – Valorisation avant et après la dégradation de credit

Dans tous les cas de figure, l'obligation *senior*, qui a le plus de priorité de remboursement, évolue très peu en prix après la dégradation du crédit. Dans les deux approches de calibration, ce changement de crédit implique également une baisse du prix de l'obligation convertible qui est subordonnée au remboursement des obligations *senior*. Cependant, la baisse de prix est plus manifeste lorsque la calibration n'intègre pas le défaut avant maturité. La baisse du prix est de 3,06% avec le défaut de type Merton contre 0,17% avec le défaut de type Black-Cox. Cette différence illustre de nouveau l'impact de la précision supérieure des probabilités de défaut lorsque la calibration des paramètres est effectuée avec le défaut de type Merton.

Étant donné que la valeur de la société reste à 30 000 avant et après la dégradation du crédit, il est cohérent que la baisse de richesse des porteurs d'obligations convertibles est récupérée par les actionnaires privilégiés.

Conclusion

La valorisation des instruments de passif est une tâche qui se révèle souvent obscure pour une société non cotée. D'une part, le manque d'informations de marché limite l'utilisation de valeurs de référence dans l'évaluation et peut conduire à des méthodologies trop subjectives pour les normes IFRS. D'autre part, la structure complexe des capitaux propres souvent observée pour ces sociétés nécessite une analyse et une valorisation de plusieurs classes de titres dans un même temps. L'objectif de ce mémoire était de répondre au mieux à cette problématique par une méthode de valorisation adaptée aux données disponibles et conforme aux normes IFRS.

Dans un premier temps, plusieurs méthodes de valorisation existantes ont été explorées pour les principaux éléments de passif qui peuvent être émis. Les modèles structurels du risque de crédit et l'analyse en cascade des instruments, élaborés pendant cette phase, ont fait partie intégrante de la théorie de la modélisation finale. Même les modèles de défaut à intensité, malgré pas utilisés dans un but de valorisation, ont permis indirectement à la calibration du modèle avec les courbes de *spread* qui en résultent. En outre, le modèle final a été revu afin d'inclure la possibilité de défaut avant la maturité introduite avec le modèle de Black et Cox.

Par la suite, le cadre de valorisation des normes IFRS a été étudié pour que le modèle soit approprié dans des utilisations pratiques. La valorisation simultanée de l'ensemble des instruments ayant un impact sur la juste valeur de l'*equity* satisfait l'exigence fondamentale de la norme IFRS 2. Par rapport à la juste valeur aussi, telle que définie dans la norme IFRS 13, le modèle de valorisation est bien adapté au regard de son emploi des courbes de *spread* de marché pour quantifier le risque de défaut. De surcroît, la scission des obligations convertibles permet une évaluation conforme aux normes IFRS pour les instruments financiers composés et les passifs financiers non hybrides. L'inclusion des obligations convertibles qui sont passifs financiers hybrides n'a pas été envisageable en raison de leur ratio de conversion aléatoire, mais ceci pourrait faire l'objet d'une étude future.

Ainsi, la méthode de valorisation développée dans ce mémoire répond bien aux objectifs fixés. Il permet une valorisation simultanée des obligations convertibles et non convertibles, des actions privilégiées et ordinaires, et des options sur achat dans la structure de capital de la société émettrice, tout en étant conforme aux normes IFRS. En effet, la calibration du modèle est bien adaptée aux exigences des normes IFRS 9 sur la juste valeur étant donné que le choix des paramètres découle des hypothèses de marché. L'inclusion des sauts aléatoires dans la modélisation permet aussi que le modèle s'adapte même mieux aux probabilités de défaut de marché.

Enfin, l'algorithme de valorisation satisfait la problématique fondamentale de valorisation simultanée des titres dans IFRS 2 en généralisant des algorithmes existantes à l'aide de l'analyse en cascade. Ainsi, malgré sa complexité, ce mémoire réussit à développer une méthodologie viable pour la valorisation des titres de passif d'une société non cotée.

Bibliographie

- American Institute of Certified Public Accountants (AICPA). (2004). *Valuation of privately-held-company equity securities issued as compensation*. AICPA, Inc.
- Asquith, P., & Mullins Jr, D. W. (1991). Convertible debt : Corporate call policy and voluntary conversion. *The Journal of Finance*, 46(4), 1273–1289.
- Ballotta, L., & Kyriakou, I. (2015). Convertible bond valuation in a jump diffusion setting with stochastic interest rates. *Quantitative Finance*, 15(1), 115–129.
- Bardhan, I., Bergier, A., Derman, E., Dosembet, C., & Kani, I. (1994, novembre). Valuing convertible bonds as derivatives. *Goldman Sachs — Quantitative Strategies Research Note*.
- BDO. (2021, Mar). *IFRS in practice 2021/2022 — Accounting for convertible notes*. BDO.
- Bielecki, T. R., Jeanblanc, M., & Rutkowski, M. (2016). *Credit risk modelling* (Rapport technique). Université d'Evry. Cours universitaire.
- Black, F., & Cox, J. C. (1976). Valuing corporate securities : Some effects of bond indenture provisions. *The Journal of Finance*, 31(2), 351–367.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- Brennan, M. J., & Schwartz, E. S. (1977). Convertible bonds : Valuation and optimal strategies for call and conversion. *The Journal of Finance*, 32(5), 1699–1715.
- Brennan, M. J., & Schwartz, E. S. (1980). Analyzing convertible bonds. *Journal of Financial and Quantitative analysis*, 15(4), 907–929.
- Briys, E., & De Varenne, F. (1997). Valuing risky fixed rate debt : An extension. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32(2), 239–248.
- Carver, L. (2011). *Venture capital valuation : Case studies and methodology*. John Wiley & Sons.
- Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing : A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7(3), 229–263.
- Dao, B., & Jeanblanc, M. (2012). Double-exponential jump-diffusion processes : a structural model of an endogenous default barrier with a rollover debt structure. *The Journal of Credit Risk*, 8(2), 21.
- Elouadi, S. (2015). Les effets attitudeux de l'actionariat salarié : Une étude empirique dans le contexte des entreprises françaises du SBF 250. *Question(s) de Management*, 11(3), 11–24. doi: 10.3917/qdm.153.0011
- Eom, Y. H., Helwege, J., & Huang, J.-z. (2004). Structural models of corporate bond pricing : An empirical analysis. *The Review of Financial Studies*, 17(2), 499–544.
- Fang, F., Jönsson, H., Oosterlee, C. W., & Schoutens, W. (2009). Fast valuation and calibration of credit default swaps under lévy dynamics. *Available at SSRN 1628672*.
- Fang, F., & Oosterlee, C. W. (2009a). A novel pricing method for european options based on fourier-cosine series expansions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(2), 826–848.

- Fang, F., & Oosterlee, C. W. (2009b). Pricing early-exercise and discrete barrier options by Fourier-cosine series expansions. *Numerische Mathematik*, 114(1), 27–62.
- Fenn, G. W., & Liang, N. (2001). Corporate payout policy and managerial stock incentives. *Journal of Financial Economics*, 60(1), 45–72.
- Filipovic, D. (2009). *Term-Structure Models : A Graduate Course*. Springer.
- Halgašová, J., Stehlíková, B., & Bučková, Z. (2014). Estimating the short rate from the term structures in the Vasicek model. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 61(1), 87–103.
- Ingersoll, J. (1977). An examination of corporate call policies on convertible securities. *The Journal of Finance*, 32(2), 463–478.
- Ingersoll Jr, J. E. (1977). A contingent-claims valuation of convertible securities. *Journal of Financial Economics*, 4(3), 289–321.
- International Accounting Standards Board. (2004, février). *IFRS 2 — Paiement fondé sur des actions*.
- International Accounting Standards Board. (2008, décembre). *IAS 32 — Instruments financiers : présentation*.
- International Accounting Standards Board. (2011, mai). *IFRS 13 — Évaluation de la juste valeur*.
- International Accounting Standards Board. (2014, juillet). *IFRS 9 — Instruments financiers*.
- Jarrow, R. A., & Turnbull, S. M. (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. *The Journal of Finance*, 50(1), 53–85.
- Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management science*, 48(8), 1086–1101.
- Lando, D. (1998). On Cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives research*, 2, 99–120.
- Lipton, A., & Sepp, A. (2009). Credit value adjustment for credit default swaps via the structural default model. *The Journal of Credit Risk*, 5(2), 127–150.
- Lord, R., Fang, F., Bervoets, F., & Oosterlee, C. W. (2008). A fast and accurate FFT-based method for pricing early-exercise options under Lévy processes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(4), 1678–1705.
- Lyden, S., & Saraniti, D. (2001). An empirical examination of the classical theory of corporate security valuation. *SSRN Electronic Journal*.
- Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt : The risk structure of interest rates. *The Journal of Finance*, 29(2), 449–470.
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of financial economics*, 3(1-2), 125–144.
- Sneddon, I. N. (1995). *Fourier transforms*. Courier Corporation.
- Tankov, P. (2003). *Financial modelling with jump processes*. CRC press.
- Tsiveriotis, K., & Fernandes, C. (1998). Valuing convertible bonds with credit risk. *The Journal of Fixed Income*, 8(2), 95.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2), 177–188.

Calibration avec la possibilité de défaut avant la maturité

L'ensemble de cette annexe fait référence à l'article de recherche de [Fang et al. \(2009\)](#). Il est supposé que l'instant aléatoire de défaut τ est défini tel que

$$\tau = \inf \{t \in \mathbb{R}_+ : W(t) \leq RW(0)\}.$$

Ainsi, la probabilité risque-neutre d'absence de défaut satisfait

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}(\tau > t) &= \mathbb{Q} \left(\min_{0 \leq s \leq t} Y(s) - \ln W(0) > \ln R \right) \\ &= \mathbb{Q} \left(\min_{0 \leq s \leq t} Y^*(s) > \ln R \right) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{] \ln R, +\infty[} \left(\min_{0 \leq s \leq t} Y^*(s) \right) \right], \end{aligned}$$

en notant Y^* la translation du processus Y par $\ln W(0)$. La détermination de cette probabilité est donc équivalente à valoriser sans actualisation une option binaire qui est simultanément une option barrière de type *down and out*.

Pour cette approche, il est supposé que l'évènement de défaut ne peut survenir que sur un ensemble fini de dates équidistantes $\{t_0, t_1, \dots, t_M\}$ qui créent une partition de l'intervalle $[0, t]$. En effet, $\forall m \in \{0, 1, \dots, M\}$, $t_m = \frac{m}{M}t$. Par conséquent,

$$\mathbb{Q}(\tau > t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{m=1}^M \mathbf{1}_{] \ln R, +\infty[} \left(Y^*(t_m) \right) \right].$$

Soit $p(x, t_m)$ le prix en date t_m de l'option binaire si le sous-jacent $Y^*(t_m)$ vaut x . En particulier, en date $t_M = t$,

$$p(x, t_M) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > \ln R \\ 0 & \text{si } x \leq \ln R. \end{cases}$$

En notant $f_{Y^*(t_{m+1})|Y^*(t_m)=x}$ la densité de probabilité conditionnelle de $Y^*(t_{m+1})$ étant donné $Y^*(t_m) = x$, il est possible d'établir une relation de récurrence entre les prix $p(x, t_m)$ et $p(x, t_{m+1})$. Pour $m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$,

$$p(x, t_m) = \int_{\ln R}^{+\infty} f_{Y^*(t_{m+1})|Y^*(t_m)=x}(y) p(y, t_{m+1}) dy.$$

Cette relation initialisée avec $m = M-1$ permet d'en déduire $p(0, t_0) = \mathbb{Q}(\tau > t)$. Pour ce faire, il convient d'estimer la densité conditionnelle à l'aide de la fonction caractéristique de Y^* .

La fonction caractéristique de Y^* à l'instant t est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{iuY^*(t)}] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{iu(Y(t)-\ln W(0))}\right] \\ &= \exp\left(\phi(t, 0, iu) + \psi_1(t, 0, iu)r(0) + \psi_3(t, iu)\right) \\ &:= \varphi_{Y^*(t)}(u),\end{aligned}$$

où les fonctions ϕ , ψ_1 et ψ_3 sont telles que définies à la [sous-section 5.1.2](#).

[Fang et Oosterlee \(2009a\)](#) démontrent que la fonction caractéristique des processus de Lévy, un cas particulier des processus mixtes saut-diffusion, peut servir à calculer une estimation de la densité conditionnelle par la formule suivante :

$$f_{Y^*(t)|Y^*(s)=x}(y) \approx \frac{1}{b-a} \operatorname{Re}\left(\varphi_{Y^*(t)-Y^*(s)}(0)\right) + \frac{2}{b-a} \sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{Re}\left[\varphi_{Y^*(t)-Y^*(s)}\left(\frac{n\pi}{b-a}\right) e^{in\pi \frac{x-a}{b-a}}\right], \quad (\text{A.1})$$

où a et b sont des paramètres réels, choisis selon la vitesse que la norme de $\varphi_{Y^*(t)}$ tend vers 0. Dans leur article, ils conseillent de prendre

$$\begin{cases} a = c_1 - L\sqrt{c_2 + \sqrt{c_4}} \\ b = c_1 + L\sqrt{c_2 + \sqrt{c_4}}, \end{cases}$$

où c_i correspond au cumulatif d'ordre i de $Y^*(t)$ et $L \in [7,5; 10]$.

Ainsi, $\forall m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$,

$$p(x, t_m) \approx \int_{\ln R}^b f_{Y^*(t_{m+1})|Y^*(t_m)=x}(y) p(y, t_{m+1}) dy. \quad (\text{A.2})$$

Dans le cas de ce mémoire, le processus stochastique Y^* n'est pas un processus de Lévy car la dérive de la partie de diffusion intègre le taux court $r(t)$ qui dépend du temps, ce qui ne permet pas de reprendre la forte simplification de la fonction $\varphi_{Y^*(t)-Y^*(s)} = \varphi_{t-s}$ dans [Fang et al. \(2009\)](#). Cependant, les incréments du processus saut-diffusion sont indépendants, comme illustré par [Tankov \(2003\)](#). Il s'ensuit que

$$\varphi_{Y^*(t)-Y^*(s)} = \frac{\varphi_{Y^*(t)}}{\varphi_{Y^*(s)}}, \quad \forall 0 \leq s \leq t.$$

Pour alléger la lecture des équations qui suivent, la notation $\varphi_{Y^*(t)-Y^*(s)}(u) := \tilde{\varphi}_t(u, t-s)$ sera utilisée par la suite.

En remplaçant l'approximation de la densité conditionnelle ([équation A.1](#)) dans l'[équation A.2](#), il vient que $\forall m \in \{0, 1, \dots, M-1\}$,

$$p(x, t_m) \approx \frac{1}{2} \Phi_0(x) P_0(t_{m+1}) + \sum_{n=1}^{N-1} \Phi_n(x) P_n(t_{m+1}),$$

en définissant

$$\begin{cases} P_n(t_{m+1}) := \frac{2}{b-a} \int_{\ln R}^b \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) p(y, t_{m+1}) dy \\ \Phi_n(x) := \operatorname{Re} \left[\tilde{\varphi}_{t_{m+1}} \left(\frac{n\pi}{b-a}, \frac{t}{M} \right) e^{in\pi \frac{x-a}{b-a}} \right]. \end{cases}$$

Ces définitions permettent d'établir une relation de récurrence entre $P_n(t_m)$ et le vecteur $(P_n(t_{m+1}))_{n \in \{0,1,\dots,N-1\}}$. En effet,

$$P_n(t_m) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\tilde{\varphi}_{t_{m+1}} \left(0, \frac{t}{M} \right) \omega_{n,0} \right] P_0(t_{m+1}) + \sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{Re} \left[\tilde{\varphi}_{t_{m+1}} \left(\frac{k\pi}{b-a}, \frac{t}{M} \right) \omega_{n,k} \right] P_k(t_{m+1}),$$

$$\text{où } \omega_{n,k} = \frac{2}{b-a} \int_{\ln R}^b e^{ik\pi \frac{y-a}{b-a}} \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy.$$

Cette relation est initialisée avec

$$\begin{aligned} P_n(t_M) &= \frac{2}{b-a} \int_{\ln R}^b \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) dy \\ &= \begin{cases} \frac{2}{b-a} (b - \ln R) & \text{si } n = 0 \\ \frac{2}{n\pi} \left[\sin(n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi(\ln R - a)}{b-a}\right) \right] & \text{si } n \in \{1, \dots, N-1\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, cette relation est équivalente à

$$\vec{P}^*(t_m) = \operatorname{Re} \left[\mathbf{\Omega} \mathbf{\Lambda}_{m+1} \right] \vec{P}(t_{m+1}), \quad (\text{A.3})$$

lorsque nous définissons $\forall m \in \{1, \dots, M-1\}$:

- $\vec{P}(t_{m+1}) := \left(P_0(t_{m+1}), P_1(t_{m+1}), \dots, P_{N-1}(t_{m+1}) \right)^\top \in \mathbb{R}^N$,
- $\vec{P}^*(t_m) := \left(2P_0(t_m), P_1(t_m), \dots, P_{N-1}(t_m) \right)^\top \in \mathbb{R}^N$,¹
- $\mathbf{\Lambda}_{m+1} := \operatorname{diag} \left[\left(\tilde{\varphi}_{t_{m+1}} \left(\frac{n\pi}{b-a}, \frac{t}{M} \right) \right)_{n \in \{0,1,\dots,N-1\}} \right] \in \mathbb{C}^{N \times N}$, et
- $\mathbf{\Omega} := \left[\omega_{n,k} \right]_{\substack{n \in \{0,1,\dots,N-1\} \\ k \in \{0,1,\dots,N-1\}}} \in \mathbb{C}^{N \times N}$.

Le calcul de l'équation A.3 peut être effectué de façon numériquement efficient avec $O(N \log_2 N)$ opérations au lieu des $O(N^2)$ opérations en faisant directement le produit matriciel. Ceci est car la matrice $\mathbf{\Omega}$ est égale à la somme d'une matrice de Toeplitz \mathbf{T} et une matrice de Hankel \mathbf{H} .

1. $\vec{P}^*(t_m) = \vec{P}(t_m)$ sauf pour le premier élément qui est doublé

Plus précisément,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & \cdots & w_{N-2} & w_{N-1} \\ w_{-1} & w_0 & \ddots & & w_{N-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ w_{2-N} & & \ddots & w_0 & w_1 \\ w_{1-N} & w_{2-N} & \cdots & w_{-1} & w_0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & \cdots & w_{N-2} & w_{N-1} \\ w_1 & & \ddots & \ddots & w_N \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ w_{N-2} & w_{N-1} & \ddots & & w_{2N-3} \\ w_{N-1} & w_N & \cdots & w_{2N-3} & w_{2N-2} \end{bmatrix},$$

où les coefficients de ces matrices sont tels que

$$w_j := \begin{cases} \frac{b - \ln R}{b - a} & \text{si } j = 0 \\ \frac{-i}{\pi j} \left[(-1)^j - \exp\left(ij\pi \left(\frac{\ln R - a}{b - a} \right) \right) \right] & \text{si } j \neq 0. \end{cases}$$

Proposition

Produit d'une matrice de Toeplitz ou Hankel avec un vecteur

Soient :

- $x = (x_0, \dots, x_{N-1})^\top \in \mathbb{C}^N$,
- $\text{rev} : (x_0, \dots, x_{N-1})^\top \mapsto (x_{N-1}, \dots, x_0)^\top$ l'application qui inverse l'ordre des éléments d'un vecteur,
- $\text{FFT} : x \mapsto \text{FFT}(x)$ la transformée de Fourier discrète du vecteur x calculée avec l'algorithme FFT, et
- \mathcal{N} l'application qui rend les N premiers éléments d'un vecteur.

Alors,

- i) $\mathbf{T}x = \mathcal{N}\left(\text{FFT}^{-1}\left[\text{FFT}(\vec{w}_T) \odot \text{FFT}(\tilde{x})\right]\right)$ et
- ii) $\mathbf{H}x = \text{rev}\left[\mathcal{N}\left(\text{FFT}^{-1}\left[\text{FFT}(\vec{w}_H) \odot \text{FFT}(\tilde{x}) \odot \mathbf{sgn}\right]\right)\right],$

où :

- $\vec{0}$ est le vecteur nul de N éléments,
- $\tilde{x} = (x, \vec{0})^\top \in \mathbb{C}^{2N}$,
- $\mathbf{sgn} = (1, -1, 1, -1, \dots)^\top \in \mathbb{R}^{2N}$,
- $\vec{w}_T = (w_0, w_{-1}, \dots, w_{1-N}, 0, w_{N-1}, w_{N-2}, \dots, w_1)^\top \in \mathbb{C}^{2N}$,
- $\vec{w}_H = (w_{2N-1}, w_{2N-2}, \dots, w_1, w_0)^\top \in \mathbb{C}^{2N}$, et
- $x \odot y$ dénote le produit de Hadamard entre deux vecteurs de même dimension.

Ainsi, pour calculer le produit dans l'équation A.3, il suffit d'utiliser la proposition précédente lorsque le vecteur x correspond au produit de Hadamard entre $\vec{P}(t_{m+1})$ et le diagonal de $\mathbf{\Lambda}_{m+1}$. La partie réelle de ce résultat correspond à $\vec{P}^*(t_m)$, qui est égal au vecteur $\vec{P}(t_m)$ de l'itération suivante en divisant le premier élément par 2. Avec chaque itération, la matrice $\mathbf{\Omega}$ est ajustée en modifiant les valeurs de a et b pour refléter la différence de loi entre $Y^*(t_{m+1})$ et $Y^*(t_m)$. Enfin, une fois déterminé le vecteur $\vec{P}(t_1)$,

$$\mathbb{Q}(\tau > t) = p(0, t_0) \approx \frac{1}{2}\Phi_0(0)P_0(t_1) + \sum_{n=1}^{N-1} \Phi_n(0)P_n(t_1).$$