

Mémoire présenté le : 06/05/2025

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : KAMSSI TCHAKAM Igor Davy

Titre Mise en place de modèles de probabilité de défaut en IFRS9 pour les
entreprises nigérianes

Confidentialité : ☐ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

signature

Entreprise :

Nom : SL FINANCIAL

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Achille SIME

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Frédéric Planchet

Favre-Béguet

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier **Mr Achille SIME**, qui m'a donné l'opportunité d'effectuer mon stage de fin d'étude entouré de l'équipe de son cabinet d'actuariat **SL FINANCIAL**.

Je remercie **Mr Frédéric PLANCHET** et le **Dr NGOUPEYOU Armand Brice**, mes encadreurs académique pour leurs précieux conseils.

Je remercie **mes parents et toute ma famille**, qui m'ont permis de pouvoir suivre mon cursus IIA-ISFA ainsi que de réaliser mon stage de fin d'étude.

Je remercie **l'IIA-ISFA et son personnel** qui m'ont permis de pouvoir suivre ma formation dans de bonne condition.

LISTE DES ABRÉVIATIONS

- **bp** : point de base ou basis point
- **CDS** : Credit Default Swap
- **EAD** : Exposure at Default
- **ECL** : Expected credit loss
- **LGD** : Loss Given Default
- **PD** : Probability of Default
- **PiT** : Point in Time
- **DP** : Point de défaut
- **DD** : Distance au Défaut
- **EDF** : Fréquence de Défaut attendue
- **GBM** : Geometric Brownian Movement
- **KMV** : Kealhofer-Merton-Vasicek
- **MEDAF** : Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers
- **MLE** : Maximum Likelihood Estimation
- **TTC** : Trough the cycle
- **SICR** : Significant Increase InCredit Risk
- **FV** : Fair value
- **FVOCI** : Fair value through OCI
- **OCI** : Other ComprehensiveIncomes
- **CA** : Coût amorti
- **NGX** : Nigérian exchange group

Liste des tableaux

1.1	Classification et évaluation des actifs financiers selon IFRS 9	16
1.2	Classification des créances selon leur statut de risque de crédit	17
1.3	Structure financière de la firme dans le modèle de Merton (1974)	23
2.1	Comparaison synthétique et justification du choix	55
2.2	Default Rates by Rating	56
2.3	Données sur les obligations émises par DANGOTE CEMENT	75

Table des figures

1.1	Diagramme de calcul des ECL	20
2.1	Estimation des paramètres du modèle KMV	52
2.2	Résultat des estimations des DD et PD	53
2.4	Statistique descriptive PD sur un historique de 2 an	54
2.5	Répartition des ratings	56
2.6	Répartition des ratings par secteur	57
2.7	Exemple de rating sur la page Augusto	58
2.8	Comparaison des ratings institutions financières	59
2.9	Comparaison des ratings, institutions non financières	59
2.10	Extrait du dataSet obtenu après la collecte	63
2.11	Statistiques descriptives des variables retenues	64
2.12		71
2.13	Intensité de défaut constante par morceaux	74
2.14	Résultats de calibration du modèle à intensité	76
2.15	Historical Obs PDs data	77
2.16	Historical economic data	78
2.17	Regression result	78
2.18	Exemple Profil de perte	81
2.19	Pondération tenant compte du profil de perte	82
2.20	Pondération ne tenant pas compte des profil de perte	83

RÉSUMÉ

Ce mémoire se penche sur la construction de modèles de Probabilité de Défaut (PD) conformément à la norme IFRS 9, spécifiquement pour les entreprises nigérianes.

La norme IFRS 9 introduit un cadre de provisionnement basé sur les pertes de crédit attendues (ECL – Expected Credit Losses), où les ECL doivent être comptabilisées dès la reconnaissance des instruments financiers. De nouveaux concepts sont ainsi intégrés, tels que l'augmentation significative du risque de crédit (SICR), l'approche forward-looking et l'utilisation de scénarios économiques pondérés. La PD, en tant qu'élément clé du calcul des ECL, doit donc répondre à des exigences strictes pour déterminer les ECL et évaluer le SICR. L'objectif de ce mémoire est de proposer des modèles d'estimation des PD adaptés aux entreprises nigérianes, tout en assurant leur conformité avec la norme IFRS 9.

Après avoir passé en revue les différents modèles d'estimation de PD, nous avons sélectionné les approches les plus appropriées pour le marché nigérian. En raison des contraintes majeures rencontrées, principalement liées à l'accès aux données, nous avons opté pour le modèle KMV pour les entreprises cotées à la NGX et le modèle de PD inféré des obligations pour les entreprises émettrices de titres obligataires. Ce manque de données n'a toutefois pas permis de développer un modèle de scoring pour les autres types d'entreprises.

Nous avons également exploré l'intégration des éléments prospectifs (forward-looking) et des scénarios économiques pondérés, conformément aux exigences de la norme IFRS 9. Cette étude démontre comment ces aspects peuvent être incorporés dans les résultats de nos modèles à travers des exemples illustratifs.

Mots clés : IFRS 9, Probabilité de Défaut (PD), Pertes de Crédit Attendu (ECL), Modèle KMV, Nigeria, Scénarios Économiques Pondérés, Forward-Looking, Obligations.

ABSTRACT

This thesis focuses on the construction of Probability of Default (PD) models in compliance with IFRS 9, specifically for Nigerian companies.

The IFRS 9 standard introduces a provisioning model based on Expected Credit Losses (ECL), where ECL must be recognized as soon as financial instruments are accounted for. New concepts such as Significant Increase in Credit Risk (SICR), a forward-looking approach, and the use of weighted economic scenarios are introduced. Since PD is a key component of ECL calculation, it must meet strict requirements to determine ECL and assess SICR. The objective of this thesis is to propose PD estimation models adapted to Nigerian companies, ensuring compliance with IFRS 9.

After reviewing various PD estimation models, we selected the most suitable approaches for the Nigerian market. Due to significant constraints, mainly related to data access, we chose the KMV model for companies listed on the NGX and the PD model inferred from bonds for companies issuing debt securities. However, the lack of data did not allow the development of a scoring model for other types of companies.

We also explored the integration of forward-looking elements and weighted economic scenarios, in line with IFRS 9 requirements. This study demonstrates how these aspects can be incorporated into the results of our models through illustrative examples.

Keywords : IFRS 9, Probability of Default (PD), Expected Credit Loss (ECL), KMV Model, Nigeria, Weighted Economic Scenarios, Forward-Looking, Bonds.

Table des matières

Liste des tableaux	5
Liste des figures	6
RÉSUMÉ	7
ABSTRACT	8
INTRODUCTION GÉNÉRALE	11
0.1 Contexte général de l'étude et justification	11
0.2 Problématique	12
0.3 Objectifs	13
0.4 Zone d'étude	13
0.5 Méthodologie de la recherche	13
1 Cadre conceptuel et théorique	14
1.1 Présentation de la norme IFRS 9 et introduction aux Expected credit Loss (ECL)	14
1.1.1 Introduction à la norme IFRS 9	14
1.1.2 Les piliers de l'IFRS 9	15
1.2 Modèle de risque de défaut	21
1.2.1 Les modèles structurels	21
1.2.2 Les modèles réduits	28
1.2.3 Modèle de scoring	38
1.3 Marché nigérian et choix des modèles	40

2	Mise en Œuvre des modèles	42
2.1	Mise en œuvre du modèle KMV pour les entreprises nigériane cotées à la NGX	42
2.1.1	Presentation du modèle KMV	42
2.1.2	Mise en œuvre du modèle pour les entreprise cotées à la bourse du Nigeria	50
2.2	Modèle de Scoring	61
2.2.1	Méthodologie	61
2.3	Modèle à intensité	67
2.3.1	Estimation de l'intensité de défaut via utilisation des spreads de bonds	67
2.3.2	Calibration de l'intensité de défaut	73
2.4	Forward-looking et scénario économique	76
2.4.1	Forward-Looking	77
2.4.2	Scénarios économiques	79
2.4.3	PD IFRS 9	83
	CONCLUSION GÉNÉRALE	85
.1	Annexe A : Outils Mathématiques	89
.1.1	Lemme d'Itô	89
.1.2	Théorème d'arrêt de Doob	89
.1.3	Estimation par maximum de vraisemblance	89

INTRODUCTION GÉNÉRALE

0.1 Contexte général de l'étude et justification

Dans le cadre de la norme IFRS 9, la gestion des risques de crédit joue un rôle primordial dans l'évaluation et la comptabilisation des pertes de crédit attendues, connues sous le nom d'ECL (Expected Credit Losses). Les ECL permettent aux entreprises d'anticiper les pertes potentielles sur leurs actifs financiers en prenant en compte le risque de crédit sur toute la durée de vie de ces actifs, y compris les créances clients, les prêts, les obligations, et autres instruments financiers exposés à un risque de défaut.

L'un des éléments essentiels des ECL est la **probabilité de défaut (PD)**, qui représente la probabilité qu'un débiteur ou une contrepartie fasse défaut sur ses obligations dans un horizon temporel donné. La PD constitue ainsi le pilier principal des ECL, car elle détermine dans quelle mesure une créance ou un actif financier est susceptible de devenir non performant. Une estimation précise des PD est cruciale pour calculer les ECL, car elle permet de quantifier les risques de crédit et sa dégradation, et d'ajuster les provisions en conséquence, conformément aux exigences de la norme IFRS 9.

Dans ce contexte, le cabinet d'actuariat dans lequel s'est effectué notre stage, en partenariat avec un cabinet comptable, a été sollicité pour fournir des modèles de PD robustes afin de répondre aux besoins d'audit de nos clients. Le cabinet comptable réalise des audits des comptes de ses clients et, pour ce faire, il est essentiel d'estimer les probabilités de défaut non seulement pour les créances détenues par nos clients, mais également pour les créances que ces derniers détiennent envers d'autres institutions. Les modèles de PD que nous développerons serviront à appuyer l'audit en fournissant des estimations fiables pour la dépréciation des créances et la gestion des risques de crédit.

Cependant, l'une des difficultés majeures sur le marché nigérian est le manque de suivi régulier par les agences de notation internationales concernant les notations des entreprises

locales. En effet, les entreprises nigérianes ne bénéficient pas d'une mise à jour fréquente des notations de crédit par ces agences, ce qui crée un déficit d'information sur le risque de crédit actualisé des entités économiques locales. Cette situation renforce l'importance de disposer de modèles de PD internes, applicables à des dates précises, tant lors de la comptabilisation des actifs financiers qu'aux dates de reporting, comme l'exige la norme IFRS 9. Ces modèles permettront de fournir des estimations forward-looking et adaptées aux contextes économiques et financiers locaux, répondant ainsi aux exigences de la norme.

En raison de ces contraintes et de l'importance du marché nigérian, nous avons décidé de concentrer notre analyse sur ce marché spécifique. Ce choix est motivé par le fait que la majorité de la clientèle à auditer est constituée d'entreprises nigérianes, et que les particularités économiques et financières locales nécessitent une adaptation des modèles de PD aux réalités du pays.

En conclusion, le développement de ces modèles de PD est crucial non seulement pour la conformité des entreprises aux exigences de la norme IFRS 9, mais aussi pour leur capacité à gérer efficacement leurs risques de crédit dans un environnement économique en constante évolution.

0.2 Problématique

La mise en œuvre de la norme IFRS 9 dans le cadre de l'audit des comptes des entreprises nigérianes soulève plusieurs défis importants. L'un des principaux défis concerne l'estimation des PD, composante clé du calcul des pertes des ECL. Or, au Nigéria, le suivi régulier des notations de crédit par les agences de notation internationales est souvent insuffisant, ce qui complique la tâche des cabinets d'audit et des institutions financières qui cherchent à respecter les exigences d'IFRS 9.

En effet, la norme IFRS 9 impose d'évaluer les ECL en tenant compte d'estimations forward-looking, ce qui nécessite des modèles de PD non seulement adaptés aux particularités économiques du Nigéria, mais aussi capables de fournir des estimations actualisées aux dates de comptabilisation et de reporting. De plus, les modèles doivent être suffisamment robustes pour tenir compte des variations et scénarios économiques, et des risques spécifiques du marché nigérian.

Ainsi, la problématique à laquelle nous faisons face est la suivante : **comment développer et implémenter des modèles de PD capables de fournir des estimations fiables et**

conformes à IFRS 9, tout en répondant aux contraintes d'un marché peu couvert par les agences de notation internationales comme celui du Nigéria ?

0.3 Objectifs

L'objectif principal de cette étude est de développer et de fournir des modèles PD adaptés aux besoins des cabinets comptables et des institutions financières opérant au Nigéria, dans le cadre de la norme IFRS 9. Plus précisément, les objectifs de cette étude sont les suivants :

- Développer des Modèles de PD Adaptés tenant compte des spécificités économiques et des conditions du marché local pour ne plus avoir une totale dépendance aux agences internationales de rating.
- Intégrer les Exigences IFRS 9 : Assurer que les modèles développés permettent une estimation conforme aux exigences de la norme IFRS 9, notamment en ce qui concerne l'évaluation des ECL sur une base forward-looking, de scénario économique et sur différentes dates.

0.4 Zone d'étude

Cette étude se concentre sur le marché financier nigérian, car la majorité de notre clientèle à auditer est située au Nigéria. Le manque de suivi régulier des agences de notation internationales pour les entreprises nigérianes accentue le besoin de modèles locaux précis. De plus, les spécificités économiques du Nigéria nécessitent des outils adaptés aux exigences locales tout en respectant les normes IFRS 9.

0.5 Méthodologie de la recherche

Notre travail sera divisé en deux chapitres :

- **Chapitre 1** : Nous allons passer en revue les exigences de la norme dans le calcul des ECL et ensuite faire une revue des différents modèles dans la littérature pour faire le choix de ceux que nous allons appliquer.
- **Chapitre 2** : Ce chapitre concerne la mise en œuvre des modèles choisis et l'intégration des exigences de la norme.

Chapitre 1

Cadre conceptuel et théorique

1.1 Présentation de la norme IFRS 9 et introduction aux Expected credit Loss (ECL)

1.1.1 Introduction à la norme IFRS 9

1.1.1.1 Historique et contexte

La norme IFRS 9 [11] a été créée par le Conseil des normes comptables internationales (IASB, International Accounting Standards Board) après la crise financière de 2008. Cette crise a montré les limites des pratiques comptables de l'époque régies par l'ancienne norme IAS 39. Cette dernière, entrée en application en 2001, a alors été fortement critiquée pour plusieurs raisons et surtout pour la gestion des pertes de crédit. La norme IAS 39, obligeait les institutions à enregistrer les pertes de crédit seulement après un défaut. Ce système retardait souvent la comptabilisation des pertes, ce qui a contribué à l'aggravation de la crise.

Pour y remédier, l'IASB a mis en place l'IFRS 9, basée sur un modèle de pertes de crédit attendues (ECL). Ce modèle permet de reconnaître les pertes dès qu'elles sont prévues, améliorant ainsi la transparence et la gestion des risques. L'IFRS 9 représente donc une approche plus prudente et proactive dans la comptabilité des instruments financiers.

1.1.1.2 Principaux objectifs et application de l'IFRS 9

L'IFRS 9 a été introduite avec plusieurs objectifs pour corriger les faiblesses des anciennes normes et améliorer la transparence financière et la gestion des risques de crédit.

Voici ses principaux objectifs :

- **Reconnaissance anticipée des pertes de crédit** : L'IFRS 9 remplace le modèle de pertes encourues par celui des pertes de crédit attendues (ECL).
- **Amélioration de la transparence financière** : Elle exige plus de détails sur les actifs financiers et les méthodes de calcul des ECL.
- **Simplification de la classification des actifs** : L'IFRS 9 propose une classification plus simple des actifs financiers, basée sur leurs caractéristiques économiques, rendant les états financiers plus clairs et faciles à interpréter.
- **Renforcement de la gestion des risques de crédit** : Les entreprises doivent évaluer régulièrement leurs pertes attendues.
- **Réduction des incohérences comptables** : En uniformisant les règles de classification et les critères d'évaluation des pertes, l'IFRS 9 améliore la comparabilité des états financiers entre entreprises et pays.

Ces objectifs font de l'IFRS 9 un outil essentiel pour la stabilité financière, en particulier dans les secteurs bancaires et financiers. La norme s'applique à toutes les entités et à tous types d'instrument financiers. Toutefois il existe des exceptions non concernées par la norme. Nous notons aussi la publication **BCBS 350** émise par le **Basel Committee on Banking Supervisor** qui montre le soutien du régulateur bancaire à la norme IFRS 9.

1.1.2 Les piliers de l'IFRS 9

L'IFRS 9 repose sur trois piliers principaux :

- Classement et évaluation
- Dépréciation
- Comptabilité de couverture

Ils sont essentiels pour comprendre l'approche adoptée par la norme, et son impact sur la gestion des risque financiers. Nous allons brièvement les présenter.

1.1.2.1 Classification et mesures des actifs financiers

La norme IFRS 9 prévoit trois catégories comptables pour les instruments financiers :

- **FVPL** (Juste valeur par résultat),
- **FVOCI** (Juste valeur par le biais d'autres éléments du résultat global),

1.1. PRÉSENTATION DE LA NORME IFRS 9 ET INTRODUCTION AUX EXPECTED CREDIT LOSS (ECL)

- CA (Coût amorti).

Catégorie d'actifs financiers	Description
Amortissement du coût	• Modèle d'affaires : L'actif est détenu dans le but de collecter les flux de trésorerie contractuels. • Flux de trésorerie contractuels : Doivent représenter uniquement des paiements d'intérêts et de principal (SPPI). • Évaluation : À la fin de chaque période de reporting, les actifs sont évalués au coût amorti. • Reconnaissance des gains/pertes : Reconnaissance dans le résultat net.
Juste valeur par autres éléments du résultat global (FVOCI)	• Modèle d'affaires : L'actif est détenu à la fois pour collecter les flux de trésorerie et pour vendre l'actif. • Flux de trésorerie contractuels : Doivent représenter uniquement des paiements d'intérêts et de principal (SPPI). • Évaluation : L'actif est évalué à sa juste valeur. • Reconnaissance des gains/pertes : Reconnaissance dans les autres éléments du résultat global (OCI), avec reclassement dans le résultat net à la vente.
Juste valeur par le résultat (FVTPL)	• Modèle d'affaires : L'actif ne répond pas aux critères du coût amorti ou du FVOCI. Souvent utilisé pour des instruments détenus à des fins de gestion active (ex. : instruments dérivés). • Flux de trésorerie contractuels : Pas nécessairement SPPI. • Évaluation : L'actif est évalué à sa juste valeur. • Reconnaissance des gains/pertes : Reconnaissance directement dans le résultat net.

TABLE 1.1 – Classification et évaluation des actifs financiers selon IFRS 9

L'affectation des instruments à l'une de ces catégories dépend du modèle économique adopté par l'entité pour gérer l'instrument, ainsi que des caractéristiques des flux de trésorerie contractuels attendus. Ce dernier point est appelé le test SPPI (Solely Payments of Principal and Interests), qui vérifie si les flux concernent uniquement le remboursement du principal et des intérêts.

1.1.2.2 Dépréciation

La norme IFRS 9 introduit un modèle de dépréciation basé sur les pertes de crédit attendues (ECL) qui s'applique principalement aux instruments financiers évalués au coût amorti (CA) ou en juste valeur par les autres éléments du résultat global (FVOCI). Ce modèle de dépréciation est structuré en deux étapes principales : le **staging** et le **calcul des pertes de crédit attendues**.

1.1.2.2.1 Le Staging

Le staging consiste à classer les instruments financiers en trois catégories ou **buckets**, basées sur l'évolution du risque de crédit depuis la comptabilisation initiale :

Bucket	Définition	Dépréciation
Bucket 1 : Créances saines	Instruments financiers dont le risque de crédit est faible à la date de clôture.	La dépréciation est évaluée en fonction des pertes de crédit attendues sur les 12 mois suivants la date de clôture.
Bucket 2 : Créances en détérioration significative	Instruments financiers dont le risque de crédit a augmenté de manière significative depuis leur comptabilisation initiale.	Les pertes de crédit attendues sont évaluées sur toute la durée de vie résiduelle des créances.
Bucket 3 : Créances en défaut	Instruments financiers pour lesquels des preuves objectives de défaillance existent à la date de clôture.	La dépréciation est évaluée en fonction des pertes de crédit attendues sur la totalité de la durée de vie des créances.

TABLE 1.2 – Classification des créances selon leur statut de risque de crédit

À chaque date de clôture, l'entité doit vérifier si le risque de crédit d'un instrument financier a augmenté de manière significative depuis sa comptabilisation initiale. Cela permet de classer l'instrument dans l'un des trois buckets. L'évaluation des pertes de crédit attendues se fait sur une base individuelle ou collective, en utilisant des données historiques sur les retards de paiement, les informations actuelles et les prévisions futures. La norme ne fournit pas de règles précises pour identifier une dégradation significative du risque de crédit d'un instrument financier. Cependant, elle liste plusieurs facteurs à considérer pour cette évaluation, et on peut distinguer plusieurs approches selon les portes feuilles et les situations. [13]

- **Risque de crédit faible : art. 5.5.10** « L'entité peut supposer que le risque de crédit associé à l'instrument financier n'a pas augmenté de façon significative depuis la comptabilisation initiale si elle détermine que ce risque est faible à la date de clôture »
- **Créances en souffrance depuis plus de 30 jours : art. 5.5.11** « Quelle que soit la façon dont une entité apprécie les augmentations importantes du risque de crédit, il

existe une présomption réfutable que le risque de crédit associé à un actif financier a augmenté de façon importante depuis la comptabilisation initiale lorsque les paiements contractuels sont en souffrance depuis plus de 30 jours. L'entité peut réfuter cette présomption si elle dispose, sans devoir engager des coûts ou d'efforts excessifs, d'informations raisonnables et justifiables qui démontrent que, même si les paiements contractuels sont en souffrance depuis plus de 30 jours, le risque de crédit n'a pas augmenté de façon importante depuis la comptabilisation initiale »

- **Autres facteurs** « S'il est possible d'obtenir des informations prospectives raisonnables et justifiables sans devoir engager de coûts ou d'efforts excessifs, l'entité ne peut pas s'appuyer exclusivement sur les informations sur les comptes en souffrance lorsqu'elle détermine si le risque de crédit a augmenté de façon importante depuis la comptabilisation initiale »

Mesure de dépréciation

« L'appréciation visant à déterminer s'il faudrait comptabiliser les pertes de crédit attendues pour la durée de vie se fonde sur les augmentations importantes de la probabilité ou du risque de défaillance depuis la comptabilisation initiale (peu importe si le prix de l'instrument financier a été refixé pour refléter une augmentation du risque de crédit) plutôt que sur des indications de dépréciation de l'actif financier à la Date de Clôture ou sur une défaillance avérée. En général, une augmentation importante du risque de crédit précédera la dépréciation d'un actif financier ou une défaillance avérée » Art. B5.5.7. Selon cet article, il est essentiel d'obtenir la note de crédit et la probabilité de défaut (PD) à la date de comptabilisation initiale pour évaluer une dégradation significative du risque de crédit. La mesure se fait soit par la PD soit par la note ou le grade.

- **Mesure de risque basée sur la PD à maturité** : Pour évaluer la dégradation significative du risque de crédit, on compare la PD à maturité entre la date d'origine et la date de reporting. Il s'agit alors ici de se fixer un seuil (absolu ou relatif) qui détermine si l'instrument sera déclassé en Bucket 2.

Exemple de règle : Si la PD à la date du reporting a augmenté de 7% par rapport à la PD à la date de comptabilisation, alors l'instrument est déclassé en Bucket 2.

- **Mesure de risque basée sur la note (Grade)** : La mesure du risque peut s'appuyer sur le grade ou la note de crédit, qui est équivalente à celle basée sur la PD. En effet, il existe une correspondance entre la note et la PD. Cependant, le

seuil de dégradation significative n'est pas exprimé en pourcentage, mais plutôt en termes de changement de note. On parle de perte de notch¹

1.1.2.2.2 Le Calcul des Pertes de Crédit Attendu (ECL)

Le calcul des ECL dépend du classement des instruments financiers :

- **Bucket 1** : Les ECL sont estimées pour les pertes attendues sur une période de 12 mois.
- **Bucket 2 et Bucket 3** : Les ECL sont estimées pour les pertes attendues sur la durée de vie résiduelle des instruments financiers.

Cette approche permet d'assurer que les provisions pour pertes de crédit reflètent les risques actuels et futurs, offrant ainsi une vision plus précise de la santé financière des actifs financiers et une meilleure gestion des risques de crédit. Le texte prévoit que : « L'entité évalue les pertes de crédit attendues sur un instrument financier d'une façon qui reflète :

- a) Un montant objectif et fondé sur des pondérations probabilistes, qui est déterminé par l'évaluation d'un éventail de résultats possibles ;
- b) La valeur temps de l'argent
- c) Les informations raisonnables et justifiables sur les événements passés, la conjoncture actuelle et les prévisions de la conjoncture économique future, qu'il est possible, à la date de clôture, d'obtenir sans devoir engager des coûts ou des efforts excessifs »

art 5.5.1 Une étude [19] met en lumière le point sur lequel le concept de dégradation significative du risque de crédit conduirait à une hausse non négligeable du niveau de provisionnement au titre du risque de crédit des instruments financiers.

Les pertes de crédit attendues sont évaluées en prenant en compte divers paramètres de risque, qui incluent à la fois des événements historiques et des prévisions futures. Cette prise en compte des anticipations futures est appelée « forward-looking »² tandis que la prise en compte des conjectures actuelles est dite « Point In Time » (PiT)³. Les paramètres de risque modélisés sont :

- **L'EAD (Exposure at Default)** : représente l'exposition au moment du défaut. Il s'agit dans le cas d'une obligation de la somme des cash-flow attendus actualisés au taux de

1. Le terme "notch" fait référence à un échelon dans l'échelle de notation

2. L'approche pour intégrer le forward-looking consiste généralement à déterminer une fonction de lien entre les paramètres de risque et l'environnement économique. Ainsi selon les hypothèses faites sur l'évolution de la conjoncture future, l'impact sur les paramètres de risque peut être déterminé

3. PiT : se réfère à une approche d'évaluation qui se concentre sur les conditions économiques et financières actuelles au moment de l'évaluation.

l'obligation.

- **La PD (Probability of default)** : mesure la distance au défaut pour une créance donnée. Elle est déterminée, selon le bucket, sur un horizon de 12 mois ou à maturité. Elle est déterminée en observant les événements passés.
- **La LGD (Loss Given Default)** : est la perte en cas de défaut. Elle mesure la proportion de l'exposition au moment du défaut qui sera perdue à l'issue de la période de défaut. Elle est déterminée en observant les événements passés.

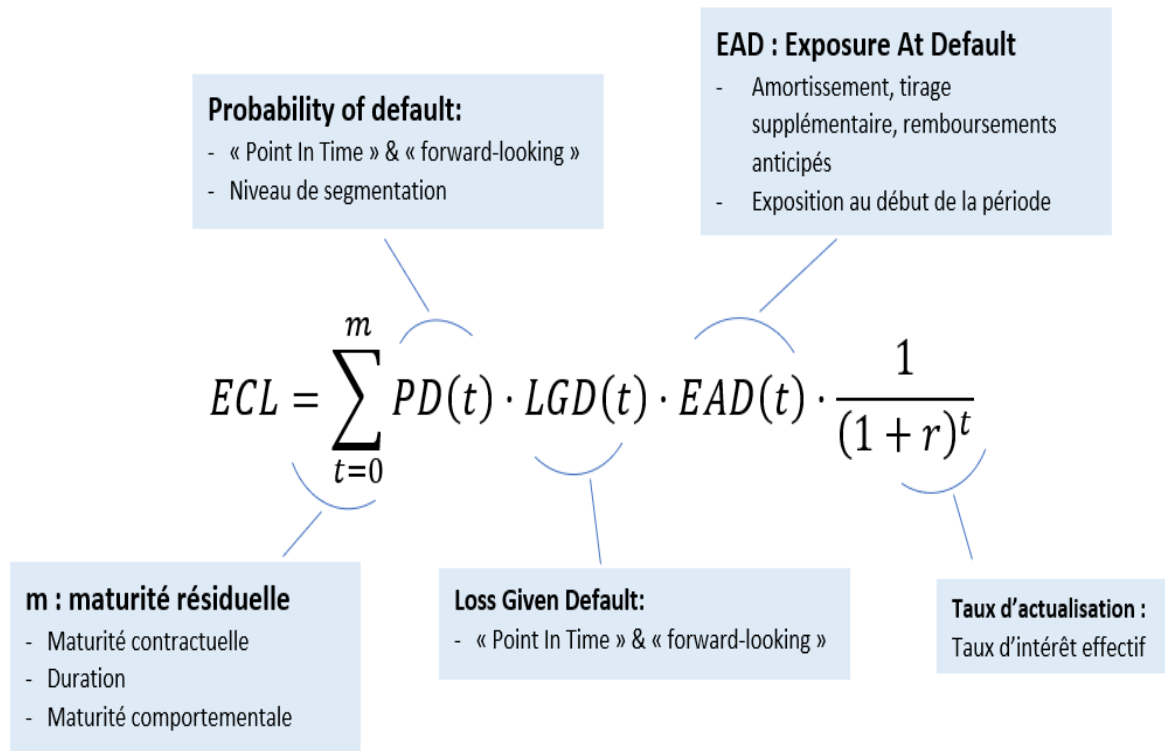


FIGURE 1.1 – Diagramme de calcul des ECL

Conclusion

En résumé, la norme IFRS 9 introduit un cadre plus rigoureux pour l'évaluation des pertes de crédit attendues (ECL) et la dépréciation des instruments financiers, reposant sur l'évolution du risque de crédit. La Probabilité de Défaut (PD) joue un rôle central dans ce cadre, à travers deux aspects principaux :

Calcul des ECL : La PD est utilisée pour estimer les pertes attendues sur une période de 12 mois (Bucket 1) ou sur toute la durée de vie de l'instrument financier (Buckets 2 et 3). L'évaluation de la PD permet ainsi de chiffrer de manière prospective les pertes probables liées au crédit.

Règle de dépréciation (Staging) : La dégradation significative du risque de crédit est déterminée en comparant la PD à la date de reporting avec celle à la date d'origine. Une augmentation importante de la PD entraîne le reclassement des instruments financiers dans des buckets plus risqués, impliquant une comptabilisation plus élevée des pertes attendues.

L'intégration de la PD dans ces processus permet une meilleure anticipation des risques de crédit et une adaptation rapide aux conditions de marché, renforçant ainsi la résilience financière des institutions.

Cette approche conduit naturellement à la prochaine section, où nous explorerons les modèles de risque de défaut. Ceux-ci jouent un rôle crucial dans l'estimation de la PD, qui est au cœur de la méthodologie IFRS 9.

1.2 Modèle de risque de défaut

1.2.1 Les modèles structurels

Le cadre conceptuel des modèles structurels de risque de crédit trouve son origine dans le travail pionnier de Robert C. Merton en 1974 [17]. Dans son article fondateur, Merton a établi un modèle qui considère le défaut d'une entreprise comme un événement déclenché lorsque la valeur de ses actifs chute en dessous d'un seuil critique, généralement le niveau de ses obligations financières (dette). Cette approche, communément appelée modèle « à la Merton », a jeté les bases de nombreuses avancées dans la modélisation du risque de crédit.

Les modèles de Merton sont particulièrement prisés pour leur capacité à fournir une analyse détaillée des relations entre les différents éléments financiers d'une entreprise, tels

que la volatilité de l'actif et la structure de la dette. Ces modèles sont largement utilisés pour la valorisation de la dette risquée, la modélisation des spreads de crédit, l'évaluation de la qualité des signatures, et l'établissement de liens entre le risque sur les actions et le risque de crédit.

Après avoir présenté le modèle de base de Merton, nous décrirons comment celui-ci peut être mis en œuvre en suivant les travaux de Hull et al. Leur contribution permet de comprendre les subtilités et les techniques nécessaires pour une application pratique du modèle.

Par la suite, nous étendrons le modèle de Merton vers des variantes dites « dérivées », qui incluent des modèles tels que le modèle KMV de Moody's et le modèle CreditMetrics de JP Morgan. Ces modèles dérivés ont affiné et enrichi l'approche originale de Merton en intégrant des aspects supplémentaires du risque de crédit, tels que l'évaluation dynamique des probabilités de défaut et la mesure de la corrélation des risques entre différentes entités.

Nous nous concentrerons notamment sur le modèle KMV de Moody's, en explorant sa méthodologie et son application dans le contexte des entreprises nigérianes.

Cette introduction aux modèles structurels vise à fournir une base solide pour la compréhension et la mise en œuvre des techniques avancées d'estimation du risque de crédit sous l'IFRS 9.

Notation 1.2.1. Dans la suite de cette partie, nous considérons les notations suivantes :

- V_t : La valeur des actifs, c'est-à-dire la valeur de marché de l'ensemble de ses actifs
- S_t : La valeur de marché des actions
- $B_T^r(t)$: La dette de l'entreprise
- σ_V : La volatilité des rendements historiques des actifs
- σ_S : La volatilité des actions
- r : Le taux d'intérêt sans risque
- W_t : Le mouvement brownien standard
- μ_t : Le taux de rendement historique des actifs de l'entreprise
- $\mathbb{P}_d^*$: Désigne la probabilité de défaut risque neutre
- $\mathbb{P}_d$: Désigne la probabilité de défaut historique

1.2.1.1 Modèle de Merton

Le modèle de Merton, développé par Robert C. Merton en 1974, représente une avancée significative dans la théorie du risque de crédit en introduisant une approche structurelle pour l'évaluation de la probabilité de défaut. Ce modèle, basé sur la théorie de la structure du capital de l'entreprise, est fondé sur l'idée que le défaut survient lorsque la valeur des actifs de l'entreprise devient insuffisante pour couvrir ses obligations financières. Merton reprend les hypothèses du modèle de Black et Scholes (1973), à savoir :

Actif	Source de financement
Actifs (V_t)	Actions (S_t)
	Dettes (D_t)

TABLE 1.3 – Structure financière de la firme dans le modèle de Merton (1974)

- **Un marché parfait.** Toutes les informations sont disponibles pour tous les acteurs, les transactions sont instantanées et sans coûts, pas de taxes et de contraintes sur les emprunts. Cela signifie que les investisseurs peuvent vendre et acheter des actifs librement et que le prix des actifs reflète pleinement toutes les informations disponibles.
- **La possibilité de transiger en temps continu.** Cela signifie que les marchés sont toujours ouverts et qu'il n'y a pas de limitations de liquidité ou de temps. Cette hypothèse permet l'utilisation des processus stochastique continus.
- Il existe un **taux d'intérêt sans risque constant**.
- La valeur de la firme est supposée ne pas dépendre de la structure de son capital, de sorte qu'une variation du ratio d'endettement ou du taux de coupon n'affecte pas sa valeur.
- La valeur de marché de l'actif de l'entreprise, V_t , est décrite par un mouvement brownien géométrique standard

$$dV_t = \mu_t V_t dt + \sigma_V V_t dW_t; \quad V_0 > 0 \quad (1.1)$$

- La structure du capital de la firme se décompose en fonds propre et en une dette homogène de zéro coupon tel que

$$V_t = B_T^r(t) + S_t \quad (1.2)$$

- La firme ne peut émettre de dette de rang supérieur à celui du zéro-coupon durant la

vie de celui-ci et que le défaut ne peut survenir qu'à échéance

À l'échéance de la dette, deux scénarios sont envisageables en fonction de la valeur des actifs de l'entreprise : soit celle-ci est suffisante pour rembourser les créanciers, soit elle ne l'est pas. Si la valeur des actifs de l'entreprise est insuffisante pour honorer la dette, les actionnaires peuvent faire jouer leur responsabilité limitée en optant pour un défaut. Dans ce cas, les créanciers ne peuvent prétendre qu'à la valeur résiduelle des actifs de l'entreprise. De plus, si on désigne par D la valeur nominale de la dette et par T son échéance, nous avons :

$$B_T^r(t) = \min(D, V_a(T))$$

$$S_t = \max(0, V_t - D)$$

Proposition 1.2.1. *Le lemme d'Itô .1.1 nous permet d'avoir la forme suivante pour la solution de (1.1) :*

$$V_t = V_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)t + \sigma_V W_t} \quad (1.3)$$

Démonstration 1.2.1. *Posons $F_t = \ln(V_t, t)$, d'après le lemme d'Itô, on a que :*

$$dF(V_t, t) = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial V} dV_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} d[V]_t$$

Or,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial V} = \frac{1}{V_t} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} = -\frac{1}{V_t^2} \\ d[V]_t = \sigma_V^2 V_t^2 dt \end{cases}$$

En remplaçant dV_t par sa valeur en 1.1, on obtient :

$$dF(V_t, t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2 \right) dt + \sigma_V dW_t$$

D'où

$$V_t = V_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2 \right) dt + \sigma_V dW_t \right)$$

Proposition 1.2.2. *Les actions et les dettes peuvent être évaluées à l'aide d'un modèle de valorisation d'options standard (approche dont Black Scholes et Merton sont les pères). En date $0 \leq t \leq T$ la valeur S_t des actions et celle des dettes, $B_T(t)$, sont données par la formule standard de Black et Scholes :*

$$S_t = V_t \mathcal{N}(d_1) - De^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2) \quad (1.4)$$

$$B_T(t) = V_t - S_t = V_t[1 - \mathcal{N}(d_1)] + De^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2) \quad (1.5)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(r + \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T-t}$$

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

1.2.1.1.1 Temps de défaut et Calcul de la probabilité de défaut

Dans le modèle de Merton le temps de défaut est donné par :

$$\tau = T \times 1_{\{V_T < D\}} + \infty \times 1_{\{V_T \geq D\}}$$

C'est-à-dire que l'entreprise fait défaut en T si la valeur de ses actifs à cette date, V_T , est inférieure à la valeur nominale de sa dette, D . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} P_d^* &= \mathbb{P}[\tau \leq T] \\ &= \mathbb{P}[T \times 1_{\{V_T < D\}} + \infty \times 1_{\{V_T \geq D\}} \leq T] \\ &= \mathbb{P}[V_T < D] \\ &= \mathbb{P}\left[V_t \exp\left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}(T-t) + \sigma_V \sqrt{T-t} \cdot Z_{0,1}\right) < D\right] \\ &= \mathbb{P}\left[Z_{0,1} < \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}\right] \\ &= \mathbb{P}[Z_{0,1} < -d_2] \\ &= \mathcal{N}(-d_2) \end{aligned}$$

$$P_d^* = \mathcal{N}(-d_2) \quad (1.6)$$

1.2.1.1.2 Limite du modèle de Merton

Le modèle de Merton, bien qu'influent et largement utilisé dans l'évaluation des probabilités de défaut, présente certaines limitations qui restreignent son application pratique. Ces limites sont principalement liées aux hypothèses simplificatrices du modèle, qui peuvent ne pas refléter fidèlement la réalité des marchés financiers et des entreprises.

- **Hypothèses de marché parfait** : Le modèle de Merton repose sur l'idée que les marchés financiers sont parfaits, ce qui signifie qu'il n'y a pas de frictions telles que les coûts de transaction, les taxes, ou les restrictions à la vente à découvert. Or, ces conditions sont rarement remplies dans la réalité, ce qui peut affecter la précision des estimations de la probabilité de défaut.
- **Constance de la volatilité des actifs** : Le modèle suppose que la volatilité de la valeur des actifs de l'entreprise est constante dans le temps. En réalité, la volatilité peut varier en fonction des conditions économiques, de l'évolution de l'entreprise, ou d'événements exogènes, rendant cette hypothèse souvent irréaliste.
- **Absence de défaut avant l'échéance** : Une des hypothèses clés du modèle est que le défaut de l'entreprise ne peut survenir qu'à l'échéance de la dette. Cependant, dans la pratique, une entreprise peut faire défaut à tout moment en raison de problèmes de liquidité ou de détérioration rapide de sa situation financière.
- **Absence de structure de capital complexe** Le modèle de Merton ne prend pas en compte les différentes couches de la structure de capital de l'entreprise (comme la dette senior et subordonnée). Cela simplifie la modélisation mais limite la capacité du modèle à refléter la complexité des structures de capital dans la réalité.
- **text**

En réponse aux limitations du modèle de Merton, des modèles dérivés de ce dernier comme KMV (Kealhofer McQuown and Vasicek)[14], CreditMetrics (Gupton et al (1997))s [9] ont été développés pour offrir une approche plus réaliste et applicable à l'estimation des probabilités de défaut et à la gestion du risque de crédit.

1.2.1.2 Modèle KMV

Le modèle KMV est un des modèles dit dérivé du modèle de Merton. Il a été développé par Moody's Analytics en 2002. Ce modèle tente donc de surmonter certaines lacunes du modèle de Merton. Il se distingue par son approche pragmatique et son application directe aux données de marché. Il évalue la probabilité qu'une entreprise fasse défaut en mesurant la distance qui sépare la valeur de ses actifs du point critique où ses dettes ne peuvent plus être honorées. Le modèle KMV repose sur trois concepts clés :

- **Default Point (DP) :** Le niveau critique où les dettes de l'entreprise dépassent la valeur des actifs, entraînant ainsi un défaut de paiement. Cette composante prend en compte la structure du capital contrairement au modèle de Merton, ainsi elle se calcul en considérant les dettes à court et à long terme de l'entreprise.
- **Distance to Default(DD) :** Une mesure normalisée qui indique à quel point la valeur des actifs de l'entreprise est éloignée du point de défaut
- **Expected Default Frequency (EDF) :** La probabilité qu'une entreprise fasse défaut sur une période donnée. Moody's KMV utilise une fonction décroissante à l'aide de données (une fonction de répartition empirique) F_{KMV} pour estimer la fréquence de défaut espérée à partir de la DD ; on a donc :

$$EDF = F_{KMV}(DD)$$

1.2.1.2.1 Avantages du modèle KMV

- Le modèle KMV permet des défauts avant l'échéance
- **Validation empirique :** Ce modèle a été largement validé par des études empiriques et est utilisé par de nombreuses institutions financières à travers le monde. Sa robustesse et sa fiabilité en font un outil standard dans l'industrie du risque de crédit.
- **Adaptabilité aux Chocs de Marché :** Grâce à sa dépendance aux données de marché, le modèle KMV est capable de s'adapter rapidement aux chocs économiques ou financiers, fournissant ainsi des estimations qui tiennent compte des conditions de marché en évolution.

1.2.1.3 Credit Metrics

Nous nous tournons brièvement maintenant vers le modèle CreditMetrics, développé par JP Morgan. CreditMetrics est un modèle statistique conçu pour mesurer et gérer le risque de crédit d'un portefeuille d'actifs, en se concentrant particulièrement sur les risques de migration de crédit, c'est-à-dire les changements de notation de crédit des emprunteurs.

Contrairement aux modèles structurels comme Merton et KMV, qui s'appuient sur la dynamique des actifs sous-jacents pour estimer les probabilités de défaut, le modèle CreditMetrics utilise les notations de crédit et leurs probabilités de transition pour évaluer l'impact potentiel des migrations de crédit sur la valeur d'un portefeuille. [3] Il permet ainsi aux institutions financières de mieux comprendre et quantifier les risques liés aux variations de la qualité de crédit des actifs qu'elles détiennent. Ce modèle permet donc à la fois le calcul de la probabilité de défaut et de la probabilité de la détérioration du crédit qui se trouve être la deuxième composante des ECL.

1.2.2 Les modèles réduits

Nous nous tournons désormais vers la présentation des modèles réduits, également appelés modèles à intensité de défaut, pour l'estimation des probabilités de défaut. Contrairement aux modèles structurels, qui se basent sur la dynamique des actifs sous-jacents pour évaluer les probabilités de défaut, les modèles réduits abordent le risque de crédit d'une manière plus directe et probabiliste, en traitant le défaut comme un événement exogène, souvent modélisé par un processus de Poisson.

Les modèles réduits se concentrent principalement sur la probabilité instantanée de défaut, souvent appelée intensité de défaut, qui peut varier dans le temps en fonction des conditions du marché ou des caractéristiques spécifiques de l'entreprise. Ces modèles sont particulièrement utiles pour estimer les probabilités de défaut à court terme et pour évaluer le risque de crédit à travers les prix de marché, comme les spreads obligataires.

Cette section vise à introduire et à détailler les principaux types de modèles réduits utilisés pour l'estimation du risque de crédit, en soulignant leur structure, leurs avantages, et leurs applications pratiques

1.2.2.1 Définition et cadre conceptuel des modèles réduits

Comme dit plus haut, les modèles réduits, ou modèles à intensité de défaut, constituent une approche alternative pour modéliser le risque de crédit. Contrairement aux modèles structurels, qui basent l'occurrence du défaut sur la dynamique des actifs de l'entreprise (comme dans le modèle de Merton), les modèles réduits traitent le défaut comme un événement exogène, dont le moment d'occurrence est modélisé de manière probabiliste, indépendamment de la valeur des actifs.

Dans un modèle structurel, le défaut survient lorsque la valeur des actifs de l'entreprise chute en dessous d'un certain seuil, généralement lié à la valeur de ses dettes. En revanche, dans un modèle réduit, le défaut est représenté par un processus stochastique où le temps de défaut τ est un temps d'arrêt associé à une intensité de défaut $\lambda(t)$. Cette intensité est une fonction qui décrit la probabilité conditionnelle instantanée de défaut.

1.2.2.1.1 Présentation de l'approche probabiliste et du concept d'intensité de défaut

Considérons un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)$ où $\mathbb{P}^*$ représente une probabilité neutre au risque. Cette probabilité est choisie de telle manière que les prix des actifs financiers, lorsqu'ils sont actualisés, se comportent comme des martingales. Cela signifie que sous l'hypothèse de $\mathbb{P}^*$, il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage, ce qui garantit que $\mathbb{P}^*$ existe mais n'est pas nécessairement unique. Généralement, dans les modèles de marchés complets, on suppose aussi que $\mathbb{P}^*$ est unique, ce qui assure un seul prix pour les actifs.

Cependant, cette hypothèse de marché complet est forte et peut être contestée, notamment parce qu'elle suppose que chaque actif peut être reproduit à l'identique par d'autres actifs à travers des stratégies sans risque. Par exemple, il serait difficile de répliquer un actif qui pourrait faire défaut à n'importe quel moment, car les incertitudes liées au recouvrement de l'actif après un défaut ne sont pas couvertes par cette stratégie.

Pour avancer, on introduit une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, qui est un ensemble d'informations disponibles à chaque instant t , générée par les prix des actifs financiers. Le moment où un défaut se produit est modélisé par une variable aléatoire positive τ , définie sur $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}^*)$, où $\mathcal{G}$ est une filtration plus riche contenant toute l'information jusqu'au temps t . Le processus associé au défaut, noté $H_t = \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$, prend la valeur 1 si le défaut s'est produit à ou avant le temps t , et 0 sinon.

Pour rendre le processus de défaut mesurable, on enrichit la filtration initiale $\mathbb{F}$ avec la filtration $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \geq 0}$, où $\mathcal{H}_t$ est l'information générée par H_u pour $u \leq t$. La filtration

élargie $\mathcal{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$ contient donc toute l'information sur les prix des actifs et le processus de défaut jusqu'au temps t . C'est comme si nous ajoutions un indicateur dans notre modèle qui déclencherait une alarme dès que le défaut se produit, ce qui nous permet de prendre en compte toutes les informations relatives au défaut à tout instant.

Notons maintenant que le processus H_t est une sous-martingale par rapport à la filtration $\mathbb{G}$. Pour démontrer cela, il suffit de remarquer que pour $t \leq s$, l'indicateur $\mathbf{1}_{\{\tau \leq s\}}$ peut être décomposé en deux parties : l'indicateur $\mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$ qui correspond à l'information jusqu'à t , et l'indicateur $\mathbf{1}_{\{t < \tau \leq s\}}$ qui est positif ou nul.

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{G}_t$, on obtient :

$$\mathbb{E}[H_s | \mathcal{G}_t] = H_t + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{t < \tau \leq s\}} | \mathcal{G}_t] \geq H_t$$

Cela démontre que H_t est bien une sous-martingale. La propriété de sous-martingale permet d'appliquer la décomposition de Doob-Meyer, selon laquelle tout processus de défaut H_t peut être décomposé en une martingale M_t et un processus croissant A_t qui est prévisible. Cette idée mène à l'hypothèse qu'il existe un taux d'intensité de défaut λ_t , un processus positif et adapté à $\mathbb{F}$, tel que le processus M_t défini par :

$$M_t = H_t - \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau > u\}} \lambda(u) du \quad (1.7)$$

soit une martingale par rapport à la filtration $\mathbb{G}$.

Si l'existence de λ_t est généralement fondée sur des hypothèses techniques précises (comme détaillé par Jeanblanc et Rutowski en 1999 dans [12]), on peut constater que, dans le cas d'un processus de Poisson avec un paramètre constant λ , ce paramètre représente précisément l'intensité de défaut que nous avons définie de manière générale.

Une implication directe de ce modèle est que la probabilité de défaut entre t et $t + dt$, en l'absence de défaut à t , est approximativement $\lambda(t) \cdot dt$. Ce qui peut s'écrire :

$$\mathbb{P}[t < \tau \leq t + dt | \mathcal{G}_t] = \lambda_t dt \quad (1.8)$$

Nous avons mis en évidence l'importance du concept d'intensité de défaut $\lambda(t)$. Cette intensité, qui décrit la probabilité conditionnelle instantanée de défaut, est au cœur de la modélisation du risque de crédit dans cette approche. Toutefois, pour pouvoir appliquer ce cadre théorique à des situations concrètes, il est nécessaire de spécifier la forme exacte du proces-

sus $\lambda(t)$.

Les différents modèles à forme réduite se distinguent par les hypothèses spécifiques qu'ils adoptent sur la dynamique de $\lambda(t)$. En d'autres termes, chaque modèle repose sur une manière particulière de caractériser comment l'intensité de défaut évolue dans le temps et en réponse à diverses variables économiques ou financières. Ces hypothèses influencent directement les caractéristiques du modèle, notamment en ce qui concerne la flexibilité pour s'adapter à différentes conditions de marché et la complexité de la calibration.

1.2.2.1.2 Intensité déterministe

Lorsqu'on considère une intensité de défaut déterministe, cela signifie que $\lambda(t)$ est une fonction prédéterminée du temps, sans dépendance aux aléas du marché ou à d'autres variables stochastiques. Autrement dit, $\lambda(t)$ est entièrement spécifiée à l'avance, et son évolution au fil du temps est connue avec certitude.

L'intérêt d'une intensité de défaut déterministe réside dans sa simplicité et sa facilité de mise en œuvre. Puisque $\lambda(t)$ est connu à tout instant, il est possible de calculer directement les probabilités de survie et de défaut sur un horizon donné. Partant du fait que M_t est une martingale, en passant à l'espérance dans l'équation 1.7 on peut écrire :

$$\begin{aligned} E[M_t] &= E[H_t] - E \left[\int_0^t \lambda(u) 1_{\{u < \tau\}} du \right] \\ &= E[1_{\{\tau \leq t\}}] - \lambda_0 \int_0^t E[1_{\{u < \tau\}}] du \\ &= 1 - q_t - \lambda_0 \int_0^t q(u) du \end{aligned}$$

donc

$$E[M_t] = 1 - q_t - \lambda_0 \int_0^t q(u) du$$

en posant $q_t = P(\tau > t)$, la probabilité de survie de τ . D'autre part, par les propriétés de martingale on aura que :

$$E[M_t] = E[M_0] = E[H_0] = 0 \quad \text{pour } t \geq 0$$

Soit donc,

$$0 = 1 - q_t - \lambda_0 \int_0^t q(u) du$$

En passant aux dérivées avec la condition initiale $q_0 = 1$, l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante est obtenue :

$$\frac{dq_t}{dt} = -\lambda_t q_t, \quad q_0 = 1$$

dont une solution est :

$$q_t = e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$$

Donc, en posant E une variable aléatoire de loi exponentielle standard (c'est-à-dire $P(E > t) = e^{-t}$), il vient que la loi du temps de défaut τ est la même que celle du premier saut d'un processus de Poisson homogène d'intensité λ :

$$\tau \stackrel{L}{=} \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t \lambda(u) du \geq E \right\}$$

Interprétation : Avec l'équation 1.2.2.1.2 on peut écrire la densité de probabilité

$$f(t) = \lambda(t) \exp \left(- \int_0^t \lambda(u) du \right).$$

La densité de probabilité $f(t)$ indique à quel point il est probable que le défaut survienne précisément à l'instant t . Cette probabilité dépend de :

- **L'intensité de défaut $\lambda(t)$:** Une intensité plus élevée signifie une probabilité de défaut plus élevée à l'instant t .
- **La probabilité de survie jusqu'à t :** Donnée par $\exp \left(- \int_0^t \lambda(u) du \right)$, elle diminue avec le temps à mesure que l'accumulation de l'intensité de défaut augmente.

Ainsi, le temps de défaut τ est le moment où l'accumulation de l'intensité de défaut $(\int_0^t \lambda(u) du)$ dépasse un seuil E , indiquant la survenue du défaut. La densité $f(t)$ et la définition de τ sont donc deux façons complémentaires de modéliser le risque de défaut.

1.2.2.1.3 Intensité stochastique

Comme vu plus haut, dans les modèles réduits, l'intensité de défaut $\lambda(t)$ joue un rôle central en tant que taux instantané de survenance du défaut. Alors que dans le cas d'une intensité déterministe, cette intensité est fixe et connue à l'avance, les modèles avec intensité stochastique permettent de capturer une plus grande complexité en laissant $\lambda(t)$ évoluer de manière incertaine au cours du temps. Cette approche est plus réaliste pour représenter les risques de crédit, car elle permet de modéliser les chocs imprévus et les changements d'état des marchés financiers.

Les modèles avec intensité stochastique considèrent $\lambda(t)$ comme un processus stochastique, c'est-à-dire une variable aléatoire qui évolue dans le temps selon certaines dynamiques probabilistes. Cela permet de mieux refléter l'incertitude et la variabilité des conditions économiques ou spécifiques à l'entreprise qui influencent la probabilité de défaut. Ces modèles sont particulièrement adaptés dans des contextes où le risque de défaut peut varier de manière imprévisible en raison d'événements extérieurs, de nouvelles informations de marché, ou de la santé financière fluctuante de l'entreprise.

Modélisation de l'intensité stochastique

L'intensité de défaut $\lambda(t)$ est généralement modélisée comme un processus de diffusion stochastique. Le processus peut être formulé de manière générique comme suit :

$$d\lambda(t) = \mu(t, \lambda(t))dt + \sigma(t, \lambda(t))dW(t)$$

où :

- $\mu(t, \lambda(t))$ est le terme de dérive, qui représente la tendance moyenne de l'évolution de l'intensité.
- $\sigma(t, \lambda(t))$ est le terme de volatilité, qui capture les variations aléatoires de l'intensité.
- $dW(t)$ est un processus de Wiener (ou mouvement brownien), représentant l'incertitude aléatoire.

Les choix spécifiques pour $\mu(t, \lambda(t))$ et $\sigma(t, \lambda(t))$ déterminent la nature du processus stochastique. Par exemple, on peut considérer un modèle où $\lambda(t)$ suit un processus de diffusion simple, ou bien un processus plus complexe tel que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, qui tend à ramener $\lambda(t)$ vers une moyenne à long terme.

Applications et limites des modèles stochastiques

Les intensités stochastiques sont particulièrement utiles pour :

- **Pricing des produits dérivés de crédit** : Les produits tels que les Credit Default Swaps (CDS) sont très sensibles aux fluctuations de l'intensité de défaut. Modéliser $\lambda(t)$ comme un processus stochastique permet de mieux évaluer le risque de crédit sous-jacent.
- **Stress testing** : En utilisant des modèles avec intensité stochastique, les institutions financières peuvent simuler des scénarios de stress où les conditions de marché se détériorent, entraînant une hausse soudaine du risque de défaut.
- **Gestion des risques** : Les modèles à intensité stochastique offrent une représentation

plus nuancée du risque de défaut, ce qui permet une meilleure gestion du risque de portefeuille.

Malgré leur puissance, les modèles à intensité stochastique présentent plusieurs défis :

- **Complexité mathématique et calculatoire** : La modélisation et la calibration des processus stochastiques nécessitent une expertise technique significative et des ressources informatiques pour résoudre les équations différentielles stochastiques.
- **Sensibilité aux paramètres** : La précision des prédictions repose fortement sur l'estimation précise des paramètres κ , θ , et σ , qui peuvent être difficiles à obtenir dans des environnements volatils.
- **Calibration** : L'ajustement des modèles à des données réelles est souvent complexe, en raison de la nature stochastique et des sauts potentiels dans les données d'intensité.

Ces aspects font des modèles à intensité stochastique un outil puissant mais exigeant dans la modélisation du risque de crédit.

Après avoir établi les fondations théoriques des modèles réduits en définissant leur cadre conceptuel probabiliste, il est essentiel de comprendre comment ces modèles se traduisent en applications concrètes dans le domaine financier. Une des applications les plus pertinentes concerne les produits dérivés de crédit. En effet, les modèles réduits jouent un rôle central dans l'évaluation, la gestion, et la tarification de ces instruments financiers complexes. Cette transition vers les produits dérivés de crédit nous permet d'illustrer la mise en pratique des concepts probabilistes que nous avons discutés, en montrant comment l'intensité de défaut modélisée peut influencer la valorisation de produits comme les Credit Default Swaps (CDS) et les obligations à haut rendement.

1.2.2.2 Produits dérivés de crédit

Les produits dérivés de crédit sont des instruments financiers complexes conçus pour transférer le risque de crédit entre différentes parties. Ils permettent aux institutions financières et aux investisseurs de se protéger contre le défaut d'un emprunteur ou d'obtenir une exposition au risque de crédit sans détenir directement les actifs sous-jacents. Ces dérivés jouent un rôle crucial dans la gestion des risques, la liquidité et la diversification des portefeuilles, en particulier dans un contexte où les marchés financiers sont de plus en plus interconnectés.

Les principaux types de produits dérivés de crédit incluent les credit default swaps (CDS),

les collateralized debt obligations (CDO), et les total return swaps (TRS). Chacun de ces instruments offre une manière différente de gérer et de valoriser le risque de crédit en fonction des besoins spécifiques des investisseurs ou des institutions.

1.2.2.2.1 Credit Default Swaps (CDS) :

Le **Credit Default Swap (CDS)** est le produit dérivé principal pour transférer et gérer le risque de crédit. Dans un contrat de CDS, une partie (l'acheteur de protection) paie régulièrement une prime à une autre partie (le vendeur de protection) pour se protéger contre le risque de défaut d'un emprunteur sous-jacent (la référence). Si l'emprunteur fait défaut, le vendeur de protection indemnise l'acheteur en fonction des conditions spécifiées dans le contrat. Le CDS est un outil important pour les investisseurs, car il permet de se protéger contre une éventuelle perte liée au risque de crédit tout en fournissant une méthode indirecte pour évaluer l'intensité du risque de défaut.

Le CDS, en tant que produit de transfert de risque de crédit, fournit des informations précieuses sur l'intensité du risque de défaut d'une entité. Le **spread du CDS**, c'est-à-dire la prime payée par l'acheteur de protection, est directement lié à la perception du marché quant à la probabilité de défaut de l'entité sous-jacente. Plus le spread du CDS est élevé, plus le marché perçoit un risque de défaut élevé pour cette entité. Le spread du CDS peut ainsi être utilisé pour déduire l'intensité de défaut λ , selon l'équation simplifiée suivante dans un modèle à intensité :

$$s = \frac{\lambda(1-R)}{1-\lambda\Delta t}$$

Où :

- s est le spread du CDS,
- λ est l'intensité de défaut,
- R est le taux de recouvrement en cas de défaut,
- Δt est l'intervalle de temps considéré.

En pratique, l'intensité de défaut λ est estimée en ajustant cette relation pour correspondre aux spreads observés sur le marché des CDS. Les investisseurs utilisent cette information pour évaluer la qualité de crédit de l'entité sous-jacente et pour déterminer les probabilités de défaut implicites.

La probabilité cumulative de défaut sur un horizon donné T est donnée par la formule suivante :

$$P(T) = 1 - e^{-\lambda T}$$

Ainsi, l'intensité de défaut λ obtenue à partir des spreads de CDS permet de calculer la probabilité de défaut sur une période définie. Les spreads de CDS offrent une estimation « de marché » des risques de défaut futurs et peuvent être utilisés pour ajuster les modèles de probabilité de défaut en fonction des conditions actuelles du marché.

Dans le cadre de l'IFRS 9, les CDS peuvent jouer un rôle dans la modélisation des PD. Les spreads de CDS, en tant que mesure de marché dynamique du risque de défaut, sont utilisés pour ajuster les estimations des PD dans des scénarios économiques prospectifs. Par conséquent, les CDS aident à capturer l'impact des conditions du marché dans les modèles de risque de crédit, permettant ainsi une évaluation plus précise et réactive des pertes potentielles.

1.2.2.3 Obligation à risque

Le prix ou le rendement ("yield") des obligations d'une entreprise est étroitement lié à sa probabilité de défaut [21]. En effet, lorsque le marché perçoit une augmentation du risque de défaut de l'entreprise, les investisseurs exigent un rendement plus élevé pour compenser ce risque accru. Cela entraîne une baisse du prix des obligations de l'entreprise sur le marché. Inversement, si le marché estime que la probabilité de défaut est faible, le rendement demandé diminue et le prix des obligations augmente. Ainsi, l'analyse des rendements obligataires permet d'inférer la probabilité de défaut d'une entreprise, car un spread de crédit plus élevé reflète un risque de défaut plus important. Nous développons ce point plus bas.

1.2.2.4 Exemple de modèle

1.2.2.4.1 Le modèle de Jarrow et Turnbull (1995)

Dans ce cadre, le défaut survient lors du premier saut d'un processus de Poisson généralisé avec une intensité $\lambda(t)$. Par conséquent, la probabilité de survie à l'instant T est donnée par $q_T = P(\tau > T) = e^{-\int_0^T \lambda(u) du}$, tandis que la probabilité de défaut avant l'instant t est $p_t = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(u) du}$. Cela signifie que l'intensité de défaut est ici de nature déterministe.

Lors d'un défaut, le créancier reçoit une partie du remboursement, appelée le taux de recouvrement RR , qui est déterminé de manière exogène au modèle et représente une fraction du nominal. Nous supposons également que nous évoluons dans un univers Forward-Neutre, ce qui implique que les quantités $\lambda(t)$, q_t , et $1 - q_t$ représentent des probabilités neutres au risque.

Soit R_T l'espérance de la rentabilité Forward-Neutre d'un zéro coupon de maturité T , le spread S_T associé à ce zéro coupon est donné par :

$$\begin{aligned} S_T &= -\frac{1}{T} \log[1 - p_T(1 - RR)] \\ &= -\frac{1}{T} \log[1 - (1 - e^{-\int_0^T \lambda(u) du})(1 - RR)] \\ &= -\frac{1}{T} \log(q_T + p_T RR) \end{aligned}$$

donc

$$S_T = -\frac{1}{T} \log[e^{-\Lambda_T} + (1 - e^{-\Lambda_T})RR]$$

avec $\Lambda_T = \int_0^T \lambda(u) du$ représente le taux de défaut cumulé ou bien l'espérance Forward-Neutre.

1.2.2.4.2 Modélisation de Duffie et Singleton

L'originalité du modèle de Duffie et Singleton réside dans la manière dont ils spécifient le processus de recouvrement. Contrairement au modèle de Jarrow et Turnbull, où le taux de recouvrement est exogène et indépendant du processus de défaut, Duffie et Singleton proposent un taux de recouvrement endogène. Cela signifie que ce taux dépend en partie du processus de prix de l'actif. Ils supposent que la perte en capital lors d'un défaut est une fraction L_t (éventuellement aléatoire) du processus S_t , ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$Z_t = (1 - L_t)S_t$$

En intégrant cette hypothèse dans les calculs, on obtient le résultat suivant :

$$V_t = \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T (r_u + L_u \lambda_u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Ce résultat revient à valoriser l'instrument de crédit de la même manière qu'un zéro-coupon sans risque, mais avec un taux spot ajusté par $(r_u + L_u \lambda_u)$. Le modèle fournit une interprétation claire du spread de crédit en fonction de l'intensité de défaut λ et du processus de recouvrement L . Une caractéristique importante de ce modèle est qu'il montre que dans un cadre basé sur l'intensité, le spread de crédit dépend à la fois de la dynamique de l'intensité λ et de celle du recouvrement Z . Il est donc difficile de séparer ces deux effets en utilisant uniquement le spread de marché. En pratique, ce modèle peut être implémenté en posant un

taux de recouvrement constant $L_t = L$ et en spécifiant un processus markovien (comme un modèle CIR) pour λ .

1.2.3 Modèle de scoring

Les modèles de scoring sont des outils statistiques utilisés pour évaluer la probabilité de défaut des emprunteurs et classer leur risque de crédit. Ils attribuent un score basé sur divers paramètres financiers et comportementaux, ce qui aide les prêteurs à prendre des décisions éclairées sur les risques de crédits. Deux des pionniers dans l'analyse de la probabilité de défaut à partir d'information spécifique aux états financiers sont [4] et [2]. Depuis lors dans le temps on a eu une évolution sur les recherches théoriques, et en particulier empirique sur le sujet. Les grandes lignes sont :

- **Âge primitif (1950-1970) :** Début des méthodes de scoring avec des critères simples et subjectifs.
- **Âge discriminant (1970-1990) :** Introduction de méthodes discriminantes pour classer les emprunteurs en fonction de caractéristiques.
- **Âge de régression (1990-2010) :** Utilisation de modèles de régression (logit, probit) pour prédire la probabilité de défaut de manière statistique.
- **Âge de la machine (2010-présent) :** Application de l'apprentissage automatique pour améliorer la précision des prévisions de défaut avec des données complexes.

1.2.3.1 L'analyse discriminante

L'analyse discriminante est une méthode statistique utilisée pour classer les observations en groupes prédéfinis sur la base de caractéristiques observées. Nous avons :

- **Analyse Discriminante Linéaire (LDA) :** Elle cherche à trouver une combinaison linéaire de variables explicatives qui sépare au mieux les groupes. La fonction de discriminante est :

$$D_i(X) = \mathbf{a}_i^T X + b_i$$

où $\mathbf{a}_i$ et b_i sont les coefficients estimés pour chaque groupe. La classe prédite est celle associée à la valeur maximale de D_i .

- Analyse Discriminante Quadratique (QDA) : Elle permet une séparation plus flexible en introduisant des termes quadratiques dans la fonction de discriminante :

$$D_i(X) = \mathbf{a}_i^T X + b_i X^T \mathbf{C}_i^{-1} X + c_i$$

où $\mathbf{C}_i$ est la matrice de covariance pour le groupe i . QDA est utile lorsque les variances ne sont pas égales entre les groupes.

avantages : LDA et QDA sont efficaces pour classer les observations lorsque les groupes sont bien séparés et que les données suivent une distribution normale.

Limites : LDA suppose que les variances sont égales entre les groupes, ce qui peut ne pas être le cas dans la pratique. QDA, bien que plus flexible, peut nécessiter un plus grand nombre de paramètres et peut être sensible à la taille des échantillons.

1.2.3.2 Les modèles de regression probit et logit

Les modèles de régression Logit et Probit sont utilisés pour prédire la probabilité d'un événement binaire, comme le défaut de crédit, en fonction des caractéristiques de l'emprunteur. Notre objectif est de modéliser la probabilité de Y en spécifiant le modèle suivant :

$$Y = f(\alpha, \beta, X_i) = \alpha + \beta X_i$$

où $i = 1, 2, \dots, n$, f est la fonction de lien, α est un paramètre constant, β est un vecteur de coefficients, et X_i sont les variables indépendantes.

1.2.3.2.1 Fonction de lien des modèles

Le modèle Logit utilise la fonction logistique pour transformer les prédictions linéaires en probabilités tandis que le modèle Probit utilise la fonction de répartition de la loi normale. les formule sont :

$$P(Y = 1 | X) = \frac{1}{1 + \exp(-(\alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i))}$$

$$P(Y = 1 | X) = \Phi \left(\alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i X_i \right)$$

où $P(Y = 1 | X)$ est la probabilité de l'événement d'intérêt, et β_0 et β_1 sont les coefficients estimés ; Φ est la fonction de répartition normale.

Avantages : Les deux modèles sont bien adaptés aux données binaires et permettent

une interprétation des coefficients en termes de probabilité. Le modèle Logit est souvent préféré pour sa simplicité et ses propriétés interprétatives directes. **Limites** : Les résultats peuvent varier légèrement entre les modèles Logit et Probit, en fonction des hypothèses sur la distribution des erreurs. Une gestion prudente de la multicolinéarité et des variables explicatives est nécessaire pour obtenir des résultats fiables.

1.3 Marché nigérian et choix des modèles

L'analyse du marché nigérian révèle des particularités importantes qui influencent le choix des modèles pour l'estimation des probabilités de défaut (PD) des entreprises. Ce marché présente des défis spécifiques en raison de son développement inégal, notamment dans le domaine des instruments financiers dérivés et des données disponibles.

1.3.0.1 Modèle KMV pour les entreprises cotées à la Bourse du Nigéria

Le modèle KMV a été choisi pour estimer les PD des entreprises cotées à la Bourse du Nigéria en raison de sa robustesse et de son adéquation avec les entreprises ayant des données de marché disponibles.

Cependant, en pratique, nous avons rencontré des limitations majeures. En effet, sur les 150 entreprises cotées, nous n'avons pu établir le modèle KMV que pour 70 d'entre elles en raison d'une accession restreinte des données financières nécessaires (Nous ne disposons pas de terminal vers des plateformes comme Bloomberg, Reuters pour de meilleures données).

1.3.0.2 Modèle à intensité pour les obligations émises sur le marché

Pour les entreprises qui émettent des obligations sur le marché nigérian, nous avons opté pour un modèle à intensité de défaut inféré par les bonds. Ce choix s'explique par le fait que le marché des Credit Default Swaps (CDS) est encore peu développé au Nigéria, rendant les données sur les CDS non disponibles ou insuffisantes. Le modèle à intensité, basé sur les prix des obligations, permet d'estimer la probabilité de défaut à partir des spreads de crédit observés, offrant une alternative viable lorsque les instruments dérivés de crédit ne sont pas disponibles.

1.3.0.3 modèle de scoring

Pour la mise en place des modèles de scoring pour estimer les PD des entreprises nigérianes, nous avons rencontré plusieurs difficultés majeures liées aux données. Tout d'abord, il s'est avéré difficile d'obtenir des données de notation fiables pour les entreprises nigérianes (ne disposant pas d'accès vers les agences de notation). Face à ce manque d'informations, nous avons envisagé d'utiliser les résultats du modèle KMV comme variables dépendantes dans des modèles de scoring tels que la régression logit ou probit. Cependant, nous avons été confrontés à des problèmes supplémentaires. En particulier, nous n'avons accès qu'à un nombre limité de résultats du modèle KMV, soit 70 entreprises, ce qui est insuffisant pour une analyse complète. D'autre part nous étions limités quant à l'accession d'une base solide sur les variables financières des entreprises. Cette limitation est en grande partie due à l'absence d'accès à des bases de données financières complètes telles que Bloomberg ou Reuters, qui auraient pu fournir les données nécessaires.

1.3.0.4 Limites et perspectives

Malgré les choix de modèles adaptés à la réalité du marché nigérian, les limitations de données ont affecté notre analyse. Le manque d'accès à des bases de données financières complètes et à jour a restreint notre capacité à appliquer pleinement les méthodes de scoring basées sur les ratios financiers. À l'avenir, il serait bénéfique d'améliorer l'accès aux données et le développement du marché des CDS pourrait affiner les modèles d'estimation de PD et élargir leur applicabilité.

Ainsi, le choix des modèles reflète les contraintes et les opportunités du marché nigérian, en tenant compte des spécificités locales et des limitations des données disponibles

Chapitre 2

Mise en Œuvre des modèles

2.1 Mise en œuvre du modèle KMV pour les entreprises nigériane cotées à la NGX

2.1.1 Présentation du modèle KMV

Le modèle KMV, développé par la société de notation Moody's, représente une évolution majeure dans l'application pratique des modèles structurels de risque de crédit, en particulier ceux inspirés par le modèle de Merton. Conçu pour estimer les probabilités de défaut d'entreprises en se basant sur la valeur de leurs actifs et la volatilité de ces derniers, le modèle KMV est largement utilisé dans l'industrie financière pour évaluer le risque de crédit des entreprises.

À la base du modèle KMV se trouve le concept de Distance to Default (DTD), qui mesure la différence entre la valeur actuelle des actifs de l'entreprise et le seuil critique où le défaut serait déclenché. Plus la DTD est élevée, plus l'entreprise est éloignée du défaut, et donc, moins le risque de défaut est important. Ce concept s'appuie sur les principes du modèle de Merton, mais avec des ajustements significatifs qui permettent une meilleure adaptation aux données réelles et aux besoins des investisseurs.

Une des innovations clés du modèle KMV est l'utilisation de bases de données empiriques pour traduire la DD en une probabilité de défaut observée, connue sous le nom d'Expected Default Frequency (EDF). Cette approche empirique permet de capturer les particularités des différents marchés et secteurs, rendant le modèle plus flexible et pertinent pour une utilisation pratique.

Dans cette section, nous allons explorer les fondements théoriques du modèle KMV, en mettant l'accent sur la manière dont il étend et affine le modèle de Merton. Nous aborderons également les étapes clés de la mise en œuvre du modèle, de l'estimation des valeurs des actifs à la conversion de la DD en probabilités de défaut. Enfin, nous discuterons des avantages et des limitations du modèle KMV dans le contexte de l'évaluation du risque de crédit, notamment pour les entreprises opérant sur le marché nigérian, en tenant compte de leurs spécificités économiques et financières.

2.1.1.1 De Merton à KMV

Comme énoncé plus haut, le modèle KMV est un modèle "dérivé" du modèle de Merton. Les différences se font sur les points suivant :

- Le EDF dans le modèle KMV est très similaire à la PD du modèle de Merton, mais $\mathcal{N}(\cdot)$ est remplacé par une fonction décroissante qui est empiriquement estimée
- La dette D est remplacée par le DP qui traduit mieux la structure de la dette de l'entreprise
- Le calcul d'une phase intermédiaire appelée distance au défaut qui est très similaire à la valeur d_2 dans le modèle de Merton.

2.1.1.2 Composantes du modèle

Le modèle KMV de Moody's repose sur trois composantes clés qui sont essentielles pour l'estimation du risque de défaut d'une entreprise : le Default Point (DP), la Distance to Default (DD), et l'Expected Default Frequency (EDF). Ces éléments permettent de quantifier le risque de crédit en se basant sur la valeur des actifs de l'entreprise et sa structure de capital.

2.1.1.2.1 Default point (DP)

Le Default Point représente le seuil critique au-delà duquel une entreprise est considérée en défaut. Il est généralement défini comme une fonction de la dette à court terme (STD) de l'entreprise et d'une partie de sa dette à long terme (LTD). En d'autres termes, c'est le niveau des obligations financières que l'entreprise doit honorer pour éviter le défaut. Le Default Point est crucial car il sert de référence pour évaluer la santé financière de l'entreprise par rapport à ses actifs. La logique derrière ce calcul est que, en période de stress financier, une entreprise doit au moins couvrir ses dettes à court terme pour éviter le défaut. Pour notre

modèle il s'exprime comme suit :

$$DP = STD + \frac{1}{2}LTD \quad (2.1)$$

Dans le modèle KMV, le défaut est considéré comme pouvant survenir à tout moment si la valeur des actifs chute en dessous du Default Point. Cela permet d'obtenir une estimation plus dynamique et réaliste du risque de crédit, adaptée aux conditions changeantes du marché.

En surveillant la distance to default (DD), le modèle peut estimer une probabilité de défaut continue, appelée Expected Default Frequency (EDF), qui reflète le risque de défaut non seulement à l'échéance, mais également à n'importe quel moment avant celle-ci.

2.1.1.2.2 Distance to default (DD)

La Distance to Default (DD) est un concept central dans le modèle KMV, qui mesure la proximité d'une entreprise par rapport à un état de défaut potentiel. Elle quantifie l'écart entre la valeur actuelle des actifs de l'entreprise et le Default Point, en tenant compte de la volatilité des actifs. Le modèle KMV viole l'hypothèse de Merton selon laquelle les actifs de l'entreprise sont négociables, et il en est conscient. Le modèle KMV s'inspire des structures de Black-Scholes et de Merton pour calculer cette phase intermédiaire appelée la Distance au défaut (DD), puis il calcule la probabilité de défaut. Dans un premier temps, la distance au défaut doit être calculée, puis la probabilité de défaut d'une entreprise spécifique peut être développée et estimée à partir des résultats des valeurs des actifs de l'entreprise et de la volatilité de l'entreprise (Black & Scholes, 1973 [5]). La probabilité que l'entreprise fasse défaut est plus faible lorsque la distance au défaut calculée est plus élevée (Klieštík, 2009 dans [16]). Ainsi, le calcul de la distance au défaut sous la mesure de probabilité réelle :

$$DD = \frac{E(V_t) - DP}{\sigma_V} = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}} \quad (2.2)$$

2.1.1.2.3 Fréquence de défaut attendu (EDF)

La fréquence de défaut attendue (Expected Default Frequency, EDF) est une mesure qui évalue la probabilité qu'une entreprise fasse défaut sur une période donnée. C'est un concept central dans le modèle KMV, qui transforme la Distance to Default (DD) en une probabilité de défaut observable. Pour ce faire KMV procède relie les EDF empiriques à la DD à partir d'une fonction empirique dérivant d'une importante base de données. On notera

cette fonction empirique F_{KMV} et on aura alors :

$$\begin{aligned} EDF_{KMV} &= \mathbb{P}_d(V_t \leq DD) \\ &= F_{emp}(DD) \\ &= F_{emp}\left(\frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

Pour prédire l'EDF d'une entreprise, il est nécessaire d'estimer au préalable les paramètres clés du modèle, représentés par le triplet (V_t, σ_V, μ) (le DP pouvant être évalué à partir de la structure de dette de l'entreprise). Malheureusement, ces paramètres ne sont pas directement observables sur le marché. La section suivante décrit certaines approches utilisées pour estimer ces paramètres essentiels dans le modèle KMV.

2.1.1.3 Estimation des paramètres

Nous allons commencer par nous intéresser à l'estimation de σ_V et V_t . Pour ce faire, replaçons nous dans le cadre du modèle de Merton, et on suppose que le marché boursier nous fournit l'information la plus exacte possible de la valeur de marché des actions de l'entreprise. De ce fait on a déjà la première relation fonctionnelle dérivée de (1.4) ;

$$S_t = V_t \mathcal{N}(d_1) - DPe^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2) \quad (2.3)$$

S_t est observable pour les entreprises cotées en bourse, r , DP sont connus. La dernière équation ne dépend donc plus que de σ_V et de V_t .

KMV exploite aussi une autre relation qui lie la volatilité du rendement sur actions σ_S à σ_V et V_t . En effet, partant de l'hypothèse que les taux d'intérêt sont non stochastiques, on peut dériver à partir du Lemme d'Itô .1.1 la relation suivante :

Proposition 2.1.1. *Par application du lemme d'Itô .1.1 on a la relation :*

$$\sigma_S = \left(\frac{V}{S}\right) \mathcal{N}(d_1) \sigma_V \quad (2.4)$$

Démonstration 2.1.1. Posons $S_t = S(t, V_t)$, d'après le lemme d'Itô, nous avons :

$$dS(t, V_t) = \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial V} dV_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} d[V]_t$$

Or $d[V]_t = \sigma_V^2 V_t^2 dt$ En remplaçant dV_t par sa valeur en (1.1), on obtient :

$$\begin{aligned} dS(V_t, t) &= \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial V} (rV_t dt + \sigma_V V_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \sigma_V^2 V_t^2 dt \\ &= \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial V} rV_t dt + \frac{\partial S}{\partial V} \sigma_V V_t dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} \sigma_V^2 V_t^2 dt \end{aligned}$$

Or

$$dS_t = r_S S_t dt + \sigma_S S_t dW_t \quad (2.5)$$

Par identification à l'équation (2.5) nous avons :

$$\sigma_S S_t = \frac{\partial S}{\partial V} \sigma_V V_t$$

D'où

$$\sigma_S = \left(\frac{V}{S} \right) N(d_1) \sigma_V$$

car d'après l'équation (1.4) $\frac{\partial S}{\partial V} = N(d_1)$

Avec les relations (2.3) et (2.4) on a le système suivant :

$$\begin{cases} S_t = V_t N(d_1) - DPe^{-r(T-t)} N(d_2) \\ \sigma_S = \left(\frac{V}{S} \right) N(d_1) \sigma_V \end{cases} \quad (2.6)$$

Les estimés de V_t et de σ_V sont alors définis comme les valeurs $\hat{V}_t$ et $\hat{\sigma}_V$ qui solutionnent le système (2.6). Comme il s'agit d'un système non linéaire complexe, des méthodes numériques doivent être utilisées pour solutionner le système (2.6).

Nous présenterons par la suite deux méthodes d'estimations de ces paramètres :

- **Méthode itérative** : Une méthode couramment utilisée pour effectuer cette estimation est l'approche itérative. Le principe de l'estimation par itération repose sur l'ajustement successif des variables inconnues jusqu'à ce que les valeurs calculées convergent vers des résultats cohérents avec les observations du marché. Dans le cas du modèle

KMV, la capitalisation boursière de l'entreprise, c'est-à-dire la valeur de ses actions, dépend directement de la valeur de ses actifs et de leur volatilité. L'approche itérative commence par une estimation initiale de la valeur des actifs, puis ajuste cette estimation en minimisant l'erreur entre la capitalisation boursière observée et celle prédite par le modèle.

- Estimation par maximum de vraisemblance. Voir .1.3

Les deux méthodes pouvant aboutir à des résultats semblables. [8]

A- Méthode itérative Dans le modèle KMV, les paramètres clés comme la valeur des actifs V_t et la volatilité des actifs σ_V ne sont pas observables directement sur le marché. Ils peuvent être estimés en utilisant une méthode itérative, implémentée avec python comme suit. Cette méthode fait appel à plusieurs fonctions et bibliothèques pour effectuer les calculs et les optimisations nécessaires. On suppose que nous avons fait des observations sur la période d'estimation (1 an) :

- une série de prix des capitaux propres $S_0, S_1, \dots, S_N$
- Les DP en début et en fin de période. De tel manière à pouvoir avoir un drift qui va traduire l'évolution de DP au long de la période.

1. Initialisation des Variables

La première étape consiste à initialiser la volatilité des actifs σ_V . Pour cela nous commençons par donner une estimation initiale de la valeur des actifs étant calculées comme la somme de la valeur des actions S_t et de la dette DP_t

$$V_t = S_t + DPT_t$$

Ensuite à l'aide d'une fonction qui calcule l'écart-type des rendements logarithmique des actions, la volatilité est calculée comme suit :

- on calcul les rendements logarithmiques de l'actif

$$r_i = \ln \left(\frac{V_i}{V_{i-1}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

et $\bar{r}$ la moyenne des rendement logarithmique calculé On utilise les rendements logarithmiques dans ce modèle pour plusieurs raisons liées à la nature des processus stochastique et aux propriétés statistiques avantageuses des rendements logarithmique

[18]

- On peut donc avoir la volatilité historique des actifs :

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2}$$

2. Optimisation via Minimisation

L'étape suivante consiste à optimiser la valeur des actifs V_t en minimisant l'écart (erreur) entre la capitalisation boursière observée et celle calculée par le modèle de Merton. L'optimisation est réalisée à l'aide de la fonction `minimize` de la bibliothèque `scipy.optimize`. L'objectif est de minimiser la somme des carrés des erreurs en faisant varier la valeur des actifs V_t , On a :

$$\text{Erreur} = \sum ((S_t)_{\text{observé}} - (S_t)_{\text{calculé}})^2$$

Les variables intermédiaires d_1 et d_2 sont calculées avec les formules suivantes :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D_t}\right) + (r_f + 0,5\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T}$$

Ces variables sont ensuite utilisées pour calculer la valeur des actions Equity via la formule de Black-Scholes pour les options d'achat :

$$S_t \text{ calculé} = V_t \cdot N(d_1) - D_t \cdot e^{-r_f T} \cdot N(d_2)$$

où $N(\cdot)$ représente la fonction de distribution cumulée de la loi normale.

3. Recalcul de la Volatilité des Actifs

Après chaque itération, la volatilité des actifs σ_V est recalculée à partir des valeurs des actifs après optimisation. Le calcul se fait comme plus haut :

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2}$$

4. Critère de Convergence

Le processus itératif continue jusqu'à ce que la différence entre la nouvelle volatilité σ_V et l'ancienne soit inférieure à un seuil de tolérance prédéfini (10^{-4}). Une limite maximale d'itérations est également imposée pour éviter les boucles infinies.

5. Bibliothèques Utilisées

- `numpy` : Utilisée pour les calculs numériques, notamment le calcul des rendements logarithmiques et des écarts-types. - `scipy.optimize` : Fournit la fonction `minimize` pour l'optimisation de la valeur des actifs en minimisant la somme des erreurs. - `pandas` : Utilisée pour manipuler les données sous forme de `DataFrame`.

6. Résultats Finaux

Une fois la convergence atteinte, les valeurs finales de V_t et σ_V sont obtenues.

2.1.1.4 Passage risque neutre, probabilité historique

Dans l'évaluation des risques de défaut, il est essentiel de distinguer deux cadres de probabilité : la **probabilité risque-neutre** et la **probabilité historique**.

- **Probabilité risque-neutre** : Il s'agit d'un cadre dans lequel les investisseurs sont considérés comme indifférents au risque. Ce concept est largement utilisé dans la valorisation des instruments financiers dérivés et permet de simplifier les calculs en ajustant les rendements pour le risque. Dans ce cadre, les prix des actifs sont actualisés en utilisant le taux sans risque (r), car on suppose que les investisseurs ne demandent pas de prime de risque pour le risque encouru.
- **Probabilité historique** : Contrairement au cadre risque-neutre, la probabilité historique reflète les rendements réels attendus sur les actifs, en prenant en compte la prime de risque que les investisseurs exigent. Elle est donc plus pertinente pour évaluer les risques réels auxquels une entreprise est confrontée, notamment dans le cadre de la prévision des probabilités de défaut.

Dans le modèle KMV, pour passer du cadre risque-neutre à un cadre historique, nous devons ajuster le taux de rendement utilisé. En effet, au lieu du **taux sans risque** r utilisé dans la probabilité risque-neutre, il est plus approprié de travailler avec le **rendement des actifs** (μ) dans la probabilité historique. Ce rendement représente la croissance attendue des actifs d'une entreprise, en intégrant les primes de risque demandées par les investisseurs.

Pour obtenir une estimation de μ , nous utilisons le **Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers (MEDAF)**, ou Capital Asset Pricing Model (CAPM). Ce modèle permet de relier le rendement d'un actif au risque systématique de l'entreprise, et est donné par la formule suivante :

$$\mu = r_f + \beta \times (E(R_m) - R_f)$$

où :

- r_f est le taux sans risque,
- β est la sensibilité de l'entreprise aux fluctuations du marché, $\beta = \frac{cov(R_i, R_m)}{Var(R_m)}$
- $E(R_m)$ est le rendement attendu du marché.

En remplaçant r par μ dans le modèle KMV, nous basculons d'un cadre de probabilité risque-neutre à un cadre de probabilité historique, ce qui nous permet de capturer les conditions réelles de rendement des actifs et de mieux estimer les risques de défaut de l'entreprise dans un contexte forward-looking.

2.1.2 Mise en œuvre du modèle pour les entreprises cotées à la bourse du Nigeria

Pour appliquer le modèle KMV aux entreprises cotées à la Nigerian Exchange Group (NGX), il a été nécessaire de rassembler différentes données financières et de marché. Compte tenu des contraintes d'accès aux sources de données premium telles que Bloomberg ou Reuters, l'approche a été ajustée pour utiliser des sources alternatives et fiables. Les étapes de collecte et de traitement des données sont détaillées ci-dessous.

- **Collecte des données de marché** : Afin d'obtenir les prix de marché nécessaires à l'implémentation du modèle KMV, nous avons utilisé **tvDatafeed**, une API qui permet de récupérer les données historiques à partir de TradingView. Cette méthode nous a permis d'obtenir les prix des actions de plusieurs entreprises cotées à la NGX. Pour s'assurer de l'intégrité et de la qualité des données récupérées, celles-ci ont été vérifiées et comparées avec d'autres sources de données publiques.
- **Données du taux sans risque (Risk-Free Rate)** Le taux sans risque, élément clé pour l'estimation des probabilités de défaut dans le cadre du modèle KMV, a été calculé à partir des taux des bons du Trésor (Treasury Bills) du Nigeria. Ces informations ont été obtenues directement depuis le site de la **Central Bank of Nigeria (CBN)**, qui publie régulièrement ces taux. Cela permet d'utiliser une mesure représentative du taux sans risque pour l'économie nigériane.
- **Données sur les dettes des entreprises et actions en circulation** Les informations concernant les dettes des entreprises ainsi que le nombre d'actions en circulation (*shares outstanding*) ont été récupérées via *TradingView.com* en utilisant Python. Cela

a permis de compiler les dettes à court et long terme de chaque entreprise, données essentielles pour l'estimation de la structure de capital et la valorisation des actifs dans le cadre du modèle KMV.

- **Nettoyage et préparation des données** Après la collecte des données brutes, une étape de nettoyage des données a été effectuée pour éliminer les valeurs aberrantes, combler les données manquantes, et assurer la cohérence des séries temporelles. Ce processus a abouti à un ensemble de données finales comprenant 70 entreprises, avec des données quotidiennes couvrant une période de 500 jours(jours de bourse sur 2 années) allant du **28/02/2023 au 29/02/2025**.
- **Limites et considérations supplémentaires** Bien que les données utilisées soient de bonne qualité et aient été vérifiées, il convient de souligner que l'accès à des bases de données financières plus complètes, telles que celles offertes par un terminal **Bloomberg** ou **Reuters**, pourrait améliorer significativement la précision des estimations. Ces sources premium fournissent des données en temps réel et des informations plus détaillées, notamment sur les flux de trésorerie, les indicateurs financiers détaillés et les prévisions de marché. Cela pourrait notamment enrichir l'analyse des risques de crédit et affiner les résultats du modèle KMV.

2.1.2.1 Estimation des paramètres

Après avoir appliqué la méthode itérative décrite au paragraphe 2.1.1.3 pour estimer la valeur des actifs V , la volatilité des actifs σ_V , et le taux de croissance μ pour les 47 entreprises sélectionnées sur une période de 500 jours (du 28/02/2023 au 29/02/2025), nous obtenons les résultats suivant qui nous permettrons de calculer la DD :

- La valeur des actifs $\hat{V}$ est exprimé en naïra (milliards)
- Les "Tickers" sont des acronymes qui désignent les entreprises sur le marché boursier

	Tickers	$\hat{V}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$
0	GEREGU	102829 B	39.65%	10.78%
1	CAVERTON	4035 B	10.99%	10.54%
3	BUACEMENT	357424 B	29.16%	7.46%
5	FTNCOCOA	807 B	38.91%	3.76%
6	ACCESSCORP	591105 B	7.83%	8.95%
8	JAPAULGOLD	1540 B	41.65%	0.94%
9	MRS	3770 B	45.84%	8.02%
10	HONYFLOUR	4368 B	22.89%	10.97%
11	NAHCO	5133 B	47.74%	1.09%
12	JBERGER	8593 B	21.64%	15.79%
13	MCNICHOLS	71 B	61.12%	7.50%
14	UACN	6168 B	32.40%	5.38%
15	ETI	204032 B	11.86%	8.20%

FIGURE 2.1 – Estimation des paramètres du modèle KMV

2.1.2.2 Estimation des distances au défaut et probabilité de défaut

Après avoir estimé les paramètres V_t , σ_V , et μ pour chaque entreprise, il est maintenant possible de calculer la DD se référant à l'équation 2.2 pour chacune d'elles. La DD, comme défini précédemment, permet de mesurer l'écart entre la valeur des actifs de l'entreprise et son point de défaut (DP), pondéré par la volatilité de ses actifs.

Puisque nous nous trouvons dans le modèle KMV, nous devons utiliser une fonction de répartition empirique (EDF) afin de déterminer les probabilités de défaillance des entreprises. Étant donné que nous ne disposons pas d'une base de données importante nous permettant de déterminer le nombre d'entreprises qui ont commis des erreurs parmi toutes les entreprises ayant la même distance de défaut ou la même note que chacune des entreprises de notre échantillon, nous allons simplement utiliser la loi normale pour estimer les probabilités de défaut. Quelques résultats sont montrés dans le tableau suivant :

	Tickers	DD	PD
0	GEREGU	8.613780	0.00%
1	CAVERTON	1.216618	11.19%
3	BUACEMENT	8.306947	0.00%
5	FTNCOCOA	0.853769	19.66%
6	ACCESSCORP	1.369140	8.55%
8	JAPAULGOLD	2.337695	0.97%
9	MRS	6.439920	0.00%
10	HONYFLOUR	3.862869	0.01%
11	NAHCO	6.540453	0.00%
12	JBERGER	7.509667	0.00%
13	MCNICHOLS	4.060720	0.00%
14	UACN	2.535343	0.56%
15	ETI	2.044589	2.04%

FIGURE 2.2 – Résultat des estimations des DD et PD

2.1.2.3 Analyses des Résultats

2.1.2.3.1 Comparaison des résultats selon l'historique utilisé

Bien que, dans la littérature, l'application du modèle KMV repose généralement sur un historique de données boursières d'une durée d'un an pour l'estimation de la volatilité des actifs, nos travaux ont mis en lumière certaines remarques. En particulier, nous avons observé une faible dispersion des probabilités de défaut (PD) estimées sur cet horizon, ce qui réduit la capacité du modèle à différencier efficacement les niveaux de risque entre les entreprises.

2.1. MISE EN ŒUVRE DU MODÈLE KMV POUR LES ENTREPRISES NIGÉRIANE COTÉES À LA NGX

Ces constats nous ont conduits à explorer l'effet de l'utilisation d'un historique plus long – notamment de deux ans – sur la performance du modèle. L'objectif de cette ici est donc de comparer les résultats obtenus en utilisant des horizons historiques différents (un an, un an et demi et deux ans), afin d'en évaluer l'impact sur la stabilité des estimations, la pertinence économique et la capacité discriminante du modèle.

	# $\tilde{V}$	# $\tilde{\sigma}$	# $\tilde{\mu}$	# DD	# PD
count	76.0	76.0	76.0	76.0	76.0
mean	1.5757278385900808	0.29093246370838916	0.1386982501345145	9.436917484772167	0.0028585156044110926
std	3.14946961657834	0.18014136278868997	0.09460314781558156	9.43534670364052	0.020674598869465086
min	0.00192806	0.02537876527759612	-0.24916878387222913	0.92002887935366	0.0
25%	0.01889611558204632	0.14604607689017532	0.1047526151224498	5.19982029994263	1.5001087442544574e-23
50%	0.127580468279952	0.2731382563868303	0.1566709109666025	7.12167026882827	5.383988550033867e-13
75%	1.3389806734537273	0.3800711407549064	0.19099547755205568	9.938071766337515	1.0288560338779739e-07
max	15.831614772915069	0.9681891212187048	0.35527699291142784	70.73731507793381	0.1787788339351135

FIGURE 2.3 – Statistique descriptive PD sur un historique de 1 an

	# $\tilde{V}$	# $\tilde{\sigma}$	# $\tilde{\mu}$	# DD	# PD
count	71.0	71.0	71.0	71.0	71.0
mean	1.4441064405565809	0.4370228277205682	0.1291288105963396	8.85770014731225	0.009878640017448021
std	3.105678475000605	0.23403775736913443	0.08222757541915171	33.18661691869796	0.04809627623410352
min	0.000525246126388065	0.002025899448179298	-0.0893348864449968	0.28303131000408124	0.0
25%	0.01910674080887788	0.29997007521673125	0.09746363486224899	3.0413990944400666	2.452410299380814e-10
50%	0.09029686005019098	0.4123652819079618	0.14265702516562395	4.205527680809388	1.30236852505161e-05
75%	1.277986507656824	0.5467350053031552	0.19690547166055095	6.223925456351187	0.001177488777498742
max	15.70567660347797	1.0683418352317239	0.2415431947700437	283.15901306849076	0.38857641797855735

FIGURE 2.4 – Statistique descriptive PD sur un historique de 2 an

Commentaire des statistiques descriptives (Figures 2.3 et 2.4)

L'analyse des statistiques descriptives des probabilités de défaut (PD) et des volatilités (σ) met en lumière des différences notables selon l'horizon historique utilisé pour l'estimation (1 an vs 2 ans).

Probabilités de défaut (PD)

En comparant les deux tableaux, on observe que les **PD estimées à partir d'un historique de 1 an sont sensiblement plus faibles** :

- 75^e percentile : 1,02e-5 % (1 an) contre 0.11% (2 an)
- Médiane (50%) : 5 :3e-11 % (1 an) contre 0.0013% (2 ans)
- 25^e percentile : 1,02e-23 (1 an) contre 2,45e-10 (2 ans)
- Écart-type : 0,0206 (1 an) contre 0,048 (2 ans)

Ces résultats suggèrent que le modèle basé sur un historique de 1 an tend à produire des **estimations trop optimistes** (à priori), particulièrement visibles dans la distribution des quantiles. Plus précisément, environ **75% des entreprises obtiennent une PD inférieure à 0.00001%**, ce qui, selon les grilles de notation Moody's ou S&P, correspondrait à des notations allant de *Aa2* à *Aaa*, autrement dit, les meilleures notations possibles. Ce niveau

de risque extrêmement faible semble **excessivement optimiste**, notamment dans le contexte d'un marché émergent comme celui du Nigeria.

En revanche, avec un historique de 2 ans, les PD sont globalement plus élevées et plus dispersées, traduisant une meilleure capacité de **discrimination entre les entreprises plus ou moins risquées**.

Volatilité des actifs (σ)

L'estimation de la volatilité des actifs à partir de 2 ans de données conduit également à des valeurs plus élevées en moyenne (0,29 contre 0,45), avec un écart-type plus important (0,24 vs 0,18). Cette augmentation s'explique par la **prise en compte d'une volatilité structurelle plus représentative**, qui capte mieux les fluctuations récurrentes et profondes de l'entreprise, contrairement à la volatilité de court terme (1 an) qui est plus sensible au bruit de marché.

2.1.2.3.2 Résumé

Ces résultats illustrent le fait que l'utilisation d'un historique court conduit à une **sous-estimation du risque**, en produisant des PD trop faibles pour une proportion importante des entreprises. À l'inverse, un historique plus long semble capter une volatilité plus structurelle, offrant des estimations de PD plus réalistes et discriminantes.

Critère	1 an d'historique	2 ans d'historique
Sensibilité aux conditions récentes	Élevée	Moyenne
Volatilité captée	Courte durée	Structurelle
Stabilité des résultats	Moindre	Meilleure
Pouvoir discriminant	Faible	Plus élevé
Pertinence sur marché volatil	Moyenne	Meilleure (sous réserve)

TABLE 2.1 – Comparaison synthétique et justification du choix

L'augmentation des probabilités de défaut observée lorsque l'on utilise un historique boursier de deux ans s'explique par l'effet amplificateur de la volatilité sur le calcul de la distance à la barrière de défaut. En effet, sur des marchés émergents comme la Nigeria Stock Exchange, l'inclusion d'événements de marché plus anciens – souvent caractérisés par une forte instabilité – tend à augmenter la volatilité estimée des actifs. Or, dans le cadre du modèle KMV, cette volatilité accrue réduit mécaniquement la distance à la barrière, ce qui entraîne une élévation des PD. Cette observation illustre l'importance du choix de l'horizon historique dans la mise en œuvre du modèle.

2.1.2.3.3 Visualisation des résultats

Pour une meilleure visualisation des résultats nous avons décidé de convertir les PD en rating, en utilisant les seuils de rating de Moody's 2022

Rating	PD Horizon 1 Year
Aaa	0.00%
Aa	0.01%
A	0.06%
Baa	0.19%
Ba	0.87%
B	3.78%
Caa-C	40.01%

TABLE 2.2 – Default Rates by Rating

On obtient la répartition suivante :

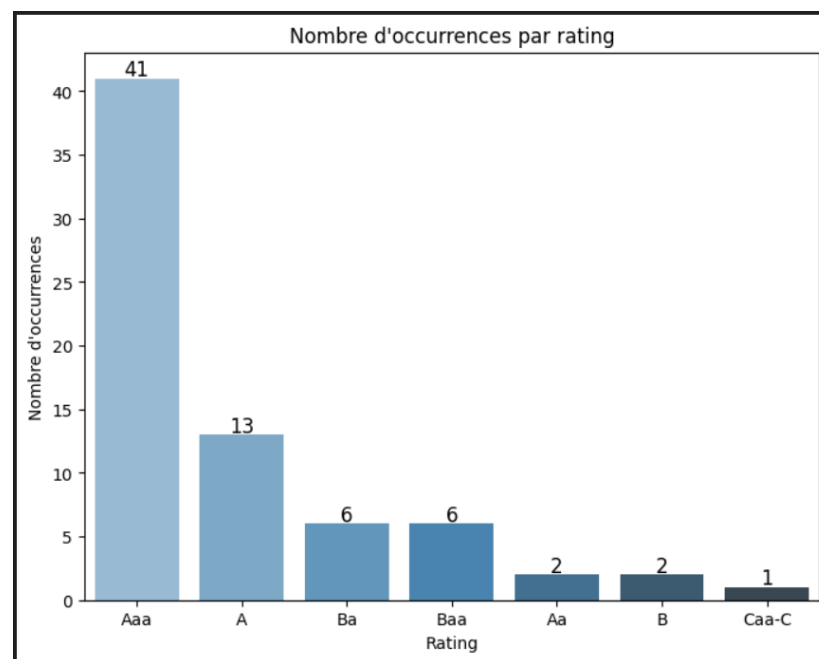


FIGURE 2.5 – Répartition des ratings

Du fait de la présence dominante des ratings Aaa on pourrait penser que notre modèle a des tendances à sous-estimer les PD. Ceci pourrait peut-être s'expliquer par le fait que le site où nous avons récupéré des données recense plus facilement les entreprises avec les meilleures santés financières et a plus de mal à avoir des données pour les entreprises en défaut ou proche des défauts. Ce qui pourrait relever ici l'importance d'avoir des données pour les entreprises lorsqu'elles font défaut car elles nous permettront de mieux comprendre les liens.

2.1. MISE EN ŒUVRE DU MODÈLE KMV POUR LES ENTREPRISES NIGÉRIANE COTÉES À LA NGX

En classant par secteur on obtient la répartition suivante :

Secteur	Aaa (Excellente)	Aa (Très Bonne)	A (Bonne)	Baa (Moyenne)	Ba (Spéculative)	B (Risquée)	Caa-C (Très Risquée)
Banque & Finance	ACCESSCORP, ETI, FCMB, UBA, ZENITHBANK, STANBIC	-	GTCO, JAIZBANK, WEMABANK	FIDELITYBK, UNITYBNK	-	-	-
Biens de Consommation	BUAFOODS, NESTLE, UNILEVER, GUINNESS	-	NASCON, NB	CADBURY	-	-	DANGSUGAR
Industrie & Construction	BUACEMENT, CAP, WAPCO, DANGCEM	-	-	-	TRANSCORP, CUTIX	-	-
Pétrole & Gaz	MRS, OANDO, SEPLAT, TOTAL	-	-	-	JAPPAULGOLD	-	-
Santé & Pharmacie	FIDSON, NEIMETH	-	-	MAYBAKER	-	-	-
Agriculture	OKOMUOIL, PRESCO	-	-	-	-	FTNCOCOA	-
Conglomérats	TRANSCOHOT, UACN, CHELLARAM	-	-	-	-	-	-
Télécoms & Technologie	MTNN	AIRTELAFRI	-	-	-	-	-
Assurance	MANSARD	-	-	-	-	-	-
Immobilier	UPDC	-	-	-	-	-	-
Services Divers	CHAMPION, GEREGU, NGXGROUP, REDSTAREX	CAVERTON	ACADEMY, HONYFLOUR	ABBEYBDS, ABCTRANS	TIP	CHAMS	-

FIGURE 2.6 – Répartition des ratings par secteur

On pourrait faire quelques remarques et présomptions de par ces résultats

1. Secteurs Dominants avec Ratings Élevés (Aaa, Aa, A)

Banque & Finance et **Biens de Consommation** présentent la plus forte concentration d'entreprises **Aaa**, reflétant :

- **Stabilité financière** : Les banques (UBA, ZENITHBANK) et les géants des biens de consommation (NESTLE, UNILEVER) bénéficient de flux de trésorerie prévisibles et d'un faible endettement.
- **Effet de taille** : Ces secteurs sont dominés par des acteurs historiques, résilients aux chocs économiques.
- **Régulation favorable** : Le secteur bancaire nigérian, bien régulé, limite les risques de défaut.

Télécoms (MTNN, AIRTELAFRI) affiche un rating **Aa/A**, soulignant :

- **Monétisation robuste** grâce à la pénétration croissante du mobile et des services data.
- **Risque de change** : Ces entreprises sont exposées aux fluctuations du Naira, ce qui explique l'absence de Aaa.

2. Secteurs à Risque Modéré (Baa, Ba)

Industrie & Construction et **Pétrole & Gaz** montrent des ratings **Ba/Baa**, révélant :

- **Sensibilité aux coûts d’inputs** : Le ciment (BUACEMENT) et le pétrole (SE-PLAT) dépendent des prix mondiaux des matières premières.
- **Dépendance aux subventions** : Le secteur pétrolier est vulnérable aux changements politiques (ex : réforme des subventions en 2023).

Ratings Ba (TRANSCORP, JAPAUFGOLD) : Liés à des modèles d’affaires volatils (ex : orpaillage artisanal pour JAPAUFGOLD).

3. Secteurs à Haut Risque (B, Caa-C)

DANGSUGAR (Caa-C) :

- Dette élevée et dépendance aux importations de sucre brut (coûts en USD).
- Concurrence des importations illégales.

CHAMS (B) :

- Petite capitalisation boursière et revenus irréguliers dans les services IT.

2.1.2.3.4 Comparaison du modèle avec les ratings de Augusto

Dans cette section, nous proposons une comparaison entre notre modèle d’estimation de la probabilité de défaut et celui développé par Augusto et al. (2012). Cette démarche vise à mettre en perspective les résultats que notre modèle permettrait d’obtenir avec une base de données adéquate. Contrairement aux agences de notation internationales telles que Moody’s, S&P ou Fitch, nous pouvons directement avoir accès aux rating de Augusto sur leur page web.

Banks				
COMPANY	RATING	EXPIRY	OUTLOOK	COUNTRY
Fidelity Bank Plc	A+	Dec 31 , 2025	Stable	Nigeria
TAJ/Bank Limited	Bbb+	Dec 31 , 2025	Stable	Nigeria
UBA Plc	Aa-	Dec 31 , 2025	Stable	Nigeria
TAJ/Bank Limited	Bbb+	Dec 31 , 2025	Stable	Nigeria
Union Bank of Nigeria Plc	Bbb	Jun 30 , 2025	Stable	Nigeria

FIGURE 2.7 – Exemple de rating sur la page Augusto

Secteur bancaire et entreprise financière

2.1. MISE EN ŒUVRE DU MODÈLE KMV POUR LES ENTREPRISES NIGÉRIANE COTÉES À LA NGX

Entreprise	Rating KMV	Rating Augusto	Écart	Explications Clés Probable
Access Bank	Aaa	Aa	1	Augusto intègre le risque sectoriel bancaire nigérian (NPLs élevés). KMV semble trop optimiste.
UBA	Aaa	Aa-	1	Même constat qu'Access Bank. Les agences externes appliquent une décote "pays".
Fidelity Bank	Baa	A+	11	Écart majeur. Votre modèle semble sous-pondérer la qualité des actifs de Fidelity.
Jaiz Bank	A	Bbb	11	Augusto pénalise son exposition niche (banque islamique). KMV surestime peut-être sa stabilité.
Abbey Mortgage Bank	Baa	Bbb-	→	Cohérence relative. Les deux modèles reconnaissent son risque modéré.

FIGURE 2.8 – Comparaison des ratings institutions financières

Commentaire sectoriel : Notre modèle a tendance à surestimer les PD des banques (écart de 2 notch vs Augusto)

Entreprises non financières

Entreprise	Rating KMV	Rating Augusto	Écart	Explications Clés
Dangote Sugar	Caa-C	A+ (Negative)	1111	Écart extrême. Augusto considère le soutien implicite du groupe Dangote, absent dans KMV.
Nigerian Breweries	A	A+	1	Cohérence relative. Augusto valorise sa position de marché dominante.
MTN Nigeria	A	Aa+ (Negative)	11	Augusto reconnaît sa force cash-flow, mais le "Negative Outlook" reflète des risques réglementaires (KMV les ignore).

FIGURE 2.9 – Comparaison des ratings, institutions non financières

Commentaire Sectoriel : Notre modèle KMV semble sous estimer la résiliences des entreprises du secteur

2.1.2.3.5 Analyse globale des écarts

1. Tendances Clés :

- Notre modèle semble laxiste sur les banques

2. Cohérences Notables :

- Nigerian Breweries (A vs A+) : Les deux modèles reconnaissent sa stabilité.
- MTN (A vs Aa+) : Malgré l'écart, les deux soulignent sa solidité.

3. Incohérences Majeures :

- Dangote Sugar : Le Caa-C (KMV) paraît excessif vs A+ (Augusto). Notre modèle semble ignorer la diversification géographique du groupe.
- Fidelity Bank : Le Baa (KMV) ne capture pas sa récente amélioration des ratios capitaux propres.

2.1.2.3.6 Potentiel de recalibration

Pour aligner notre modèle sur les pratiques locales (Augusto) tout en gardant sa rigueur quantitative, voici les pistes :

1. Adapter les Seuils PD aux Realia Nigériens

- Élargir les fourchettes des ratings hauts (ex : Aaa = $PD < 0.001\%$ au lieu de 0.0001%) pour éviter des seuils irréalistes.
- Ajuster les seuils critiques :

2. Intégrer des Facteurs Qualitatifs

- **Pondération par secteur :**
 - Multiplier les PD des banques par un facteur pour refléter le risque systémique.
- **Score composite :**
 - Combiner la PD KMV avec un score qualitatif (ex : soutien institutionnel, diversification géographique).

3. Validation Empirique

- **Backtesting :** Comparer nos ratings recalibrés avec les défauts réels sur 5–10 ans (si données disponibles).
- **Benchmark :** Tester si les nouveaux seuils réduisent les écarts avec Augusto pour un échantillon test.

L'approche qui nous marquer notre intérêt sera celle de multiplier les PD des banques par un facteurs et nous parvenons ainsi à réduire l'écart à Augusto.

2.1.2.4 Limites

- Nous n'utilisons pas une fonction de répartition empirique pour la transformation de la DD en PD. Nous notons aussi que les PD fournies par Moody's ne sont pas directement les résultats des modèles car en plus ils font des études précises par entreprises pour les ajustements des résultats. C'est d'ailleurs en partie ce que révèle les rapprochements des notre modèle avec les ratings de Augusto.
- L'étape très importante du backtesting ne nous est pas réalisables car il est très compliqué pour les marchés émergents d'avoir des bases de données sur les défauts historiques des entreprises.

2.2 Modèle de Scoring

Bien que la mise en œuvre du modèle KMV ait permis d'estimer des probabilités de défaut (PD) pour un échantillon restreint d'entreprises cotées, son application demeure limitée par la disponibilité des données de marché. Or, dans le contexte nigérian, une grande partie des entreprises, en particulier les petites et moyennes entreprises (PME), ne sont ni cotées en bourse ni suivies par les agences de notation internationales. Cela complique fortement l'évaluation de leur risque de crédit.

C'est dans ce contexte que l'idée d'un *shadow rating model* prend tout son sens. Il s'agit d'un modèle de notation implicite, dérivé des états financiers des entreprises, et visant à estimer un score de risque ou une probabilité de défaut à partir de variables comptables et financières. Le shadow rating est typiquement utilisé lorsque les données de défaut sont rares. Dans notre cas il permettrait d'élargir la portée de l'analyse du risque de crédit à des entreprises non notées, en fournissant un proxy de notation reposant sur des données internes.

Cependant, comme souligné précédemment, nous avons rencontré plusieurs obstacles méthodologiques lors de la mise en place d'un tel modèle :

- L'indisponibilité de données de notation fiables pour calibrer le modèle sur des notations observées ;
- Un échantillon limité d'entreprises pour lesquelles des PD ont pu être calculées à l'aide du modèle KMV (seulement 70 entreprises) ;
- Un accès restreint aux bases de données financières détaillées, ce qui limite la profondeur de l'analyse.

Malgré ces contraintes, cette section vise à présenter une méthode qui aurait pu être utilisée en présence de données plus complètes, à savoir le *shadow rating model*. L'objectif est de montrer son potentiel d'application dans des environnements où les données sont rares, et de souligner en quoi un modèle économétrique peut constituer une alternative pragmatique pour l'évaluation du risque de crédit des PME, particulièrement dans des économies émergentes comme celle du Nigeria.

2.2.1 Méthodologie

L'approche du shadow rating s'inspire des travaux [7], à la différence près que la variable dépendante utilisée ici n'est pas directement la probabilité de défaut (PD), mais plutôt son logarithme (logit).

Cette méthode est particulièrement pertinente dans le contexte où les PME au Nigéria ne sont pas couvertes par les notations externes des agences internationales ou même locales (Augusto) et aussi généralement pas cotées en bourse. Comme toutes les approches quantitatives de classification du risque, elle vise à mettre en évidence des indicateurs fiables permettant d'estimer la probabilité de défaut.

Dans le cas du shadow rating, cette estimation se fait de manière indirecte, faute de données suffisantes pour construire un modèle prédictif explicite. Il s'agit alors d'identifier les facteurs explicatifs les plus pertinents, de leur attribuer un poids, et de les combiner pour simuler une notation équivalente à celles fournies par les agences. Une étape essentielle consiste ensuite à calibrer le modèle afin qu'il reflète une probabilité de défaut cohérente, ce qui le rend exploitable pour la gestion du risque de crédit et conforme aux exigences réglementaires.

La construction du modèle s'articule autour de six grandes étapes successives :

1. La collecte des données ;
2. L'association entre les notations externes et les probabilités de défaut correspondantes (dans notre cas ce serait l'utilisation directe des PD issues du KMV) ;
3. L'analyse des facteurs de risque et la sélection des variables pertinentes ;
4. L'estimation du modèle à partir des données retenues ;
5. La validation des performances du modèle ;
6. Et enfin, les ajustements nécessaires pour en améliorer la précision et la robustesse.

2.2.1.1 Étape 1 : Collecte des données

Idéalement, cette phase suppose l'accès à une base solide de notations externes (émises par Moody's, S&P ou Fitch) pour un grand nombre d'entreprises sur plusieurs périodes. Or, dans notre cas, ce type de données n'était pas disponible pour les entreprises nigérianes. Nous avons donc opté pour une démarche alternative : utiliser les probabilités de défaut estimées via le modèle KMV comme variable dépendante, en l'absence de notations formelles. Cela constitue une approximation raisonnable pour initier le processus.

Concernant les variables explicatives, celles-ci auraient dû provenir d'une base financière exhaustive comme Bloomberg ou Reuters. Toutefois, l'accès à ces bases étant restreint, nous avons envisagé de travailler avec des données accessibles publiquement, collectés sur le site *TradingView.com* (qui ne donne malheureusement pas gratuitement l'accès aux données des

	# Price to sales ratio	# Price to book ratio	# Return on assets %	# Return on equity %	# Return o...	# Operating margin %
ABBEYBDS	3.53	4.73	2.16	17.2	11.16	8.04
ACADEMY	0.47	6.83	21.19	214.8	60.65	-21.14
ACCESSCORP	0.22	0.26	2.63	37.8	15.6	26.3
AIRTELAFRI	1.01	1.99	0.55	2.39	0.99	29.73
BUACEMENT	3.23	7.29	5.31	19.1	8.77	32.61
BUAFOODS	4.99	17.18	26.14	79.44	79.18	39.56
CHAMPION	1.75	3.04	3.9	7.03	6.98	17.1
CUTIX	1.13	3.88	15.32	27.68	25.79	15.44
DANGCEM	2.25	3.79	9.63	26.13	17.7	37.96
DANGUGAR	0.6	1.89	-23.32	-132.12	-116.13	2.21

FIGURE 2.10 – Extrait du dataSet obtenu après la collecte

ratio financiers sur des historiques larges.).

Enfin, toute observation présentant des valeurs manquantes ou incohérentes a été écartée. L'objectif de cette étape est de garantir que l'échantillon final, bien que restreint, soit exploitable dans le cadre d'un modèle économétrique exploratoire. La suppression d'observations présentant des valeurs manquantes nous a emmené à avoir une base relativement insuffisante. (145 observations et 14 variables)

2.2.1.2 Étape 3 : Analyse des facteurs de risque et sélection des variables

Des études ([1] [15]) montrent l'impact des ratio financiers des entreprises sur les entreprises

Ces variables incluent notamment :

- des ratios de rentabilité (par exemple : retour sur actifs, marge nette),
- des ratios de solvabilité (par exemple : dettes totales sur capitaux propres),
- des ratios de liquidité (par exemple : ratio courant, ratio de liquidité immédiate),
- et des indicateurs d'efficacité opérationnelle (par exemple : rotation des actifs).

Note 2.2.1. Dans le cadre de cette étude, une distinction entre les institutions financières et non financières s'avère nécessaire en raison des différences structurelles fondamentales dans leurs bilans, leurs sources de revenus et leurs profils de risque. Les institutions financières, telles que les banques, sont fortement influencées par des ratios spécifiques comme le levier réglementaire et la liquidité à court terme, tandis que les entreprises non financières dépendent davantage de leur rentabilité opérationnelle et de leur capacité à générer des flux de trésorerie. Une modélisation séparée aurait permis de mieux capturer ces dynamiques distinctes.

Cependant, compte tenu de la taille limitée de notre échantillon (145 observations), une segmentation stricte aurait réduit la puissance statistique des modèles estimés. Pour pallier cette contrainte, nous avons opté pour l'introduction d'une variable dummy sectorielle (1 pour les institutions financières, 0 sinon), couplée à des termes d'interaction avec les ratios clés. Cette approche permet de contrôler partiellement l'hétérogénéité sectorielle tout en conservant un nombre suffisant d'observations pour l'estimation. Bien que moins idéale qu'une analyse séparée, cette méthode offre un compromis pragmatique entre précision sectorielle et robustesse statistique, tout en fournissant des insights exploitables pour l'évaluation du risque de crédit dans le contexte nigérian.

La plupart des variables sont exprimées sous forme de ratios, ce qui permet de comparer les entreprises indépendamment de leur taille ou de leur secteur. Cette approche évite également les problèmes liés à la diversité des devises et aux écarts de valeur nominale entre entreprises.

Les variables présentant une corrélation très forte entre elles (supérieure à 80% ou VIF >5) doivent faire l'objet d'un traitement pour limiter la multicolinéarité : dans chaque paire de variables fortement corrélées, seule celle offrant la meilleure corrélation avec la probabilité de défaut doit être conservée.

Après nettoyage des données et filtrage des variables, un ensemble final de ratios a été retenu pour servir de base à l'estimation du modèle de scoring.

	# Debt to assets ratio	# Return on assets %	# Current ratio	# Operating marg...
count	145.0	145.0	145.0	145.0
mean	0.20772413793103447	6.343241379310345	1.3737241379310345	17.775310344827588
std	0.18903903487105733	14.398500302054929	1.3298166878828253	18.708410729430568
min	0.0	-63.97	0.07	-39.85
25%	0.05	2.16	0.72	6.44
50%	0.18	6.1	1.02	17.8
75%	0.27	12.75	1.53	30.03
max	0.86	35.21	8.54	62.98

FIGURE 2.11 – Statistiques descriptives des variables retenues

2.2.1.3 Étape 4 : Estimation du modèle

Dans ce modèle, nous utilisons un ensemble de données de panel composé d'entreprises observées sur plusieurs périodes pour élargir notre échantillon d'observations. Nous devons tirer parti des méthodes économétriques adaptées aux données de panel, qui permettent de contrôler l'hétérogénéité non observée entre les entreprises et les dépendances temporelles éventuelles.

Conformément aux recommandations de la littérature [20], nous devons estimer un modèle de données de panel par la méthode des moindres carrés avec effets aléatoires ou fixes. Le choix entre ces deux spécifications repose sur les résultats du test de [10], qui permet de déterminer si les effets spécifiques aux entreprises sont corrélés ou non avec les variables explicatives.

La variable dépendante du modèle est le *logit* de la probabilité de défaut (PD) estimée à partir du modèle KMV. Cette transformation est définie par la formule suivante :

$$\text{Logit}(PD) = \ln \left(\frac{PD}{1 - PD} \right)$$

L'utilisation du *logit* permet de linéariser la relation entre la probabilité de défaut et les variables explicatives, tout en assurant que les prédictions du modèle restent dans l'intervalle $[0, 1]$.

Les variables explicatives sélectionnées sont constituées exclusivement de ratios financiers, issus des états financiers des entreprises et d'un dummy, ce qui est cohérent avec notre objectif d'estimer des notations implicites en contexte de données limitées.

Le modèle estimé constitue donc une approximation économétrique d'un système de notation interne, permettant d'expliquer les différences de risques de crédit entre les entreprises à partir de leurs caractéristiques financières observables.

2.2.1.4 Étape 5 : Validation du modèle

Dans un cadre idéal, une fois le modèle estimé, une étape essentielle consiste à valider sa capacité à expliquer ou à prédire correctement les probabilités de défaut à partir des variables sélectionnées. Cette validation repose sur plusieurs outils et tests statistiques permettant d'évaluer la robustesse et la pertinence du modèle.

En l'absence de notations officielles disponibles pour les entreprises de notre échantillon, cette étape n'a pas pu être réalisée dans le cadre de ce mémoire. Toutefois, nous présentons ci-dessous la manière dont la validation devrait être conduite dans un contexte où des données complètes seraient disponibles.

- **Validation sur échantillon (in-sample) :** Il s'agirait dans un premier temps de vérifier l'ajustement du modèle sur l'échantillon d'estimation à travers les coefficients de détermination (R^2), les tests de significativité des coefficients, et la logique économique des signes estimés.

- **Validation hors échantillon (out-of-sample)** : Une validation rigoureuse suppose également une évaluation du modèle sur un échantillon non utilisé pour l'estimation, afin de tester sa capacité à généraliser les résultats à d'autres observations. Cela peut être fait à l'aide d'une validation croisée (*cross-validation*) ou d'une division de l'échantillon en sous-périodes.
- **Analyse des erreurs de prévision** : Il est aussi pertinent d'analyser les écarts entre les probabilités de défaut estimées et les valeurs de référence (par exemple, issues d'un modèle comme KMV ou de notations externes si disponibles), afin d'identifier d'éventuels biais systématiques.
- **Évaluation par la courbe ROC** : Enfin, la performance prédictive du modèle peut être mesurée par la courbe ROC (*Receiver Operating Characteristic*) et l'aire sous la courbe (AUC). Cette méthode permet de juger la capacité du modèle à discriminer les entreprises à haut risque de défaut de celles à faible risque, même lorsque la variable dépendante est continue. Une AUC élevée (proche de 1) reflète un bon pouvoir discriminant.

Cette étape représente une étape cruciale dans tout processus de modélisation statistique appliqué au risque de crédit.

2.2.1.5 Étape 6 : Ajustement du modèle

Comme évoqué précédemment, un modèle purement quantitatif ne permet pas toujours de capturer certaines spécificités intrinsèques aux entités analysées — en l'occurrence, les entreprises — même lorsque l'on intègre des variables économiques, financières et structurelles pertinentes. Ces caractéristiques non observables peuvent expliquer en partie les écarts potentiels entre les probabilités de défaut estimées par le modèle et les notations réelles (ou estimations qualitatives d'experts, si disponibles).

Dans un contexte idéal, une étape d'ajustement qualitatif viendrait compléter le modèle quantitatif. Cet ajustement viserait à intégrer des éléments contextuels propres à certaines entreprises et non généralisables statistiquement à l'ensemble de l'échantillon. Par exemple, la présence d'un historique récent de défauts, des situations juridiques complexes, ou encore une gouvernance opaque peuvent affecter significativement le risque perçu sans que cela ne soit capté par les variables explicatives retenues dans le modèle.

Parmi les ajustements qualitatifs typiquement envisagés :

- **Historique de défaut ou de restructuration** : Une entreprise ayant connu un défaut récent verrait sa probabilité de défaut réévaluée à la hausse, indépendamment de ses indicateurs financiers actuels.
- **Réglementation ou soutien institutionnel** : Certaines entreprises bénéficient d'un soutien explicite de l'État ou d'un cadre réglementaire protecteur (subventions, garanties implicites, etc.) qui réduit leur risque effectif.
- **Exposition au risque de change ou à des contraintes sectorielles** : Les entreprises opérant dans un environnement fortement dollarisé ou dans un secteur particulièrement exposé à la volatilité des matières premières peuvent nécessiter un ajustement spécifique.

Ces ajustements seraient appliqués sous forme de *modifications discrètes* de la notation ou de la probabilité estimée, à l'image de « notches » dans les agences de notation, en fonction de grilles qualitatives ou d'évaluations d'experts.

Bien que cette étape n'ait pu être mise en œuvre dans le cadre de ce mémoire (pour chacun des modèles) — faute d'accès à des données qualitatives détaillées sur les entreprises étudiées —, elle demeure essentielle dans une application opérationnelle du modèle. Elle permettrait notamment d'améliorer la précision des estimations pour les cas particuliers, en réduisant les écarts extrêmes entre les résultats du modèle et la réalité perçue du risque.

2.3 Modèle à intensité

2.3.1 Estimation de l'intensité de défaut via utilisation des spreads de bonds

Les modèles réduits, ou modèles à intensité de défaut, ont été développés en réponse aux limitations des modèles structurels de crédit. Ces modèles ont été largement promus par des travaux académiques et des institutions financières, qui cherchaient à exploiter les informations du marché pour évaluer les risques de défaut d'une manière plus réactive et flexible. Parmi les pionniers de ces approches, on trouve les contributions de Robert Jarrow et Stuart Turnbull dans les années 1990, qui ont posé les bases théoriques des modèles réduits, notamment à travers l'introduction de modèles utilisant les spreads de crédit pour estimer les probabilités de défaut. Dans cette section, nous examinerons deux méthodes principales basées sur les modèles réduits :

- **Crédit Spreads** : Utilisation des Spreads de Bonds. Cette méthode exploite les spreads de crédit, c'est-à-dire l'écart entre le rendement des obligations risquées et celui des obligations sans risque, pour inférer la probabilité de défaut d'un émetteur.
- **Probabilité de Défaut Inférée à partir des Bonds** : Cette approche repose sur l'analyse des prix des obligations pour estimer directement les probabilités de défaut, en tenant compte des caractéristiques spécifiques des obligations et des dynamiques des taux d'intérêt.

Ces deux méthodes, bien qu'issues de la même famille de modèles, offrent des perspectives distinctes et complémentaires pour l'estimation des risques de défaut en pricing par risque neutre. Par la suite nous parlerons de la calibration des intensités de défaut.

Définition 2.3.1. *Le pricing par risque neutre est une méthode utilisée en finance pour évaluer le prix des actifs financiers, y compris les obligations, en prenant en compte le risque de défaut. Cette approche est basée sur le concept de probabilité neutre au risque, où les investisseurs sont indifférents au risque, c'est-à-dire qu'ils ne demandent pas de prime de risque supplémentaire pour l'incertitude.*

Notation 2.3.1. *On considère les notations suivantes dans la suite :*

- y : taux d'intérêt sans risque
- y^* : taux d'intérêt ou rendement d'une obligation risquée
- P^* : prix de l'obligation risquée
- RR : Recovery rate
- T : Maturité de l'obligation
- F : La valeur nominale du bond
- C_i : Le coupon payé à la période i
- π_i : La probabilité marginale de défaut à la période i
- π^Q : La probabilité de défaut cumulée jusqu'à échéance

2.3.1.1 Crédit Spreads : Utilisation des Spreads de Bonds

L'estimation des probabilités de défaut (PD) est un enjeu crucial pour les institutions financières et les investisseurs, car elle permet d'évaluer le risque de crédit associé à un emprunteur. Une méthode répandue pour cette estimation repose sur l'analyse des écarts de crédit (ou spreads) entre les rendements des obligations risquées et ceux des obligations sans risque. Cette méthode se base sur l'idée que les obligations peuvent être modélisées comme une combinaison de deux actifs hypothétiques : un actif qui paie en cas de survie et un autre qui paie en cas de défaut.

En comparant le rendement d'une obligation risquée (y^*) à celui d'une obligation sans risque (y), il est possible de quantifier la prime de risque exigée par les investisseurs pour compenser le risque de défaut. Cette prime, mesurée par l'écart entre y^* et y , peut ensuite être utilisée pour inférer la probabilité de défaut cumulée sur la période d'investissement, en tenant compte du taux de récupération attendu en cas de défaut. **Conception**

Combinaison en deux titres hypothétiques

L'approche commence par conceptualiser les obligations comme une combinaison de deux titres distincts :

- Un titre qui paie en cas de survie, c'est à dire sans défaut.
- Un titre qui paie en cas de défaut

On considère un zéro-coupon émis par une entreprise(contrepartie). Le paiement final de cette obligation à l'échéance est comparé au taux sans risque. Le prix de l'obligation est calculé comme suit :

$$P^* = \frac{F}{(1+y)^T} \quad (2.7)$$

Pricing par risque neutre

Par la suite, le prix de l'obligation est déterminé en utilisant la méthode du pricing par risque neutre. On prend en compte ici la probabilité de défaut cumulée jusqu'à échéance π^Q et le taux de récupération en cas de défaut RR .

$$P^* = \frac{F}{(1+y^*)^T} = \frac{F \times (1 - \pi^Q)}{(1+y)^T} + \frac{RR \times F \times \pi^Q}{(1+y)^T} \quad (2.8)$$

Proposition 2.3.1. *on montre que*

$$y^* - y \approx \left(\frac{\pi^Q}{T} \right) (1 - RR) \quad (2.9)$$

Démonstration 2.3.1. *On part de la formule suivante pour le prix d'une obligation risquée, en utilisant une approche de pricing sous risque neutre :*

$$P^* = \frac{F}{(1+y^*)^T} = \frac{F \times (1 - \pi^Q)}{(1+y)^T} + \frac{RR \times F \times \pi^Q}{(1+y)^T}$$

où P^* est le prix de l'obligation risquée.

On peut simplifier l'équation en isolant $(1+y^*)^T$:

$$\frac{F}{(1+y^*)^T} = \frac{F [(1 - \pi^Q) + RR\pi^Q]}{(1+y)^T}$$

$$\frac{F}{(1+y^*)^T} = \frac{F(1 - \pi^Q(1 - RR))}{(1+y)^T}$$

Pour de petites valeurs de π^Q , on peut utiliser un développement limité de $(1+y^*)^{-T}$ autour de y^* et de $(1+y)^T$ autour de y . On obtient :

$$\frac{1}{(1+y^*)^T} \approx \frac{1}{(1+y)^T} [1 - T(y^* - y)]$$

En égalisant les deux expressions de $\frac{F}{(1+y^*)^T}$:

$$\frac{1}{(1+y)^T} \times [1 - T(y^* - y)] \approx \frac{1}{(1+y)^T} [1 - \pi^Q(1 - RR)]$$

On simplifie en annulant $\frac{1}{(1+y)^T}$ des deux côtés, ce qui donne :

$$1 - T(y^* - y) \approx 1 - \pi^Q(1 - RR)$$

Soit

$$-T(y^* - y) \approx -\pi^Q(1 - RR)$$

Et finalement, on multiplie par -1 pour obtenir l'approximation souhaitée :

$$T(y^* - y) \approx \pi^Q(1 - RR)$$

En divisant par T , on obtient :

$$y^* - y \approx \left(\frac{\pi^Q}{T} \right) (1 - RR)$$

2.3.1.2 Probabilité de Défaut Inférée à partir des Bonds

Cette méthode se base sur l'idée que les prix des obligations contiennent des informations précieuses sur les risques de défaut associés à l'émetteur. En analysant la structure des prix de plusieurs obligations émises par la même entité, il est possible d'inférer les probabilités de défaut implicites sur différentes échéances.

Le modèle vise à déterminer les valeurs optimales des probabilités marginales de défaut annuelles π_i en minimisant la différence totale entre les prix observés des obligations sur le marché et les prix théoriques, lesquels dépendent directement de ces probabilités marginales. Cette optimisation permet d'estimer les probabilités de défaut annuelles spécifiques pour chaque échéance.

Entre ces points d'évaluation, les probabilités sont approximées par une interpolation linéaire, offrant ainsi une estimation continue de la probabilité de défaut sur l'ensemble de l'horizon temporel considéré. Cette approche permet de capturer de manière granulaire la dynamique du risque de crédit d'un émetteur en fonction de la variation des prix des obligations, offrant ainsi une vision complète de la probabilité de défaut sur différentes échéances.

Conception

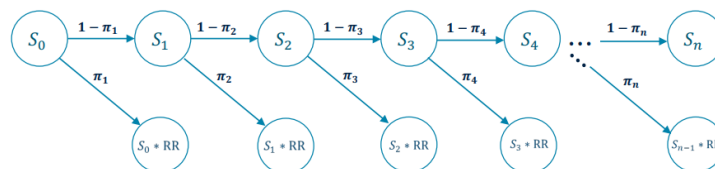


FIGURE 2.12

L'approche par les spreads d'obligations repose sur l'hypothèse que ces spreads reflètent le risque de défaut perçu par le marché. Le modèle vise à estimer les probabilités marginales de défaut π_i en minimisant l'écart entre le prix observé des obligations et le prix théorique

calculé selon ces probabilités.

Prix Théorique des Obligations

Le prix théorique d'une obligation, prenant en compte le risque de défaut et le taux de recouvrement, est déterminé en actualisant les flux de trésorerie futurs (coupons et principal) par un taux qui combine le taux sans risque et les probabilités de défaut cumulées. La formule est :

$$P^* = \sum_{i=1}^T \left[\frac{C_i \times (1 - \sum_{j=1}^i \pi_j)}{(1 + r_i)^i} \right] + \frac{F \times (1 - \sum_{j=1}^T \pi_j)}{(1 + r_T)^T} + \sum_{i=1}^T \left[\frac{RR \times F \times \pi_i}{(1 + r_i)^i} \right] \quad (2.10)$$

Interprétation des Termes

1. Paiements en cas de survie :

- Le premier terme $\sum_{i=1}^T \left[\frac{C_i \times (1 - \sum_{j=1}^i \pi_j)}{(1 + r_i)^i} \right]$ représente la valeur actualisée des paiements de coupons dans les cas où l'obligation ne fait pas défaut jusqu'à la période i .
- Le second terme $\frac{F \times (1 - \sum_{j=1}^T \pi_j)}{(1 + r_T)^T}$ représente la valeur actualisée du remboursement du principal à l'échéance, sous la condition que l'obligation n'ait pas fait défaut avant cette période.

2. Paiements en cas de défaut :

- Le troisième terme $\sum_{i=1}^T \left[\frac{RR \times F \times \pi_i}{(1 + r_i)^i} \right]$ représente la valeur actualisée des paiements reçus en cas de défaut à la période i , où $RR \times F$ est le montant récupéré.

Estimation des probabilités marginales de défaut

L'estimation des probabilités marginales de défaut (π_i) en minimisant la distance entre les prix théoriques et observés des obligations repose sur un processus d'optimisation. L'objectif est de trouver les valeurs des π_i qui minimisent l'erreur totale entre les prix observés sur le marché et les prix théoriques calculés à partir de ces probabilités. Voici comment nous procédons et les méthodes utilisées pour y parvenir :

1. Formulation de la Fonction de Coût :

Nous définissons une fonction de coût qui mesure l'écart entre les prix observés des obligations (P_{obs}) et les prix théoriques ($P(\pi_i)$) :

$$E(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_T) = \sum_{i=1}^N (P_{\text{obs},i} - P(\pi_i))^2$$

où N est le nombre d'obligations observées.

2. Optimisation :

- L'objectif ici est de minimiser la fonction de coût $E(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_T)$ par rapport aux π_i
- cette optimisation doit être réalisée sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \pi_i \geq 0, & \forall i \\ 0 \leq \sum_{j=1}^i \pi_j \leq 1, & \forall i \end{cases} \quad (2.11)$$

3. Méthodes Utilisées pour l'Optimisation :

- *Méthode des Moindres Carrés (Least Squares)* : Minimiser la somme des carrés des écarts entre les prix théoriques et observés.
- *Méthode de Maximum de Vraisemblance (Maximum Likelihood)* : Maximiser la vraisemblance des observations sous l'hypothèse d'une distribution des erreurs.
- *Optimisation Numérique Contrainte* : Utiliser des techniques comme la programmation quadratique pour respecter les contraintes sur les π_i .

4. Interprétation des Résultats :

Interpréter les π_i comme les probabilités marginales de défaut. La somme cumulée ($\sum_{j=1}^i \pi_j$) donne les probabilités cumulées de défaut jusqu'à la période i , permettant d'évaluer le risque de crédit sur l'horizon de l'obligation.

Une fois les probabilités marginales de défaut π_i estimées à partir des spreads d'obligations, il est possible de les utiliser pour calibrer l'intensité de défaut $\lambda(t)$, également appelée taux de risque instantané. Cette intensité de défaut est un paramètre clé dans les modèles de crédit basés sur l'approche par intensité, qui permet de quantifier le risque de défaut à chaque instant de la vie d'un instrument financier.

2.3.2 Calibration de l'intensité de défaut

Après avoir calculé les probabilités marginales de défaut π_i dans la section précédente, nous procédons à la calibration de l'intensité de défaut λ_t . L'intensité de défaut λ_t est un paramètre clé dans les modèles de risque de crédit. L'approche classique et celle qui sierra le plus à notre case consiste à prendre l'intensité de défaut comme étant constante par mor-

ceux. C'est à dire :

$$\lambda(t) = \sum_{k=1}^q \lambda_k 1_{\{T_{k-1} \leq \tau \leq T_k\}} \quad (2.12)$$

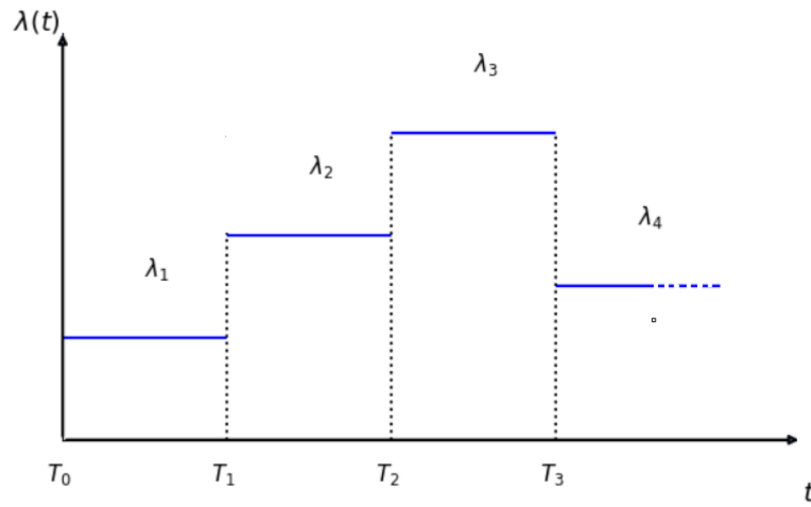


FIGURE 2.13 – Intensité de défaut constante par morceaux

2.3.2.1 Méthodologie de calibration

En partant des probabilités marginales de défaut annuelles π_i , nous pouvons directement relier ces probabilités à l'intensité de défaut constante λ_i pour chaque année i . Sous l'hypothèse que l'intensité de défaut est constante sur des périodes d'un an, la relation entre π_i et λ_i s'obtient partant de la définition de ce dernier.

$$\mathbb{P}(t \leq \tau < t + dt \mid \tau > t) = \lambda(t)dt$$

La probabilité de survie jusqu'au temps T est alors donnée par

$$\mathbb{P}(\tau > T) = \exp\left(-\int_0^T \lambda(u)du\right)$$

Les probabilité marginale de défaut π_i qui sont en fait les probabilités conditionnelle de faire défaut au cours d'une année sachant qu'il n'y a pas eu défaut avant peuvent s'écrire :

$$\pi_i = \mathbb{P}(i-1 \leq \tau < i \mid \tau > i-1)$$

et on a donc :

$$\pi_i = 1 - \frac{\mathbb{P}(\tau > i)}{\mathbb{P}(\tau > i-1)} = 1 - \frac{\exp(-\lambda \cdot i)}{\exp(-\lambda \cdot (i-1))} = 1 - \exp(-\lambda_i)$$

D'où en inversant cette relation on obtient :

$$\lambda_i = -\ln(1 - \pi_i)$$

Ainsi, pour chaque année i , nous pouvons calibrer λ_i à partir des probabilités de défaut π_i estimées dans la section précédente. L'intensité de défaut étant constante au sein de chaque année, cela nous permet d'obtenir une fonction $\lambda(t)$ par morceaux, où chaque λ_i reste constante sur l'intervalle temporel correspondant à l'année i .

2.3.2.2 Un cas illustratif

Nous allons considérer ici le set de bonds émis par DANGOTE CEMENT. Nous notons que ce ne sont pas ici les données réelles des prix de marché. Elles peuvent s'obtenir auprès d'un courtier ou de certaines plateforme (comme BLOOMBERG), moyennant d'un abonnement dont nous ne disposons pas. Ces données nous servent d'illustration de la méthode.

Obligation	Emission	Échéance	Coupon (%)	Nominal	Prix du marché
12.50% DCM APR 2025	30/04/2021	30/04/2025	12.50	1000	980
12.50% DAN MAY 2026	30/05/2021	30/05/2026	12.50	1000	960
13.50% DAN MAY 2028	30/05/2021	30/05/2028	13.50	1000	940

TABLE 2.3 – Données sur les obligations émises par DANGOTE CEMENT

La méthode d'estimation des probabilités marginales se fait similairement à l'estimation des variables dans le modèle KMV. On utilise la fonction minimize de la bibliothèque scipy.optimize dans python pour minimiser la somme des carrés des écarts entre les prix observés et les prix théoriques. La différence se fait sur l'ajout des contraintes sur les probabilités marginales telles que définies dans 2.11.

En prenant le 01/09/2024 comme date d'évaluation nous avons obtenu les résultats suivants :

	π_i	λ_i (bp)	Probabilité de survie
2015	0.001%	0.100	99.99%
2016	1.217%	122.510	98.78%
2017	0.001%	0.100	98.78%
2018	0.345%	34.601	98.43%

FIGURE 2.14 – Résultats de calibration du modèle à intensité

2.4 Forward-looking et scénario économique

L'application des modèles KMV et à intensité dans le cadre de la norme IFRS 9 ne peut être complète sans l'intégration d'une dimension "forward-looking". En effet, l'IFRS 9 impose une approche prospective dans le calcul des PD, où les facteurs économiques futurs et les scénarios de marché doivent être pris en compte tel que le prévoit le paragraphe B5.5.52 de la norme :

« Les informations historiques sont un point d'ancrage ou une base important pour l'évaluation des pertes de crédit attendues. Toutefois, l'entité doit ajuster les données historiques en fonction des données observables actuelles, afin de refléter les effets des circonstances actuelles et ses prévisions quant aux circonstances futures ».

Nous rappelons les points clés à respecter dans les estimations des PDs sous IFRS 9

- Un montant objectif et fondé sur des pondérations probabilistes, qui est déterminé par l'évaluation d'un éventail de résultats possibles (Scénarios)
- La valeur temps de l'argent (discount factor)
- forward-looking & PiT (conjecture économique actuelle et future)

Nos deux modèles ont déjà une dimension PiT car ils capturent les variations du risque de défaut à des instant donné en utilisant des données de marché à jour (valeur de marché des actifs et volatilité des actions pour le KMV et prix des obligations pour le modèle à intensité). De plus tel que vu plus haut, chacun d'eux utilise bien les notions de valeur temps de l'argent, via le calcul de la DD dans le modèle KMV et via les actualisations des flux de défaut dans la PD inféré par bond.

Nous allons donc dans la suite parler des aspects forward-looking et scénario économique qui ne sont pas directement pris en compte dans ces modèles.

2.4.1 Forward-Looking

Les données économiques jouent un rôle central dans la modélisation forward-looking des PD. Les variables macroéconomiques comme l'évolution des taux d'intérêt, le produit intérieur brut (PIB), le taux d'inflation, le taux de chômage ou les indices boursiers influencent directement la capacité de remboursement des emprunteurs. La norme ne prescrit pas l'utilisation de variables macroéconomiques spécifiques ou de prévisions exactes pour l'aspect forward-looking. Elle laisse plutôt une certaine flexibilité aux entités pour choisir les variables macroéconomiques les plus pertinentes et significatives en fonction de leurs portefeuilles, de leurs environnements économiques et des risques auxquels elles sont exposées.

L'approche généralement utilisée consiste à modéliser le lien entre la PD et un ensemble de variables macroéconomiques qui ont donc une influence sur la PD. L'objectif étant de déterminer un **Ajustment Factor**, qui est le coefficient qui permet d'ajuster les PD PiT (calculées par nos modèles) aux conditions économiques futures

2.4.1.1 Cas illustratif d'application

Nous avons la série temporelle des PD PiT historiques illustrée dans la figure suivante. Les PD sont observées pour chaque trimestre sur une période assez longue pour couvrir un cycle économique complet (TTC)¹ de l'entreprise (2012-2024 ici).

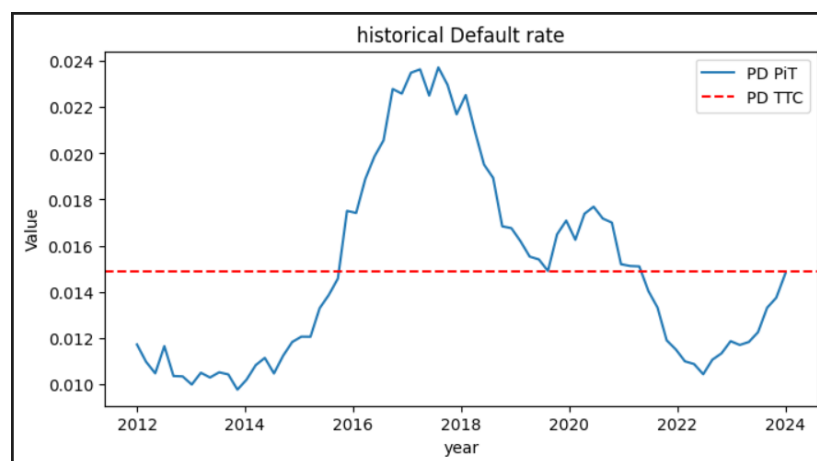


FIGURE 2.15 – Historical Obs PDs data

On est donc placé en début de trimestre 2024 et on veut déterminer la PD PiT & forward-looking. On dispose des données historiques sur la même période des indicateur macro, CPI,

1. Trough the Cycle, la PD TTC à l'inverse de la PD PiT, désigne une probabilité de défaut estimée sur un cycle complet, elle vise à capturer le risque de défaut moyen sur l'ensemble du cycle. On peut écrire $PD_{TTC} = moyenne(HistoricalPDs)$

Risk free Rate et taux de change USD/NGN. Les données ont été normées

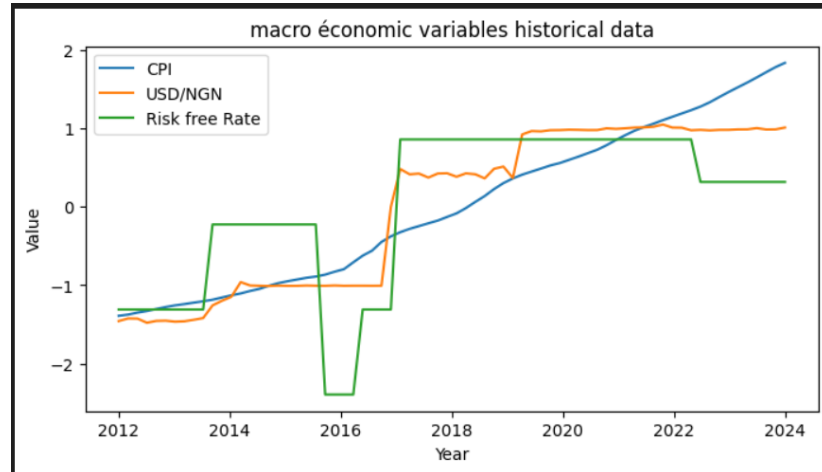


FIGURE 2.16 – Historical economic data

Regression

Comme notre variable dépendante (PD) est comprises dans l'intervalle $]0,1[$, on utilise une fonction de lien, la fonction logit ($\text{logit}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$). La variable dépendante ici est donc $\text{logit}(\text{Default Rate})$. Après analyse les résultats de la régression via la bibliothèque `statsmodels.api` de python sont comme suit :

	coef	std err	t	P> t	[0.025	0.975]
const	-4.2365	0.028	-148.881	0.000	-4.294	-4.179
CPI	-0.5393	0.095	-5.703	0.000	-0.729	-0.350
USD/NGN	0.7509	0.126	5.954	0.000	0.498	1.004
Risk free Rate	-0.1971	0.060	-3.262	0.002	-0.318	-0.076
Omnibus:	15.658		Durbin-Watson:		2.028	
Prob(Omnibus):	0.000		Jarque-Bera (JB):		18.170	
Skew:	1.153		Prob(JB):		0.000113	
Kurtosis:	4.528		Cond. No.		9.15	

FIGURE 2.17 – Regression result

Les variables sont significatives, on peut donc écrire l'équation

$$PD_{forecasted} = \frac{1}{1 + \exp^{-4.23 + -0.53CPI + 0.75USD/NGN - 0.19RiskfreeRate}} \quad (2.13)$$

NB : Nous précisons que le lien entre les variables macroéconomique et la PD n'est pas forcément linéaire. La norme laisse la flexibilité à l'entité de montrer la significativité des variables à travers diverses méthodes.

Ajustement Factor

IFRS impose le fait de prendre en compte les estimations futures des variables macroéconomiques. Il est recommandé que ces prévisions soient obtenues à partir de sources mondialement reconnues telles que la base de données de la Banque Mondiale, celle du FMI, le Bureau National des Statistiques et Bloomberg.

Ayant alors des estimations de nos variables sur notre période de calcul, On peut avoir la $PD_{forecasted}$ avec ces prévisions et en les appliquant à l'équation de lien économétrique 2.13 obtenue plus haut.

Définition 2.4.1. On note :

- $PD_{forward-looking}$ la PD ajustée des conjectures économiques futures.
- $ScalingFactor$ le facteur d'ajustement sur la période d'estimation de PD
- PD_{PiT} la PD calculée par nos modèles ne tenant en compte que les conjecture de marché actuelle

On a alors

$$ScalingFactor = \frac{PD_{forecasted}}{PD_{TTC}}$$

$$PD_{forward-looking} = PD_{PiT} \times ScalingFactor \quad (2.14)$$

2.4.2 Scénarios économiques

Après avoir obtenu les PD forward-looking ajustées en fonction des facteurs économiques futurs, il est essentiel de formaliser les hypothèses économiques à travers des scénarios spécifiques. Ces scénarios économiques permettent de modéliser les différentes trajectoires que pourrait suivre l'économie, et d'en évaluer les impacts sur les probabilités de défaut des entreprises.

Les scénarios économiques sont généralement construits pour capturer une gamme de conditions économiques potentielles, allant de scénarios optimistes à pessimistes, en passant par un scénario central ou de base. Chacun de ces scénarios est associé à des prévisions spécifiques concernant des variables économiques clés. Ces variables influencent directement la capacité des emprunteurs à rembourser leurs dettes et, par conséquent, les PD forward-looking.

L'utilisation de scénarios économiques multiples permet non seulement d'affiner les estimations des pertes de crédit attendues, mais aussi de se préparer à différents environnements

macroéconomiques. Cela garantit une approche plus résiliente face aux incertitudes et aux chocs économiques.

2.4.2.1 Détermination du nombre de scénarios sous IFRS 9 :

Le nombre de scénarios à considérer en **IFRS 9** n'est pas strictement défini par la norme, mais il doit être suffisamment représentatif pour refléter les différentes **conditions économiques futures**. L'objectif est d'intégrer des éléments prospectifs dans les calculs des ECL, en tenant compte de plusieurs scénarios économiques plausibles et justifiables.

1. Principe de proportionnalité : Le nombre de scénarios doit être proportionnel à la complexité de l'institution, à la nature de son portefeuille d'actifs financiers, à l'environnement économique dans lequel elle opère et aux données disponibles. Les grandes institutions ou celles avec des portefeuilles complexes peuvent utiliser plusieurs scénarios, tandis que les institutions plus petites ou avec des portefeuilles simples peuvent se limiter à un nombre réduit.

2. Représentation réaliste des risques : Les scénarios doivent couvrir une gamme raisonnable de résultats potentiels. Cela implique généralement de considérer au moins trois types de scénarios :

- **Scénario de base** : Représente les attentes économiques actuelles ou le cas le plus probable.
- **Scénario favorable** : Reflète un environnement économique plus optimiste.
- **Scénario défavorable** : Anticipe des conditions économiques plus dégradées.

Il est à noter que si les relations sont non linéaires entre la PD et les variables, alors un seul scénario forward-looking ne saurait être suffisant

3. Pertinence des scénarios : Les scénarios doivent être adaptés aux variables macroéconomiques et aux risques financiers propres à l'entité (taux de croissance du PIB, inflation, taux d'intérêt, etc.).

4. Approche multi-scénarios : L'IFRS 9 encourage l'utilisation d'une approche multi-scénarios pour éviter les biais et assurer que les prévisions ne reposent pas uniquement sur un seul scénario.

5. Poids attribués aux scénarios : Une fois les scénarios déterminés, des **poids** leur sont attribués pour refléter la probabilité de réalisation de chaque scénario.

6. Régulateurs et meilleures pratiques : Les régulateurs peuvent fournir des orienta-

tions spécifiques sur le nombre minimal de scénarios à envisager. Les pratiques partagées dans l'industrie influencent également ces décisions.

2.4.2.2 Poids des scénarios

Après les analyses faites sur le nombre de scénario il faudrait donner un poids à chacun d'entre eux. Nous allons utiliser un exemple illustratif simpliste pour illustrer le propos dans l'attribution des poids.

2.4.2.2.1 cas illustratif

Supposons qu'une banque est capable d'observer tous les scénarios possibles et classons les par ordre de gravité du percentile zéro au percentile 100. Nous regardons le diagramme représentant à quoi pourrait ressembler le profil de perte dans ces scénarios. Ce qui est vraiment important pour déterminer la pondération est d'examiner ce qui se passe dans les trois scénarios que nous avons choisis et ensuite de comprendre quel groupe de scénario est le plus représentatif.

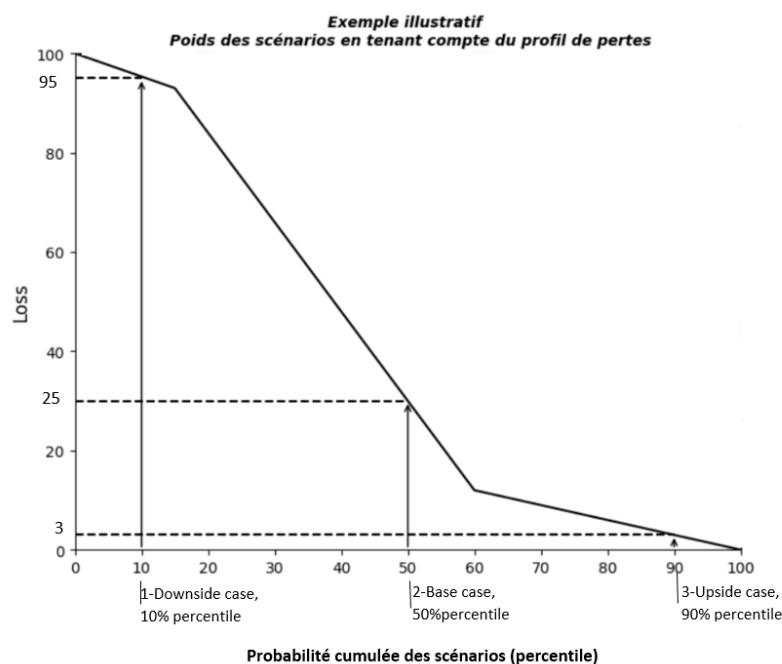


FIGURE 2.18 – Exemple Profil de perte

Dans cet exemple il a été déterminé que le scénario défavorable dans le percentile 10 va capturer les non linéarités. Si dans le scénario défavorable la perte est de 95, la question à répondre sera de savoir quelle range de scénario cette perte de 95 est la plus représentative. Dans notre exemple, en raison du profil de perte relativement plat dans la région jusqu'au

percentile 30, la perte dans scénario downside semble bien être le plus représentatif des scénarios entre le 0 et le percentile 30, alors qu'on se serait peut-être attendu à ce qu'une pondération de 30% soit accordé à ce scénario défavorable.

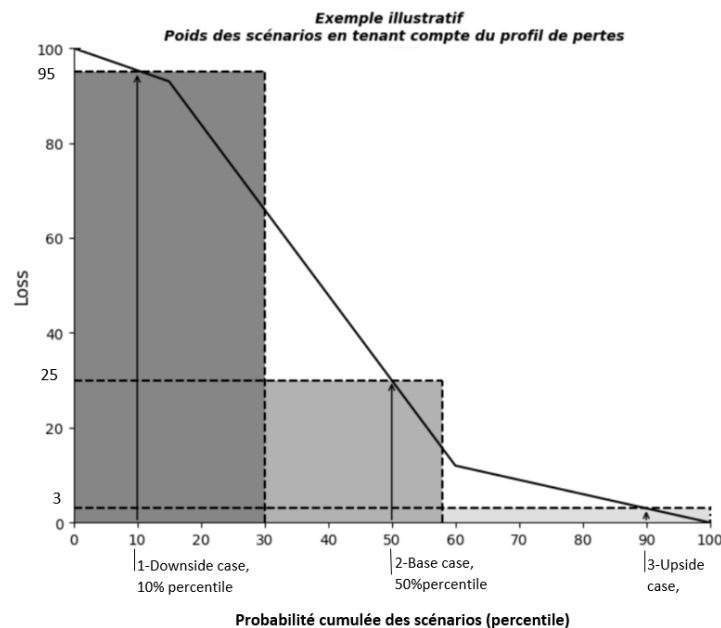


FIGURE 2.19 – Pondération tenant compte du profil de perte

Ceci contraste avec une approche alternative que l'on pourrait adopter si on n'avait pas tenu compte de ce à quoi ressemble le profil de perte, c'est à dire à un percentile de 10, donner une pondération de 10% et ainsi de suite. Ce que cela pourrait entraîner est une sous-estimation significative des pertes, en particulier si les pertes dans le scénario de base sont significativement inférieures à celle que l'on obtient dans le scénario pessimiste.

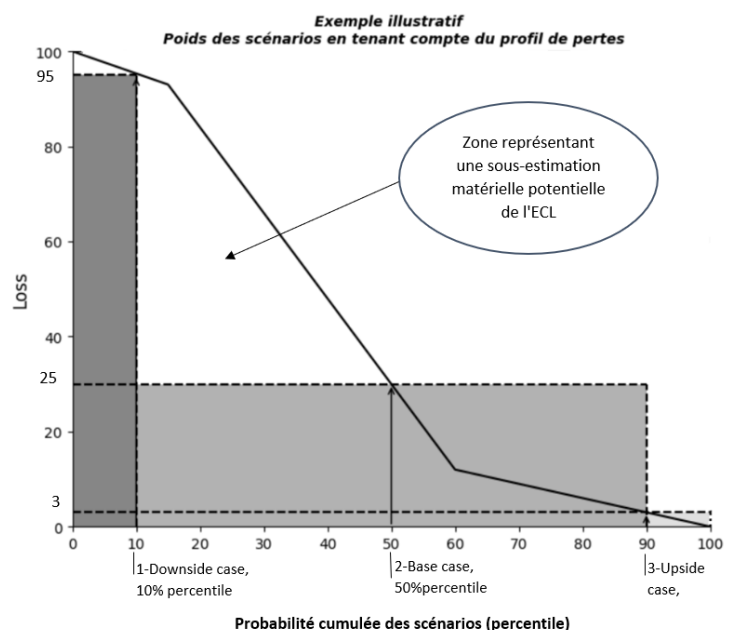


FIGURE 2.20 – Pondération ne tenant pas compte des profil de perte

En résumé, la pondération des scénarios dans le cadre de la modélisation des pertes ne doit pas être basée uniquement sur des pourcentages fixes associés à des percentiles. Au contraire, il est crucial de comprendre la dynamique des pertes à travers différents scénarios et d'identifier le groupe de scénarios qui représente le mieux la réalité, en tenant compte des non-linéarités. Ne pas considérer la forme du profil de perte pourrait conduire à des sous-estimations importantes.

2.4.3 PD IFRS 9

Après avoir déterminé un facteur d'ajustement permettant de passer des PD PiT aux PD forward-looking, ainsi que les scénarios économiques et leurs pondérations, il est alors possible de procéder au calcul de la PD selon la norme IFRS 9. Ce calcul intègre les ajustements prospectifs nécessaires et tient compte des différents scénarios économiques pondérés. La PD obtenue respecte ainsi toutes les exigences de la norme, notamment en reflétant la nature forward-looking, en étant un estimateur non biaisé du taux de défaut effectif, et en prenant en compte la valeur temps de l'argent

$$PD_{IFRS9} = \sum_{i=1}^n w_i \cdot PD_{forward-looking,i} \quad (2.15)$$

- w_i : pondération attribuée au $i^{\text{ème}}$ scénario économique,

- $PD_{\text{forward-looking},i}$: probabilité de défaut ajustée selon le scénario économique i ,
- n : nombre total de scénarios économiques considérés.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en œuvre des modèles d'estimation de la Probabilité de Défaut (PD) adaptés aux entreprises nigérianes : le modèle KMV pour les entreprises cotées à la NGX et le modèle d'intensité inféré des obligations pour les entreprises émettrices de titres obligataires et un modèle de scorings. Ces modèles ont ensuite été enrichis en intégrant les aspects "forward-looking" et des scénarios économiques pondérés, conformément aux exigences de la norme IFRS 9. L'intégration de ces éléments permet d'améliorer la précision des estimations en tenant compte des perspectives économiques futures et des incertitudes, offrant ainsi une meilleure évaluation des risques de crédit pour le provisionnement.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce mémoire a exploré la construction de modèles de PD en conformité avec la norme IFRS 9, spécifiquement pour les entreprises nigérianes. La norme IFRS 9, avec son approche basée sur les ECL, impose une méthodologie rigoureuse pour évaluer le risque de crédit et déterminer les provisions nécessaires. En particulier, l'introduction de concepts clés tels que le SICR, l'approche forward-looking, et l'utilisation de scénarios économiques pondérés nécessitent une adaptation des modèles traditionnels pour répondre aux exigences de la norme.

Face aux limitations d'accès aux données spécifiques, nous avons choisi d'appliquer des modèles adaptés au contexte du marché nigérian. Le modèle KMV a été utilisé pour les entreprises cotées à la NGX, tandis que le modèle d'intensité inférée des obligations a été appliqué aux entreprises émettrices de titres obligataires. Nous avons par la suite mis sur pied un modèle de scoring, principalement utile pour les PME. Cependant l'accession réduite aux données ne nous permet que d'avoir un échantillon relativement insuffisant. Le modèle obtenu s'avère donc être limité et incomplet, d'autant plus que nous ne disposons pas d'historique consécutifs des défauts d'entreprises pour des back testing, une limitation importante de notre étude.

Pour les 70 entreprises cotées dont nous avons pu avoir des résultats par le modèle KMV, nous avons observé une forte représentation des meilleurs ratings ("Aaa"). En classant les entreprises par secteurs, nous avons remarqué que le secteur bancaire présentait les PD les plus hautes et le reste assez réparti. La comparaison de notre modèle avec les ratings d'Augusto nous suggère d'ailleurs d'induire un facteur d'ajustement des PD des banques par notre modèle qui n'intègre pas de critère qualitatif.

Par la suite, nous avons également intégré les aspects forward-looking et les scénarios économiques pondérés dans nos modèles, conformément aux exigences de la norme IFRS 9. Cette intégration permet d'affiner les prévisions de risque en tenant compte des perspectives économiques futures et des incertitudes, offrant ainsi des outils plus robustes pour le

provisionnement et l'évaluation du risque de crédit. Ne ressortons de ce point que :

- Les variables économiques dont on inclut les prévisions dans les PD sont choisies par les entités selon leur environnements économiques et les risques auxquels elles sont exposées.
- Le nombre de scénario n'est pas strictement défini par la norme, mais nous retenons qu'il doit être proportionnel à la complexité de l'institution. Les scénarios doivent couvrir une gamme raisonnable de scénario potentiel et être pertinent aux variables économiques.
- La pondération des scénarios doit être faite en fonction des probabilités de chacun d'eux. Il est très important d'avoir une belle compréhension des dynamiques des pertes à travers différents scénarios pour identifier le groupe de scénario qui représente le mieux la réalité.

En conclusion, ce mémoire fournit des outils pratiques pour les cabinets comptables et les institutions financières au Nigeria, facilitant leur conformité avec la norme IFRS 9 et améliorant la précision des provisions pour pertes de crédit. Toutefois, il souligne également l'importance d'améliorer l'accès aux données pour permettre une évaluation plus complète et détaillée des risques de crédit. Les travaux futurs devraient se concentrer sur l'élargissement des bases de données pour le développement de meilleurs modèles et des tests de robustesse solides. Ensuite par la mise en place de modèle pour les composantes EAD et LGD nous pourrions entièrement appliquer le paradigme IFRS 9 de provisionnement des instruments financiers à un portefeuille.

Bibliographie

- [1] F. M. Ajide and A. A. Olayemi. Financial ratios : A tool for computing probability of corporate default. *ResearchGate*, 2022.
- [2] Edward I. Altman. Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy. *Journal of Finance*, 23(4) :589–609, 1968.
- [3] CAJA Anisa. Term structures of default probabilities, 2011.
- [4] William H. Beaver. Financial ratios as predictors of failure. *Journal of Accounting Research*, 5 :71–111, 1967.
- [5] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3) :637–654, 1973.
- [6] Jin-Chuan Duan and Jean-Guy Simonato. Maximum likelihood estimation of deposit insurance value with interest rate risk. *Journal of Empirical Finance*, 9(1) :109–132, 2002.
- [7] U. Erlenmaier. The shadow rating approach – experience from banking practice. In Bernd Engelmann and Robert Rauhmeier, editors, *The Basel II Risk Parameters : Estimation, Validation, and Stress Testing*, chapter 4, pages 39–77. Springer, 2006.
- [8] Pierre-Antoine Espagnet. Déterminer les probabilités de défaut à partir des données de marché, 2011.
- [9] Greg Gupton, Charles Finger, and Mudit Bhatia. Creditmetrics : Technical document. Technical report, J.P. Morgan, 1997.
- [10] Jerry A. Hausman. Specification tests in econometrics. *Econometrica*, 46(6) :1251–1271, 1978.
- [11] International Accounting Standards Board. *IFRS 9 Financial Instruments*. International Accounting Standards Board, 2014.
- [12] Marc Jeanblanc and Andrzej Rutowski. The intensity of default in a poisson framework. *Mathematics of Operations Research*, 24(2) :355–375, 1999.

- [13] Freddy Kakou. Application des règles de dépréciation de la norme ifrs 9 à un portefeuille d'actifs d'une compagnie d'assurance, 2021.
- [14] Stephen Kealhofer, John McQuown, and Oldrich Vasicek. Credit at the crossroads. *Risk Magazine*, 3(6) :21–25, 1990.
- [15] Ali Raza Khakwani, Naveed Ahmed Memon, and Asif Siddiqui. Firm specific and macroeconomic determinants of probability of default : A case of pakistani non-financial sector. *International Journal of Sustainable Development and Planning*, 18(2) :499–507, 2023.
- [16] Tomáš Klieštík. Distance to default and its impact on default probability. *Journal of Financial Risk Management*, 5(2) :112–120, 2009.
- [17] Robert C. Merton. On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29 :449–470, 1974.
- [18] University of Debrecen. Note on simple and logarithmic return. Technical report, Institute of Accounting and Finance, 2017.
- [19] Williams Tchimou. Ifrs 9 - nouveau paradigme de provisionnement des instruments financiers au titre du risque de crédit : Application à un portefeuille de crédits à la consommation de la clientèle particulière, 2019.
- [20] Jeffrey M. Wooldridge. *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*. The MIT Press, Cambridge, MA, 2001.
- [21] World Bank. Estimating default probabilities. Technical report, World Bank, 2022. Workpaper.

.1 Annexe A : Outils Mathématiques

.1.1 Lemme d'Itô

Le lemme d'Itô, ou encore formule d'Itô, est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Ce lemme offre un moyen de manipuler le mouvement brownien ou les solutions d'équations différentielles stochastiques (EDS).

Soit un processus d'Itô, un processus stochastique de la forme :

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

avec μ_t et σ_t deux fonctions aléatoires satisfaisant certaines hypothèses.

Si f est une fonction de classe $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, alors la formule d'Itô s'écrit :

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X_t} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^2} \sigma_t^2 (dX_t)^2$$

.1.2 Théorème d'arrêt de Doob

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale intégrable par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$. Si T est un temps d'arrêt, alors X_T est intégrable et :

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$$

pour tout T tel que $T < \infty$ presque sûrement.

.1.3 Estimation par maximum de vraisemblance

B- Maximum de vraisemblance

Étant donné que les modèles de l'approche structurelle font une hypothèse sur la distribution de la valeur de marché des actifs d'une entreprise, la méthode du maximum de vraisemblance est adéquate pour estimer nos paramètres. Cette méthode d'estimation intègre toute l'information sur la distribution des variables aléatoires. Elle permet aussi l'estimation simultanée de plusieurs paramètres inconnus d'une population.

Considérons un échantillon de N observations $(y_1, y_2, \dots, y_N)$ sur T variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ de même distribution. Soit $L(y_1, y_2, \dots, y_N; \Psi)$ la fonction de densité conjointe

de cet échantillon, où Ψ est le vecteur des paramètres à estimer. La fonction $L(y_1, y_2, \dots, y_N; \Psi)$ est la fonction de vraisemblance et peut être interprétée comme la probabilité d'obtenir les réalisations $(y_1, y_2, \dots, y_N)$.

L'estimateur $\hat{\Psi}$ maximise $L(y_1, y_2, \dots, y_N; \Psi)$ par rapport à Ψ . Cet estimateur est asymptotiquement efficient et selon le théorème de Cramer[annexe] :

$$\sqrt{T-1} (\hat{\Psi} - \Psi) \xrightarrow{L} N(0, IA^{-1}(\Psi))$$

avec

$$IA^{-1}(\Psi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{Var} \left(\frac{\partial \log L(\Psi)}{\partial \Psi} \right)$$

La méthode du maximum de vraisemblance vise à identifier les estimations des paramètres inconnus les plus probables à partir de nos observations. Cette approche est déjà adoptée en finance pour l'estimation des paramètres de modèles, notamment par Duan et Simonato [6] dans le cadre de l'assurance dépôt.

Nous allons illustrer comment cette méthode s'applique aux modèles KMV. Le but est de déterminer les estimations pour V_t et σ_V à partir des observations du marché des fonds propres. Pour chaque $t \in \{1, 2, \dots, N\}$, la valeur du marché des actifs $V_a(t\Delta_t)$ n'est pas observable, ce qui empêche l'usage direct de la fonction de vraisemblance pour estimer μ_a et σ_V . Cependant, puisqu'il existe une relation entre les variables non observables V_t et les variables observables S_t qui décrivent la valeur du marché des fonds propres, nous avons dérivé la fonction de vraisemblance $L(V_t, t = 1, \dots, N; \mu_V, \sigma_V)$ via une méthode de transformation des données. Pour plus de détails sur cette fonction, consultez [annexe]. Nous avons obtenu :

$$L(S_t, t = 1 \dots N; \mu_V, \sigma_V) = \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{v_t} \right) \times \left(\frac{1}{\sigma_V} \right)^N \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^N \times \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{N(d_i)} \right) \\ \times \prod_{i=1}^N \exp \left\{ - \frac{\left(\ln \frac{v_i}{v_{i-1}} - \left(\mu_V - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) t \right)^2}{2\sigma_V^2} \right\},$$

où v_t est la réalisation de la variable aléatoire V_t représentant la valeur marchande des actifs de l'entreprise à l'instant t . $d_i = \frac{\ln(\frac{v_i}{D}) + (r + \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V \sqrt{T}}$, et T est l'horizon de la dette.

Nous estimons $\hat{\mu}_V$ et $\hat{\sigma}_V$ comme les valeurs qui maximisent la fonction de vraisemblance. Le maximum de $L(V_t, t = 1 \dots N; \mu_V, \sigma_V)$ est atteint au même point que le maximum de $\ln(L(S_t, t = 1 \dots N; \mu_V, \sigma_V))$. Par conséquent, les constantes n'affectant pas le problème de

maximisation, $\hat{\mu}_V$ et $\hat{\sigma}_V$ résolvent la maximisation de la fonction L suivante :

$$L = -N \ln(\sigma_V) - \sum_{i=1}^N \ln |N(d_i)| - \sum_{i=1}^N \ln(v_i) - \frac{1}{2\sigma_V^2 t} \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{v_i}{v_{i-1}} - \left(\mu_V - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) \right)^2.$$